

Électricité Générale

Electricité 2

Livret 6

Loi de KIRCHHOFF



Mise à jour février 2007



FC 1204 06 1.1

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Le présent fascicule fait l'objet d'une protection relative à la propriété intellectuelle, conformément aux dispositions du Code du même nom.

Son utilisateur s'interdit toute reproduction intégrale, partielle ou par voie dérivée et toute diffusion dudit document sans le consentement exprès de l'AFPA.

Sous réserve de l'exercice licite du droit de courte citation, il est rappelé que toute reproduction intégrale, partielle ou par voie dérivée de ce document, sans le consentement exprès de l'AFPA, est constitutive du délit de contrefaçon sanctionné par l'article L 335-2 du Code de la Propriété Intellectuelle.

Dépôt légal août 2000

SOMMAIRE

1 LOIS DE KIRCHHOFF

Page 4

1.1 But

1.2 Terminologie

1.3 Conventions

1.4 Première loi ou loi des noeuds

1.5 Deuxième loi ou loi des mailles

1.6 Mode d'application des lois de Kirchhoff

1.7 Intérêt des lois de Kirchhoff

1.8 Cas particulier où le réseau comprend des récepteurs initialement symétriques

2 SOLUTIONS DES EXERCICES

Page 18

1 LOIS DE KIRCHHOFF

1.1 BUT

Lorsqu'un circuit électrique ne comporte que des générateurs et des récepteurs connectés en série, il suffit d'appliquer les formules relatives à la loi d'Ohm généralisée.

Lorsque le circuit comporte des dérivations multiples, le raisonnement devient si complexe qu'il est impossible d'attribuer une fonction définie (générateur ou récepteur) à tel ou tel élément.

Les lois de Kirchhoff permettent de déterminer avec certitude le sens et l'intensité du courant en chaque point d'un réseau complexe.

1.2 TERMINOLOGIE

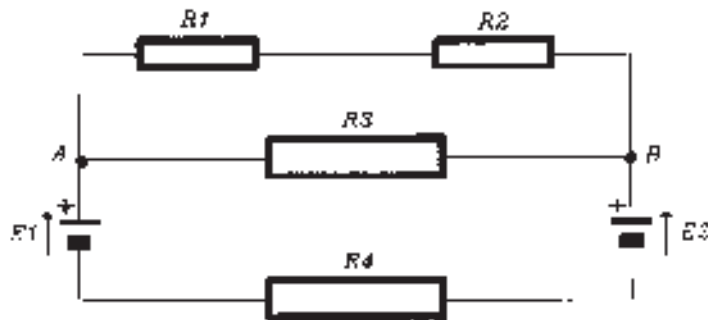


FIGURE 1

a) Branche :

Une branche est une portion de circuit ne comportant pas de dérivation.

Ex : (fig. 1) branche $AR_1 R_2B$
branche $AE_1 R_4E_2B$.

b) Noeud :

Un noeud est le point de rencontre de plusieurs branches. Ex : noeud A, noeud B.

c) Maille :

Une maille est une portion de circuit fermé ne comportant que des branches en série.

Ex : maille A R₁ R₂ B E₂ R₄ E₁ A
maille A R₃ B E₂ R₄ E₁ A
maille A R₁ R₂ B R₃ A

1.3 CONVENTIONS

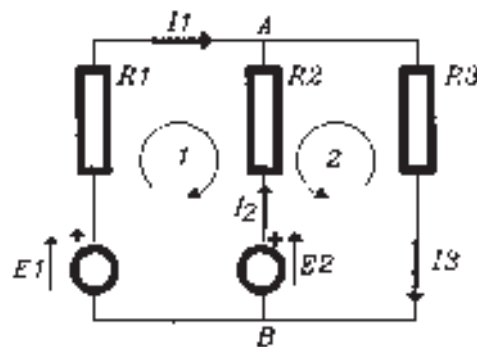


Figure 2

1) **On choisit un sens arbitraire** de courant traversant chacune des branches. On essaie de le choisir le plus logique possible bien que cela n'ait aucune importance.

