Soient σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ les trois directions principales de $\underline{\underline{\sigma}}$, σ_1, σ_2, σ_3 les contraintes principales correspondantes et $\vec{n} = n_1\vec{v}_1 + n_2\vec{v}_2 + n_3\vec{v}_3$ un vecteur unitaire $\vec{n}^2 = 1$.

1. On suppose $n_1 = \cos\beta$, $n_2 = \sin\beta$ et $n_3 = 0$, montrer que les modules des contraintes normale σ et tangentielle τ dans la direction $\vec{n}$ sont données par :

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\beta \quad , \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\beta$$

Préciser le lieu géométrique des points (σ, τ).

2. On suppose que :

$$\sigma_{11} = -a + b\sin 2\alpha$$
$$\sigma_{22} = -a - b\sin 2\alpha$$
$$\sigma_{12} = -b\cos 2\alpha$$
$$\sigma_{33} = a \text{ et } \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

Déterminer les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3, ainsi que le cercle de Mohr correspondant (en exploitant la question ***1***, $\vec{n} = \cos\beta\vec{v}_1 + \sin\beta\vec{v}_2$).

3. Soit $\vec{p} = \cos\beta\vec{e}_1 + \sin\beta\vec{e}_2$ et $\vec{q} = -\sin\beta\vec{e}_1 + \cos\beta\vec{e}_2$, calculer les composantes σ'_{ij} du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{e}_3)$.

4. Calculer les modules des contraintes normale σ et tangentielle τ dans la direction $\vec{p}$ et en déduire le lieu géométrique des points (σ, τ).