bonjour
je voudrais simuler l'équation de Fermi-Pasta-Ulam.
on a une série 1D de N atomes (de masse unitaire) dont l'Hamiltonien s'écrit:

$$H=\Sigma_{i=0}^{N-1} p_i^2+\frac{K}{2}\Sigma_{i=0}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)^2+K\frac{\alpha}{3}\Sigma_{i=0}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)^3 \quad (1)$$

avec $\alpha \ll 1$

qu'on peut remettre sous la forme:

$$\ddot{u}_i=K(u_{i+1}-u_{i-1}-2u_i)+\alpha K((u_{i+1}-u_i)^2+(u_{i-1}-u_i)^2) \quad (2)$$

d'abord j'étudie les modes normaux, donc je reprend la formule (2) sans les termes non-linéaires:

$$\ddot{u}_i=K(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i) \quad (3)$$

je définis la TF

$$u_i \rightarrow U_\xi$$

avec

$$U_\xi=\frac{2}{N}\Sigma_{i=0}^{N-1} u_i e^{-j\frac{\pi}{N}\xi i}$$

que j'étend

$$U_\xi=\frac{2}{N}\Sigma_{-\infty}^{\infty} u_i e^{-j\frac{\pi}{N}\xi i}$$

ainsi

$$\ddot{u}_i \rightarrow \ddot{U}_\xi$$

$$u_{i+1} \rightarrow e^{j\frac{\pi}{N}\xi} U_\xi$$

$$u_{i-1} \rightarrow e^{-j\frac{\pi}{N}\xi} U_\xi$$

en injectant dans (3)

$$\ddot{U}_\xi=K(e^{j\frac{\pi}{N}\xi}+e^{-j\frac{\pi}{N}\xi}-2)U_\xi$$

$$\ddot{U}_\xi=2K(cos\left(\frac{\pi}{N}\xi\right)-1)U_\xi$$

$$\ddot{U}_\xi=-4K\,sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\xi\right)U_\xi$$

en posant

$$\omega_\xi^2 = 4\,K\,sin^2\left(\frac{\pi}{2\,N}\,\xi\right)$$

ainsi

$$\ddot{U}_\xi = -\omega_\xi^2 U_\xi$$

donc:

$$U_\xi = A\,e^{j\omega_\xi t} + B\,e^{-j\omega_\xi t}$$

en reprenant la TF

$$u_i = \Sigma_{i=0}^{\infty} U_\xi\, e^{j\frac{\pi}{N}\xi i}$$

et là je bloque