INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Interrogation surveillée de mécanique du point matériel.

UV P2
J. Yon & C. Keller

Durée 2h
Le 20/01/16

Seules la fiche sur les équations différentielles et la calculatrice non programmable sont autorisées. Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux forces de frottements (solides et visqueuses) subies par un cycliste lors de tours de piste sur un vélodrome. Pour cela, on considère un vélodrome circulaire plan d'un rayon R de 50 m situé au niveau de la mer (g=9,81 m/s²). La position du cycliste au cours du mouvement est repérée par les coordonnées polaires R et θ (figure ci-dessous). Le cycliste effectue 5 tours en pédalant à la vitesse constante de 50 km/h puis effectue un dernier tour en roue libre avant de freiner. Le frottement solide entre le pneu et la piste est assimilé à un frottement solide tangentiel (la composante radiale est négligée) entre la piste et le point matériel caractérisé par le coefficient de frottement f. Le coefficient de frottement fluide est noté λ. La masse m du cycliste (avec son vélo) est de 70 kg.

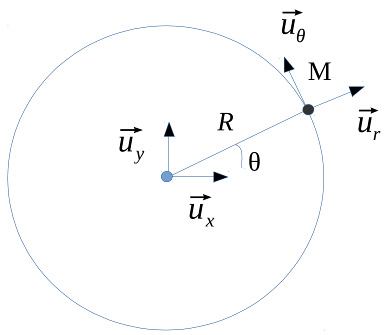

Figure 1 : Représentation schématique du vélodrome. Le cycliste est représenté par le point M

Partie I : Estimation des forces de frottements lors du tour en roue libre (pas de pédalage)

1. Faire le bilan des forces appliquées au cycliste assimilé à un point matériel lors du tour en roue libre. A l'aide d'un PFD, exprimer la force de frottement solide Fs en fonction de *f*, *m* et *g*. Vous exprimerez Fv, la force de frottement visqueuse, en fonction de λ, *R* et θ et de leurs dérivées temporelles.

$\vec{P} = -mg.\vec{u}_z$ 0,5 pt

$\vec{N} = mg.\vec{u}_z$ 0,5 pt

$\vec{Fs} = -fmg\,\vec{u}_\theta$ 1 pt

$\vec{Fv} = -\lambda\vec{V} = -\lambda R\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ 1 pt

2. A partir de l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires, exprimer la différentielle $\overrightarrow{dOM}$ du vecteur position dans le cas du mouvement considéré.

$$\frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \Rightarrow \overrightarrow{dOM} = Rd\theta\,\vec{u}_\theta$$ 2 pts

3. A l'aide de la question précédente, exprimer de façon analytique le travail de la force de frottement solide sur un tour de piste. Faire ensuite l'application numérique, on prendra *f*=0,002.

$$W(\vec{Fs})=\int \vec{Fs}.\overrightarrow{dOM}=-\int_{0}^{2PI} fmgRd\theta=-431{,}46\,J$$ 1+1 pts

4. Après 5 tours, la vitesse initiale au début du tour en roue libre est de 50km/h et le cycliste termine ce tour à la vitesse de 25 km/h. A l'aide d'un théorème énergétique, déterminer numériquement le travail des forces de frottement fluide au cours de ce dernier tour. Comparer le travail des deux forces de frottements.

TEC : $\Delta E_c=W(\vec{Fs})+W(\vec{Fv})\Rightarrow\frac{1}{2}m\left(V_f^2-V_i^2\right)=W(\vec{Fv})+W(\vec{Fs})$ $\quad W(\vec{Fv})=-4632{,}2\,J$ *1+1 pts*

5. Appliquer le PFD au cours de ce dernier tour en négligeant les frottements solides. En projetant le PFD sur le vecteur $\vec{u_\theta}$ (la projection sur $\vec{u_r}$ aboutit à une incohérence du fait des frottements solides négligés), déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de l'angle θ en fonction du temps.

$$\vec{Fv}+\vec{N}+\vec{P}=m.\vec{a}(M/R_0)$$ 1 pt

$$-\lambda R\dot{\theta}\vec{u_\theta}+N\vec{u_z}-mg\vec{u_z}=m\left(-R(\dot{\theta})^2\vec{u_r}+R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}\right)$$

projection sur le vecteur $\vec{u_\theta}$ *:*

$$-\lambda\dot{\theta}=m\ddot{\theta}$$ 1 pt

6. En résolvant cette équation différentielle, déterminer l'expression analytique de la vitesse angulaire puis du vecteur vitesse du cycliste.

La résolution de l'équation différentielle donne, en tenant compte des conditions initiales sur la vitessse :

$$\dot{\theta}=\frac{V_0}{R}\exp\left(\frac{-\lambda}{m}t\right)\Rightarrow\vec{V}=V_0\exp\left(\frac{-\lambda}{m}t\right)\vec{u_\theta}$$ 2 pts

7. Déduire de cette dernière expression l'expression intégrale du travail de la force de frottement fluide. A l'aide du résultat de la question 4, estimer le coefficient de frottement fluide λ. Le tour de piste en roue libre est parcouru en 40s.

$$W(\vec{Fv})=\int\vec{Fv}.\vec{V}\,dt=\int-\lambda R^2(\dot{\theta})^2dt=\int-\lambda R^2\frac{V_0^2}{R^2}\exp\left(-2\frac{\lambda}{m}t\right)dt=-\int_0^{40}\lambda V_0^2\exp\left(-2\frac{\lambda}{m}t\right)dt$$

$$W(\vec{Fv})=\frac{mV_0^2}{2}\left[\exp\left(-2\frac{\lambda}{m}t\right)\right]_0^{40}\Rightarrow\lambda=1{,}01\,kg/s$$ 3 pts

Partie II Calcul de la puissance développée par le cycliste lors des 5 tours de piste à vitesse constante effectués en pédalant. Le fait que le cycliste pédale est équivalent à l'ajout d'une force de traction, Fm, qui s'oppose aux forces de frottements.

8. A l'aide d'un théorème énergétique, donner l'expression analytique et le cas échéant numérique, de la puissance de cette force de traction en utilisant les résultats des questions précédentes.

TPC $\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{Fm}) + P(\vec{Fv}) + P(\vec{Fs}) = 0$ 1 pt

Il vient ainsi que :
$P(\vec{Fm}) = -P(\vec{Fv}) - P(\vec{Fs}) = fmgR\dot{\theta} + \lambda R^2(\dot{\theta})^2 = R\dot{\theta}(fmg + \lambda R\dot{\theta}) = 213{,}9\,W$ 1 + 1 pts

9. En déduire l'énergie totale fournie pour parcourir les 5 tours (R=50m).

Les 5 tours sont parcourus à la vitesse constante de 50 km/h. Il faut donc 113,10 s pour effectuer les cinq tours. L'énergie totale fournie est donc de 24,192 kJ. *1 pt*

10. (Question bonus) Sachant qu'une tartine de Nutella apporte environ 200kcal soit 836kJ, combien de tour doit-on réaliser pour avoir la conscience tranquille… +1 pt si réussi

Un tour permet de consommer 4838 J. Il faut donc 172 tours pour éliminer la tartine.