
ANNEXES

ANNEXE A. LOIS ÉLÉMENTAIRES EN PHYSIQUE DES FLUIDES DANS UN TUBE OU UNE FRACTURE: LOI DE LAPLACE ET LOI DE POISEUILLE

A.1. LOI DE LAPLACE ET RÉPARTITION DE L'EAU ET DE L'AIR EN MILIEU NON SATURÉ

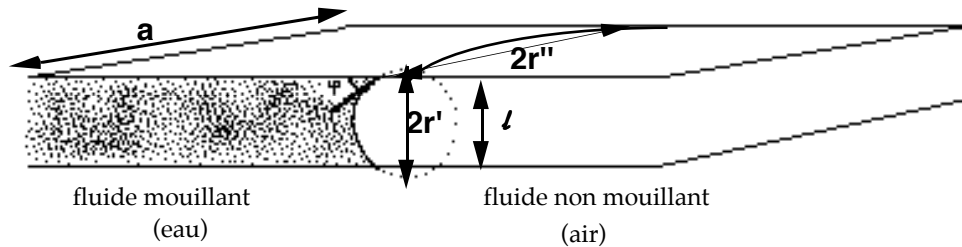
Lorsque deux fluides non miscibles sont en présence l'un de l'autre, leur interface est caractérisée par l'existence d'une tension interfaciale σ , une constante pour deux fluides donnée et une température donnée, qui induit une différence de pression h entre les deux phases.

La loi de Laplace donne la valeur de h en fonction du rayon de courbure moyen r de l'interface.

$$h = \frac{2\sigma}{r} \quad \text{où} \quad \frac{2}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}, \quad r' \text{ et } r'' \text{ rayons de courbures principaux.}$$

Par exemple, la différence de pression entre l'air et l'eau est ainsi nulle à la surface d'un plan d'eau de courbure infinie ...

A proximité d'une paroi solide, d'autres tensions interfaciales interviennent. L'interface se raccorde à la paroi en faisant un angle φ qui dépend des tensions fluide-fluide et fluides-paroi. Un des fluides a plus tendance que l'autre à longer la paroi, il est dit "mouillant" ($\varphi < 90^\circ$, $\cos\varphi > 0$, ici l'eau) et le deuxième "non mouillant" (ici l'air). A l'intérieur d'un pore de forme géométrique simple, on peut calculer r .



Différence de pression à l'interface: $h = \sigma(1/r' + 1/r'')$

Figure A.1. Loi de Laplace dans une fracture parallélépipédique d'épaisseur l et de profondeur a

Dans un tube cylindrique de rayon R , $r = R/\cos\varphi$ et $h_{\text{cap}} = \frac{2\sigma\cos\varphi}{R}$

Dans une fracture (Fig.A.1) d'ouverture l et de profondeur a , $r' = (l/2)/\cos\varphi$, $r'' = (a/2)/\cos\varphi$. Si $a \gg l$, on peut négliger le terme $\frac{1}{r''}$, d'où la forme simplifiée :

$$h_{\text{cap}} = \frac{2\sigma\cos\varphi}{l}$$

Cette différence de pression h_{cap} entre deux fluides en contact à l'intérieur d'un conduit est appelée pression capillaire.

En particulier, la loi de Laplace permet de calculer la hauteur d'eau z ascendante dans un conduit plongé dans une surface d'eau libre (remontée capillaire, Fig.A.2b), où les forces capillaires s'équilibrent avec les forces de pesanteur sur l'eau de masse volumique ρ , $h_{cap} = \rho g z$. (On parle aussi loi de Jurin dans ce cas, et pour des conduits cylindriques).