2) **On choisit un sens de parcours arbitraire** pour chaque maille. Ce sens de parcours est absolument indépendant du sens des courants (fig. 2).

Le sens de parcours est indiqué soit par une flèche soit par l'ordre dans lequel sont énoncées les lettres décrivant les éléments.

1.4 PREMIERE LOI OU LOI DES NOEUDS

La somme algébrique des courants qui passent par un noeud est nulle.

$$\Sigma I = 0$$

On relèvera les équations relatives aux noeuds en affectant d'un signe (+) les courants qui arrivent et d'un signe (-) ceux qui en repartent.

On voit, représentés (fig. 3), quelques exemples ainsi que les équations correspondantes.

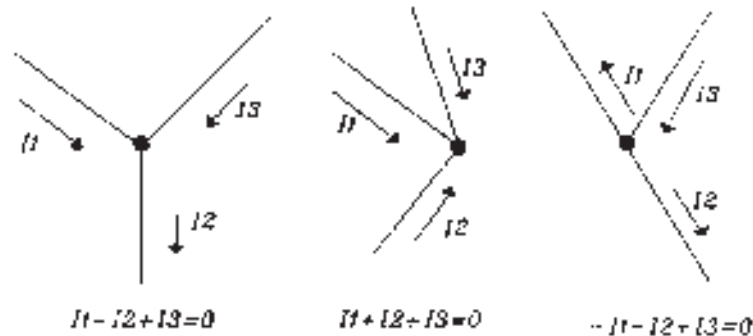


Figure 3

Le sens des courants étant arbitraire, il n'y a pas lieu de s'étonner d'avoir à écrire :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

1.5 DEUXIEME LOI OU LOI DES MAILLES

Dans une maille la somme algébrique des f.e.m. est égale à la somme algébrique des chutes de tension.

$$\Sigma E = \Sigma R I$$

Les polarités des générateurs étant connues, on relèvera les équations relatives aux mailles en affectant dans le premier membre :

- d'un signe (+) les f.e.m. qui agissent dans le sens de parcours choisi,
- d'un signe (-) les f.e.m. qui agissent en sens contraire.

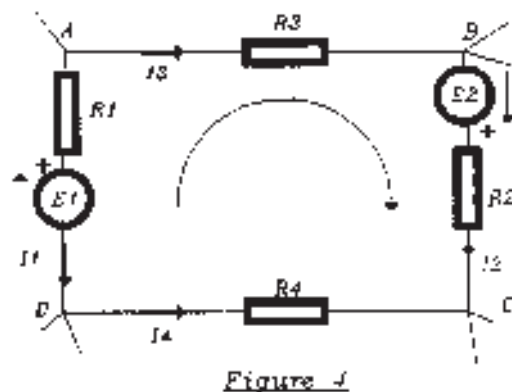
On affectera dans le second membre :

- d'un signe (+) tout produit $R I$ correspondant à un courant de même sens que le sens de parcours choisi,
- d'un signe (-) tout produit $R I$ correspondant à un courant de sens contraire au sens de parcours choisi.

On relèverait à propos de la maille ABCD représentée (fig. 4) :

$$E_1 + E_2 = R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_1 I_1$$

(Le sens du parcours est donné par l'ordre des lettres ABCD).



1.6 MODE D'APPLICATION DES LOIS DE KIRCHHOFF

Les intensités des courants traversant chaque branche étant les inconnues du problème, on doit poser autant d'équations indépendantes que le réseau comprend de branches.

On trouve une première série d'équations en appliquant la loi des noeuds. Toute nouvelle équation posée sera indépendante des précédentes si elle comporte au moins un courant non encore utilisé. On montre que pour un nombre "n" de noeuds, il n'y a que "n-1" équations indépendantes.

