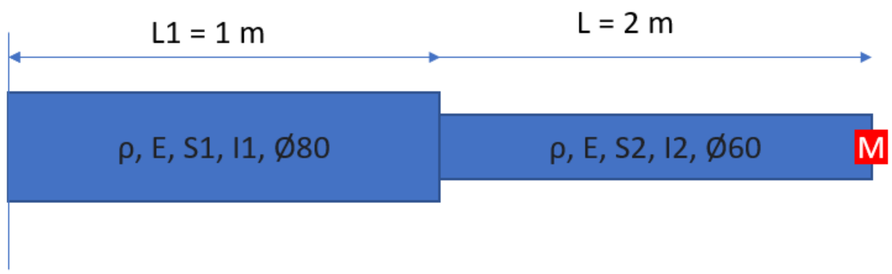

$$V_1 = \frac{L_1 x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{L_1^2 x^2}{4}$$
$$V_2 = \frac{L_2 x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{L_2^2 x^2}{4} + \left(\frac{L_2 L_1^2}{2} - \frac{L_1^3}{6} - \frac{L_2^2 L_1}{2}\right)\left(\frac{I_2 - I_1}{I_1}\right) x + \left(\frac{L_1^4}{8} + \frac{L_2^2 L_1^2}{4} - \frac{L_2 L_1^3}{3}\right)\left(\frac{I_2 - I_1}{I_1}\right)$$

Dans les deux cas, $V''(x=L) = 0$ et $V'''(x=L) = 0$, donc extrémité libre, ce qui est le cas ni de l'une ni de l'autre.

1 Un calcul . . .

Toutes les expressions sont à vérifier, tant d'un point de vue calcul que du point de vue équations physiques ...!

Équations : $V^{iv} = \dfrac{F}{EI} = \dfrac{-g\rho S}{EI} = -k$. I est proportionnelle à R^4 alors que S est proportionnelle à R^2, donc k proportionnelle à R^{-2} (la présence du diamètre semblant indiquer que les poutres sont cylindriques). $M(x) = EIV''(x)$ et $T(x) = EIV'''(x)$.

Solution : $V(x) = k\left(-\dfrac{x^4}{24} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)$

Soit 8 inconnues demandant 8 conditions aux limites (pour la poutre 2, origine des x à la jonction)

Encastrement .

Position $V_1(x=0) = D_1 = 0$

Pente $V_1'(x=0) = C_1 = 0$

Extrémité .

Moment nul $V_1''(x=L_2) = 0$ (1)

Masse ponctuelle $EI_2V'''(x=L_2) = -Mg$ (2)

Continuité à la jonction .

Position $V_1(x=L_1) = V_2(x=0)$ (3)

Pente $V_1'(x=L_1) = V_2'(x=0)$ (4)

Moment $EI_1V_1''(x=L_1) = EI_2V_2''(x=0)$ (5)

Effort $EI_1V_1'''(x=L_1) = EI_2V_2'''(x=0)$ (6)

Soit à l'aide des dérivées

- $V'(x) = k\left(-\frac{x^3}{6} + 3Ax^2 + 2Bx + C\right)$
- $V''(x) = k\left(-\frac{x^2}{2} + 6Ax + 2B\right)$
- $V'''(x) = k\,(-x + 6A) = M$

On obtient le système linéaire à résoudre :

- (1) $\frac{-L_2^2}{2} + 6A_2L_2 + 2B_2 = 0$
- (2) $\rho S_2\,(-L_2 + 6A_2) = M$
- (3) $\frac{S_1}{I_1}\left(-\frac{L_1^4}{24} + A_1L_1^3 + B_1x^2\right) = \frac{S_2}{I_2}D_2$
- (4) $\frac{S_1}{I_1}\left(-\frac{L_1^3}{6} + 3A_1L_1^2 + 2B_1L_1\right) = \frac{S_2}{I_2}C_2$
- (5) $S_1\left(\frac{-L_1^2}{2} + 6A_1L_1 + 2B_1\right) = 2S_2B_2$
- (6) $S_1\,(L_1 + 6A_1) = 6S_2A_2$

Il n'y a plus qu'à mettre cela dans Sympy ou Python simple pour des calculs numériques.

Mathematica me répond, avec $k_M = \frac{M}{\rho S_2}$:

- $A_1 = \frac{1}{6}(L_1 + L_2)$ (au lieu de $A_1 = \frac{L_1}{6}$)
- $B_1 = -\frac{1}{4}\left(2k_MR_2^2 + L_1^2 + 2L_1L_2 + L_2^2\right)$ (au lieu de $B_1 = \frac{L_1^2}{4}$)
- $C_1 = 0$, OK
- $D_1 = 0$, OK
- $A_2 = \frac{L_2}{6}$ OK
- $B_2 = -\frac{1}{4}(2k_MR_2^2 + L_2^2)$
- $C_2 = -\frac{6k_ML_1R_2^4 + 3L_1^2L_2R_2^2 + L_1^3R_2^2 + 3L_1L_2^2R_2^2}{6R_1^2}$
- $D_2 = -\frac{12k_ML_1^2R_2^4 + 6L_1^2L_2^2R_2^2 + 8L_1^3L_2R_2^2 + 3L_1^4R_2^2}{24R_1^2}$

Vérification avec $R_1 = R_2$, $M = 0$ et $L_1 = L_2 = L/2$

$$V_2(x) = \frac{L(x+L/2)^3}{6} - \frac{(x+L/2)^4}{24} - \frac{L^2(x+L/2)^2}{4} = -\frac{x^4}{24} + \frac{L}{12}x^3 - \frac{L^2}{16}x^2 - \frac{7L^3}{48}x - \frac{17L^4}{384}$$

- $A_1 = \dfrac{L}{6}$, OK
- $B_1 = -\dfrac{L^2}{4}$, OK
- $C_1 = 0$, OK
- $D_1 = 0$, OK
- $A_2 = \dfrac{L}{12}$, OK
- $B_2 = -\dfrac{L^2}{16}$, OK
- $C_2 = -\dfrac{7L^3}{48}$, OK
- $D_2 = -\dfrac{17L^4}{384}$, OK