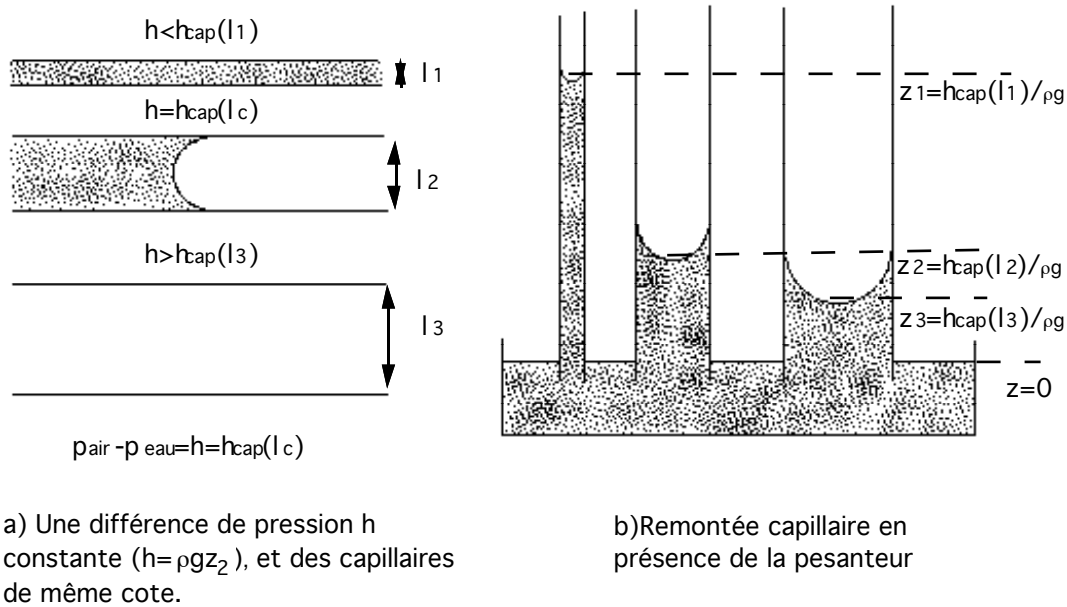


Figure A.2. Répartition de l'eau et de l'air dans des pores d'ouvertures variables en l'absence (a) ou présence (b) de forces gravitaires

Dans la zone non saturée du sol où air et eau coexistent, $h = \text{pression}(\text{air}) - \text{pression}(\text{eau})$ est une différence de pression positive. Si l'on suppose l'air à la pression atmosphérique, choisie comme référence nulle, la pression de l'eau proprement dite est négative, et l'on parle souvent de succion.

Pour une teneur en eau θ donnée dans un volume de sol de cote donnée, où l'on peut faire abstraction de la pesanteur, on suppose des phases eau et air continues, les pressions dans chaque phase s'égalisent, et on obtient un état d'équilibre caractérisé par une pression capillaire h unique. L'interface air-eau doit alors avoir un rayon de courbure unique correspondant à h . Dans un modèle de pores capillaires, i.e. une collection de pores d'ouverture l (rayon d'un tube cylindrique ou épaisseur d'une fracture), l'interface se situe au niveau de pores d'ouverture $l_c(h) = \frac{2\sigma \cos \varphi}{h}$ (Fig.A.2a). A chaque pore correspond une pression capillaire potentielle $h_{cap}(l) = \frac{2\sigma \cos \varphi}{l}$ d'autant plus élevée que le pore est fin. Pour un pore d'ouverture l plus grande que $l_c(h)$, $h = \text{pression}(\text{air}) - \text{pression}(\text{eau}) > h_{cap}(l)$, la pression de l'air est assez importante pour avoir déplacé l'interface dans ce pore qui est envahissable par l'air (de façon générale, par le

fluide non mouillant). Un pore d'ouverture plus petite que $l_c(h)$ est envahissable au contraire par l'eau (fluide mouillant).

A.2. LOI DE POISEUILLE : ÉCOULEMENT DANS UN CONDUIT SATURÉ D'EAU

Dans un conduit de forme géométrique simple et à bords parfaitement lisses, saturé d'un fluide incompressible de viscosité connue μ , on sait calculer le débit q du flux d'eau engendré par une différence de pression P_1-P_2 aux extrémités du conduit (cf. de Marsily 1986, intégration des équations de mouvement de fluides). En l'absence de forces extérieures telles que la gravité,

- la formule de Poiseuille, pour un tube cylindrique de rayon r et de longueur L donne:

$$q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}$$

- son analogue pour une fracture d'épaisseur l , de longueur L , et de largeur a est:

$$q = a l \frac{l^2}{12\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}$$

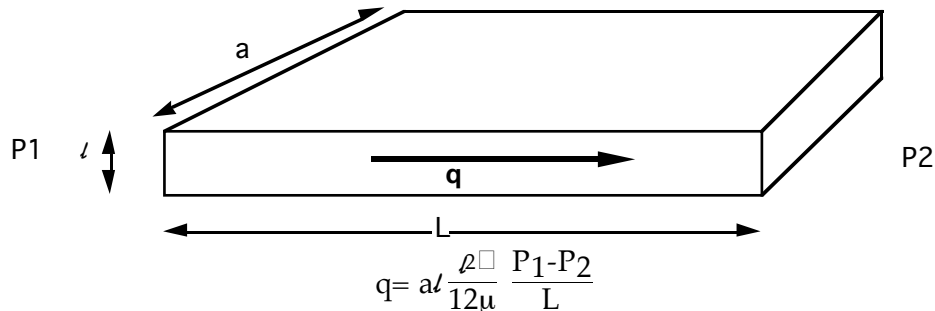


Figure A.3. Loi de Poiseuille dans une fracture. Expression du débit d'eau q traversant les faces (a, l)

La loi de Poiseuille est l'analogue en hydraulique de la loi d'Ohm en électricité. Le flux d'eau est proportionnel à la différence de potentiel de pression ΔP aux extrémités de la fracture comme l'intensité de courant i dans un élément conducteur d'électricité est proportionnelle à la différence de potentiel électrique ΔU ; le coefficient de proportionnalité étant dans le premier cas la conductance hydraulique K de la fracture ($q = K \Delta P$), dans le deuxième cas l'inverse de la résistance électrique R du conducteur ($i = \Delta U / R$). Se basant sur cette analogie, la conductivité hydraulique équivalente d'un réseau de pores tubulaires ou parallélépipédiques saturés d'eau est couramment calculée (Chap.3 et 7) comme l'inverse de la résistance équivalente entre les bornes d'un réseau de résistances électriques (réseau de Kirchhoff).