La deuxième série d'équations est obtenue par application de la loi des mailles. Toute nouvelle équation posée sera indépendante des précédentes si elle comporte au moins une branche non encore utilisée.

Pour un circuit comportant "B" branches, on doit établir :

"B - (n-1)", soit **"B - n + 1" équations des mailles** pour pouvoir résoudre le système.

Le système étant constitué d'équations linéaires à coefficients constants, il pourra être résolu par l'un des procédés habituels :

addition, substitution, déterminants.

Tous calculs faits, si l'intensité d'un ou plusieurs courants est affectée d'un signe (-), cela signifie que le sens réel est opposé au sens arbitraire qui avait été choisi.

Exemple :

Soit le circuit représenté (fig. 5). On se propose de calculer l'intensité des courants traversant chacune des branches.

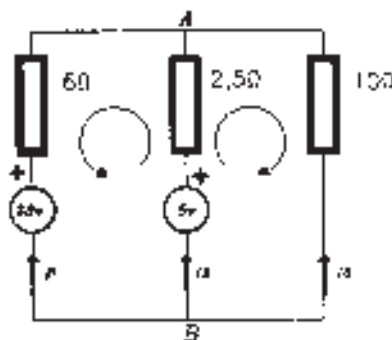


Figure 5

Dans ce circuit on ne peut établir qu'**une seule équation relative aux noeuds**.
En conséquence on établira **deux équations relatives aux mailles**.

1) Choisissons un sens arbitraire pour les courants, par exemple tous les trois vers "A".

2) Choisissons deux mailles ainsi que le sens dans lequel nous allons les parcourir.

1ère maille : $\underline{A}6\ \Omega$; 28 V ; B ; 5 V ; 2,5 Ω ; $\underline{A}$.

2ème maille : $\underline{A}10\ \Omega$; B ; 5 V ; 2,5 Ω ; $\underline{A}$.

3) Posons l'équation relative au noeud A :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

4) Posons les équations relatives aux mailles :

1ère maille : $-28 + 5 = -6 I_1 + 2,5 I_2$

2ème maille : $+5 = -10 I_3 + 2,5 I_2$

5) Le système à résoudre est donc :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

$$-6 I_1 + 2,5 I_2 = -23 \quad (2)$$

$$-10 I_3 + 2,5 I_2 = 5 \quad (3)$$

Tirons I_1 de (1) :

$$I_1 = -I_2 - I_3 \quad (4)$$

Portons (4) dans (2) :

$$-6 (-I_2 - I_3) + 2,5 I_2 = -23 \quad (5)$$

$$8,5 I_2 + 6 I_3 = -23$$

Tirons I_2 de (3) :

$$I_2 = \frac{5}{2,5} + \frac{10}{2,5} I_3 \quad (6)$$

$$I_2 = 2 + 4 I_3$$

Portons (6) dans (5) :

$$8,5 (2 + 4 I_3) + 6 I_3 = -23$$

$$40 I_3 = -40 \quad (7)$$

$$I_3 = -1 \quad (7)$$

Portons (7) dans (3) :

$$-10 (-1) + 2,5 I_2 = 5 \quad (8)$$

$$I_2 = -2$$

Portons (7) et (8) dans (1) :

$$I_1 - 2 - 1 = 0$$

$$I_1 = 3$$

Les courants I_2 et I_3 circulent à l'envers du sens que nous avons arbitrairement choisi.

