Spectre de réponse aux chocs

Équation de base : $m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$, avec x le déplacement de la masse et y le déplacement imposé de l'autre extrémité du ressort.

Écrite sous forme normalisée : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}(\dot{x} - \dot{y}) + \omega_0^2(x - y) = 0$

Le changement de variable $z = x - y$ donne : $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{y}$, ce qui permet d'avoir comme entrée l'accélération et non le déplacement.

Cas particulier sans amortissement : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{y}$

La donnée est $\ddot{y} = A\sin(\omega t)$ sur $t \in [0, T/2]$

On résout l'équation homogène : $z = B\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et on cherche une solution particulière $z = z_0 \sin(\omega t)$, reportée dans l'équation cela donne $z_0(-\omega^2 + \omega_0^2) = -A$

La solution générale est donc $z = B\cos(\omega_0 t + \varphi) + \dfrac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\sin(\omega t)$

La condition initiale $z(t = 0) = 0$ donne φ ce qui conduit à : $z = B\sin(\omega_0 t) + z_0 \sin(\omega t)$

La condition initiale $\dot{z}(t = 0) = 0$ donne $0 = \omega_0 B + \omega z_0$, soit $B = -\dfrac{\omega}{\omega_0} z_0 = -A\dfrac{\omega}{\omega_0}\dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$

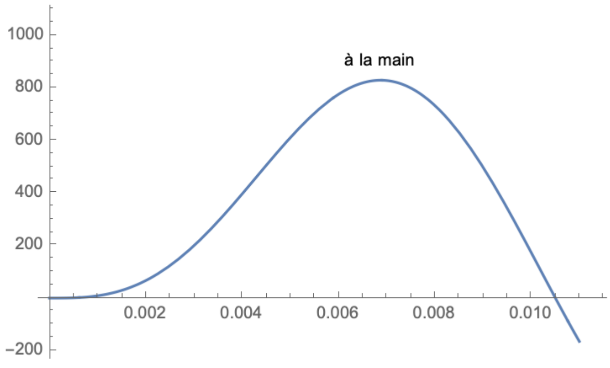
$$z(t) = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega t)\right)$$

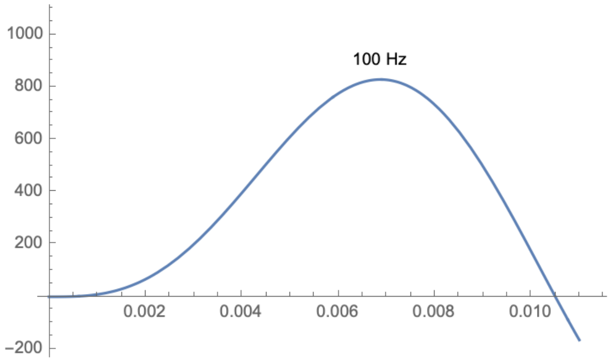
$$\ddot{z}(t) = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\omega\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega^2 \sin(\omega t)\right)$$

La réponse $\ddot{x}(t) = \ddot{y} + \ddot{z} = A\left(-\sin(\omega t) + \dfrac{\omega\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega^2 \sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$ soit

$$\ddot{x}(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(-\omega_0^2 \sin(\omega t) + \omega\omega_0 \sin(\omega_0 t)\right)$$

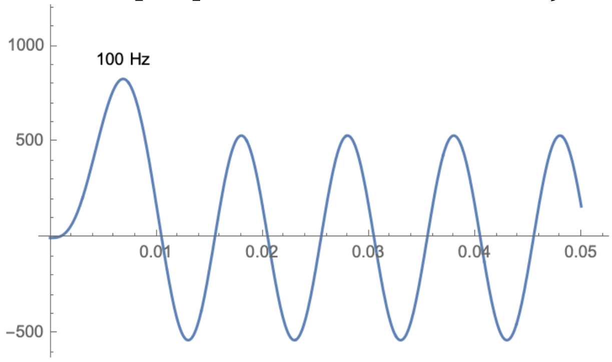
De tracé (à 100 Hz) :





cohérent avec Mathematica :

Pour $t > T/2$, on a uniquement $z = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et la continuité en $t = T/2$ de z et $\dot{z}$ donne C. Un peu pénible mais c'est faisable, je laisse faire Mathematica :



Source Mathematica :

```
T=2*0.011;Omega=2*Pi/T;Omega0=2*Pi*100;A=490;

ys[t_]=HeavisideTheta[t]*A*Sin[Omega*t]*(1-HeavisideTheta[t-T/2]);

sol=DSolve[{x''[t]+Omega0^2*x[t]==-ys[t],x[0]==0,x'[0]==0},x[t],t];

s[t_]=sol[[1]][[1]][[2]];

Plot[ys[t],{t,-0.01,0.06},PlotRange->All];

rep[t_]=D[s[t],{t,2}]+ys[t];

Plot[Labeled[rep[t],"100 Hz",Above],{t,0,0.05},PlotRange->All];

repth[t_,Omega0_]=A/(Omega^2-Omega0^2)*(Omega*Omega0*Sin[Omega0*t]-
Omega0^2*Sin[Omega*t]);

Plot[Labeled[repth[t,Omega0],'a la main',Above],{t,0,T/2},PlotRange->All];

Plot[Labeled[rep[t],"100 Hz",Above],{t,0,T/2},PlotRange->All];
```