Rétablissons le sens des courants (fig. 6), leurs intensités ayant respectivement pour valeurs :

$I_1 = 3 \text{ A}$ $I_2 = 2 \text{ A}$ $I_3 = 1 \text{ A}$

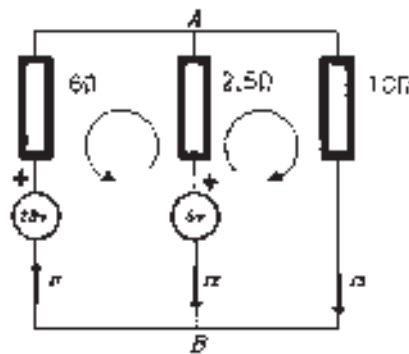


Figure 6

Vérification : En calculant la d.d.p. U_{AB} à partir des courants I_1 , I_2 , I_3 , nous devons trouver même valeur dans les trois cas, puisque les trois branches sont en parallèle :

$$U_{AB} = 10 \cdot I_1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ V}$$

$$U_{AB} = 5 + 2,5 \cdot I_2 = 5 + 5 = 10 \text{ V}$$

$$U_{AB} = 28 - 6 \cdot I_1 = 28 - 18 = 10 \text{ V.}$$

1.7 INTERET DES LOIS DE KIRCHHOFF

Leur intérêt réside surtout dans le fait que ces lois ont un caractère universel, elles permettent le calcul de l'intensité des courants traversant les diverses branches d'un réseau aussi complexe soit-il.

Lorsque le réseau comprend des récepteurs doués de f.c.e.m. dont les polarités sont connues ou peuvent être déterminées sans ambiguïté, on les comptera comme positives si elles agissent dans le sens du parcours, et comme négatives dans le cas contraire (même règle que pour les f.e.m. des générateurs).

EXERCICE 1

Soit le montage schématisé (fig. 7), on se propose de calculer l'intensité du courant qui traverse le moteur.

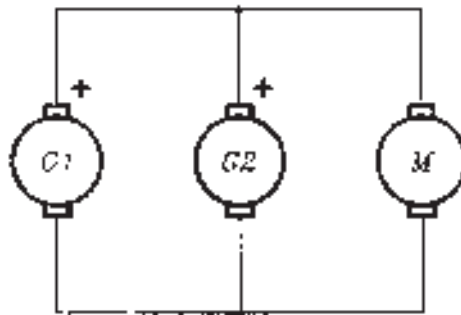


Figure 7

G_1 , G_2 sont des génératrices, M est un moteur.

On donne :

pour G_1 : $E_1 = 110 \text{ V}$; $r_1 = 2 \Omega$

pour G_2 : $E_2 = 100 \text{ V}$; $r_2 = 1 \Omega$

pour M : $E' = 80 \text{ V}$; $r' = 2 \Omega$

1) Le montage comportant trois branches nous établirons une équation relative aux noeuds et deux équations relatives aux mailles.

2) Les polarités aux bornes du récepteur ne faisant aucun doute, établissons le schéma équivalent (fig. 8). Choisissons le sens des courants, ainsi que le sens de parcours de deux mailles retenues.

3) Relevons les équations :

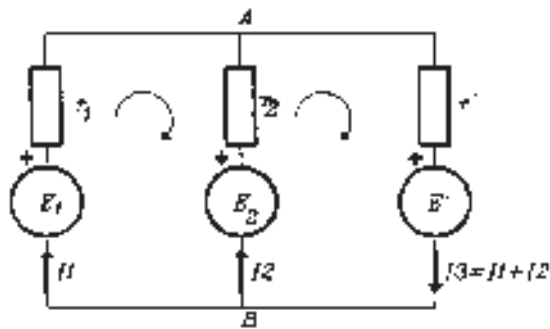


Figure 8

noeud A :

$$I_1 \dots\dots\dots = 0$$

1ère maille :

.....

2ème maille :

.....

Le système à résoudre est donc :

.....

$$I_3 = \dots\dots\dots \text{ A}$$

1.8 CAS PARTICULIER OU LE RESEAU COMPREND DES RECEPTEURS INITIALEMENT SYMETRIQUES

Les récepteurs tels que les cuves à électrolyses et les moteurs donnent lieu à des f.c.e.m. dont les polarités sont fonction du courant qui les traverse.

Si le réseau est suffisamment complexe pour que l'on ne puisse déterminer avec certitude les polarités de la f.c.e.m., on doit la déterminer en fonction du sens arbitraire du courant traversant la branche dans laquelle se trouve le récepteur (fig. 9).

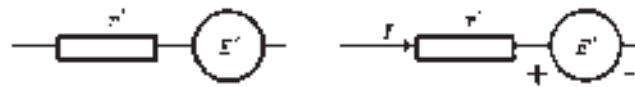


Figure 9

Tous calculs faits, si l'intensité du courant traversant la branche contenant ce récepteur est affectée d'un signe (-), le résultat est faux, il faut recommencer les calculs après avoir changé le sens du courant et par suite les polarités de la f.c.e.m.

EXERCICE 2

Pour réduire au minimum le nombre d'équations, on a intérêt à réduire le nombre d'inconnues. Pour cela on peut appliquer directement la loi des noeuds au moment du choix de ces inconnues.

Nous allons montrer dans l'application qui va suivre comment utiliser au mieux les lois de Kirchhoff.

Considérons le montage représenté fig. 10. On se propose de calculer l'intensité du courant qui traverse le moteur M.

On donne :

- pour P : $E = 50 \text{ V}$; $r = 2,5 \Omega$

- pour M : $E' = 2,5 \text{ V}$; $r' = 2,5 \Omega$

et $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \Omega$

$R_4 = 2,5 \Omega$

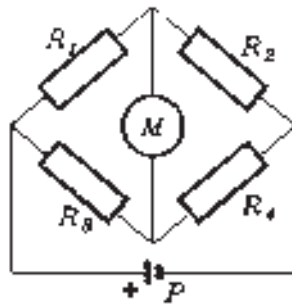


Figure 10

Etablissons le schéma équivalent et choisissons le sens des courants.

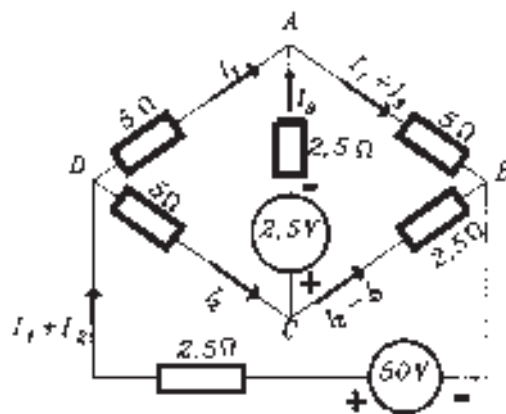


Figure 11

Déterminons les polarités de la f.c.e.m. en fonction de I_3 (fig. 11).

En appliquant directement la loi des noeuds, il ne reste à établir que trois équations relatives aux mailles :

1ère maille : A C D A

.....

.....

.....

2ème maille : A B C A

.....

.....

.....

3ème maille : A B 50 V D A

.....

.....

.....

Soit à résoudre le système suivant :

.....

.....

.....

Etant donné que nous avons déterminé les polarités de la f.c.e.m. du moteur en fonction de I_3 , la valeur trouvée étant

.....

2) Changeons le sens du courant I_3 et par suite les polarités de la f.c.e.m. du moteur (fig. 12).

On a :

1ère maille : A C D A

.....

.....

.....

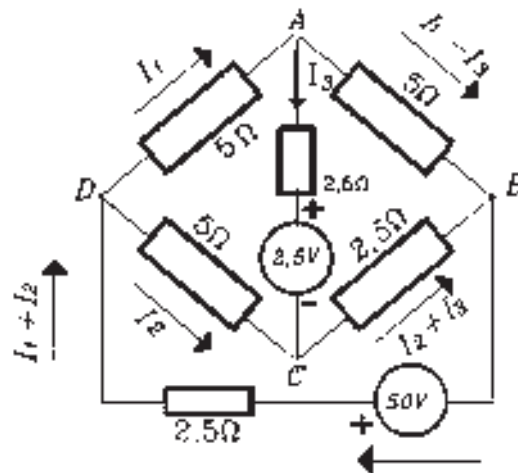


Figure 12

2ème maille : A B C A

.....

3ème maille : A B 50 V D A

.....

Il convient donc de résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues suivant :

.....

Le courant I_3 est affecté d'un signe

.....

d'où

$I_3 = \dots\dots\dots \text{ A}$

Note :

Un examen attentif du réseau permettrait de déceler d'emblée le sens du courant I_3 .

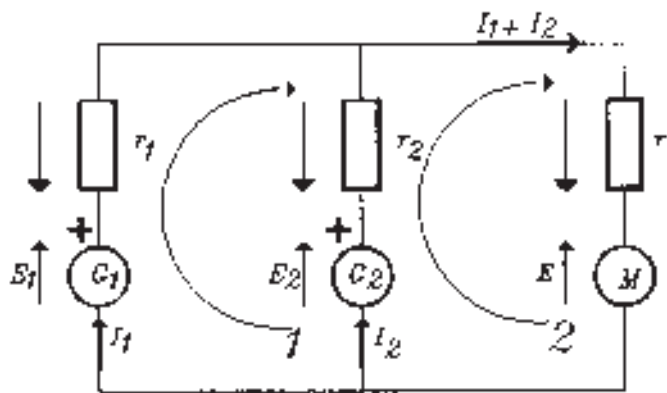
Cependant il est des réseaux où un tel raisonnement n'est pas applicable, il faut nécessairement recourir à la méthode que nous venons d'exposer.

2 SOLUTIONS DES EXERCICES

EXERCICE 1

Choisissons arbitrairement les courants I_1 et I_2 dans les branches qui comportent les génératrices G_1 et G_2 . Le courant dans le moteur vaut $(I_1 + I_2)$. Choisissons également des sens de parcours arbitraires dans les mailles 1 et 2.

Le schéma est le suivant :



Equations de mailles :

$$\text{Maille 1 : } E_1 - r_1 I_1 + r_2 I_2 - E_2 = 0$$

$$\text{Maille 2 : } E_2 - r_2 I_2 - r' (I_1 + I_2) - E' = 0$$

On obtient le système de 2 équations à 2 inconnues suivant :

$$r_1 I_1 - r_2 I_2 = E_1 - E_2$$

$$r' I_1 + I_2 (r_2 + r') = E_2 - E'$$

Remplaçons les lettres par leurs valeurs :

$$2I_1 - I_2 = 10$$

$$2I_1 + 3I_2 = 20$$

La résolution du système donne :

$$I_1 = \underline{6,25 \text{ A}}, I_2 = \underline{2,5 \text{ A}}$$

Le courant dans le moteur vaut :

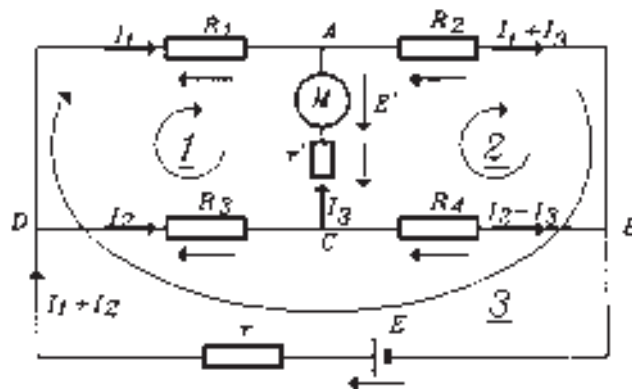
$$I_1 + I_2 = \underline{8,75 \text{ A}}$$

EXERCICE 2

Voici le schéma du montage comportant les sens arbitraires choisis pour les courants I_1 , I_2 , I_3 .

Le sens de la f.c.e.m. E' est imposé par le sens du courant I_3 . Le sens de la d.d.p. aux bornes de chaque résistance se déduit du sens adopté pour le courant qui la traverse.

Choisissons également le sens de parcours des mailles.



Equations des mailles :

$$\text{Maille 1 : } -R_1 I_1 + E' + r' I_3 + R_3 I_2 = 0$$

$$\text{Maille 2 : } r' I_3 - E' - R_2 (I_1 + I_3) + R_4 (I_2 - I_3) = 0$$

$$\text{Maille 3 : } -R_1 I_1 - R_2 (I_1 + I_3) + E - r (I_1 + I_2) = 0$$

Après simplification :

$$R_1 I_1 - R_3 I_2 - r' I_3 = E'$$

$$R_2 I_1 + R_4 I_2 - I_3 (r' + R_2 + R_4) = E_4$$

$$I_1 (R_1 + R_2 + r) + r I_2 + R_2 I_3 = E$$

Remplaçons les lettres par leurs valeurs numériques. On aboutit au système de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$5 I_1 - 5 I_2 - 2,5 I_3 = 2,5$$

$$-5 I_1 + 2,5 I_2 - 10 I_3 = 2,5$$

$$12,5 I_1 + 2,5 I_2 + 5 I_3 = 50$$

La résolution de ce système - par exemple par la méthode des déterminants - donne :

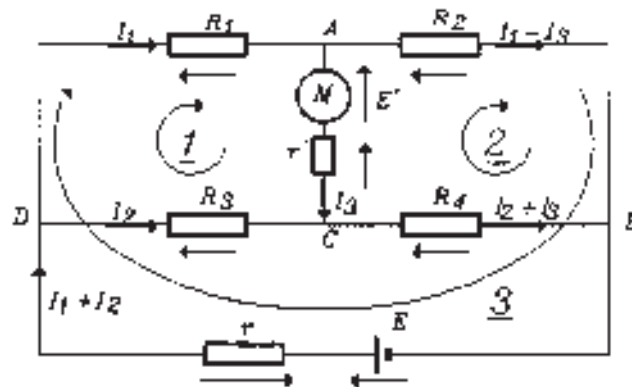
$$I_1 = 3,7 \text{ A}$$

$$I_2 = 3,78 \text{ A}$$

$$I_3 = 1,15 \text{ A}$$

Le courant I_3 est négatif. Il convient donc de changer son sens sans oublier de changer aussi le sens de la F.c.e.m. E' .

Voici le nouveau schéma obtenu (attention : en changeant le sens I_3 , on change aussi les courants dans R_2 et R_4).



Equations des mailles :

$$\text{Maille 1 : } -R_1 I_1 - E' - r' I_3 + R_3 I_2 = 0$$

$$\text{Maille 2 : } -R_2(I_1 + I_3) + R_4(I_2 - I_3) + r' I_3 + E' = 0$$

$$\text{Maille 3 : } -R_1 I_1 - R_2(I_1 + I_3) + E - r(I_1 + I_2) = 0$$

Après simplification :

$$-R_1 I_1 + R_3 I_2 - r' I_3 = E'$$

$$R_2 I_1 - R_4 I_2 - I_3 (r' + R_2 + R_4) = E_4$$

$$I_1 (R_1 + R_2 + r) + r I_2 - R_2 I_3 = E$$

Remplaçons les lettres par leurs valeurs numériques. On aboutit au système de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$-5 I_1 + 5 I_2 - 2,5 I_3 = 2,5$$

$$5 I_1 - 2,5 I_2 - 10 I_3 = 2,5$$

$$12,5 I_1 + 2,5 I_2 - 5 I_3 = 50$$

La résolution de ce système - par exemple par la méthode des déterminants - donne :

$$I_1 = 3,35 \text{ A}$$

$$I_2 = 4,06 \text{ A}$$

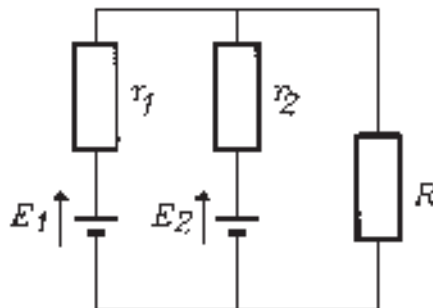
$$I_3 = 0,41 \text{ A}$$

Le courant I_3 est positif. Il représente donc le courant réel circulant dans le moteur.

DEVOIR

Exercice 1 :

Calculer l'intensité du courant dans chacune des 3 branches du circuit ci-dessous.



On donne :

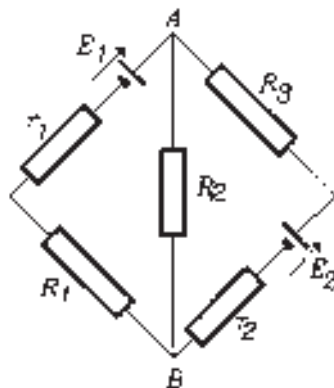
$$E_1 = 36 \text{ V}, r_1 = 2 \, \Omega$$

$$E_2 = 45 \text{ V}, r_2 = 3 \, \Omega$$

$$R = 6 \, \Omega$$

Exercice 2 :

Dans le montage ci-dessous, calculer la d.d.p. U_{AB} .



On donne :

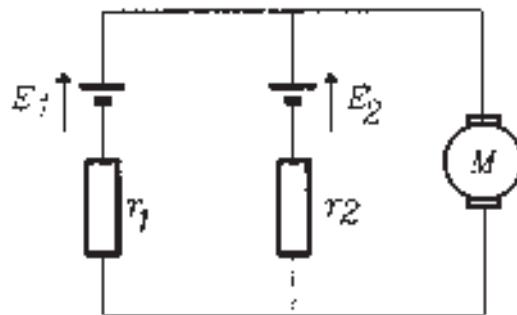
$$E_1 = 30 \text{ V}, r_1 = 2 \Omega$$

$$E_2 = 45 \text{ V}, r_2 = 2 \Omega$$

$$R_1 = 10 \Omega, R_2 = 4 \Omega, R_3 = 10 \Omega$$

Exercice 3 :

Calculer l'intensité du courant dans chacune des 3 branches du circuit ci-dessous.



On donne :

$$E_1 = 25 \text{ V}, r_1 = 2 \Omega$$

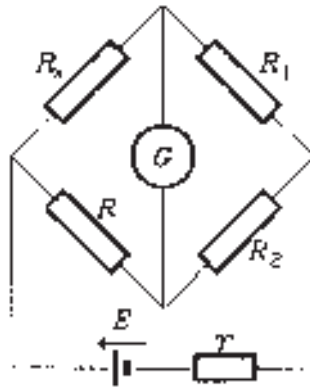
$$E_2 = 18 \text{ V}, r_2 = 5 \Omega$$

Moteur : F.c.e.m. $E' = 7 \text{ V}$

Résistance de l'induit : $r' = 2 \Omega$

Exercice 4 :

Le pont de Wheatstone représenté sur la figure ci-dessous est à l'équilibre pour $R = 500 \, \Omega$.



G est un galvanomètre qui indique 0 à l'équilibre du pont.

On donne :

$$E = 2 \, \text{V}, r = 0$$

$$R_1 = 100 \, \Omega, R_2 = 100 \, \Omega$$

G : résistance du galvanomètre : $1000 \, \Omega$

1- Calculer R_x .

2- On augmente R_x au millième de sa valeur. Quelle est la valeur de l'intensité du courant qui traverse le galvanomètre ?

Notes personnelles

Notes personnelles

Notes personnelles

