F_x est négatif. C'est-à-dire $F_x/|F| = -x/r$, ou $F_x = -|F|x/r = -GMmx/r^3$. Nous utilisons maintenant la loi de la dynamique pour trouver que cette composante de force est égale à la masse de la planète que multiplie la vitesse de changement de sa vitesse dans la direction x. Alors nous trouvons les lois suivantes:

$$m(dv_x/dt) = -GMmx/r^3,$$
$$m(dv_y/dt) = -GMmy/r^3, \quad (9.17)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ceci est alors l'ensemble des équations que nous devons résoudre. A nouveau, dans le but de simplifier le travail numérique, nous allons supposer que l'unité de temps, ou la masse du soleil, ont été ajustées (où la chance est avec nous) de telle sorte que $GM \equiv 1$. Pour notre exemple précis nous supposerons que la position initiale de la planète se trouve à $x = 0{,}500$ et $y = 0{,}000$, et que la vitesse est entièrement dans la direction y au départ, et a comme grandeur 1,6300. Comment faisons-nous le calcul? Nous réalisons à nouveau un tableau avec des colonnes pour le temps, la position x, la composante x de la vitesse v_x, et la composante x de l'accélération ax; ensuite nous séparons par une ligne double 3 colonnes pour la position, la vitesse et l'accélération dans la direction y. Afin d'obtenir l'accélération il nous faudra l'équation (9.17); elle nous dit que l'accélération dans la direction x est $-x/r^3$, et l'accélération dans la direction y est $-y/r^3$, et que r est la racine carrée de x^2+y^2. Ainsi, étant donné x et y, nous devons faire un peu de calcul à côté, prenant la racine carrée de la somme des carrés pour trouver r et ensuite, pour calculer l'accélération il est pratique d'évaluer $1/r^3$. Ce travail peut être fait assez facilement en utilisant des tables de carrés, de cubes et d'inverses: ensuite il nous faut simplement multiplier x par $1/r^3$, ce que nous faisons avec une règle à calcul.

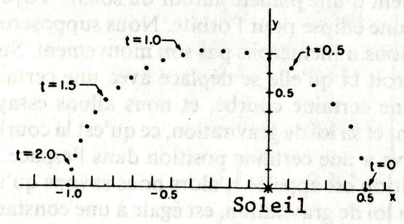

Fig. 9–6. Le mouvement calculé d'une planète autour du soleil.

Nos calculs continuent ensuite avec les étapes suivantes, utilisant les intervalles de temps $\varepsilon = 0{,}100$: Les valeurs initiales à $t = 0$:

$$x(0) = 0.500 \qquad y(0) = 0.000$$
$$v_x(0) = 0.000 \qquad v_y(0) = +1.630$$

De là nous trouvons:

$$r(0) = 0.500 \qquad 1/r^3(0) = 8.000$$
$$a_x = -4.000 \qquad a_y = 0.000$$

Alors nous pouvons calculer les vitesses $v_x(0.05)$ et $v_y(0.05)$:

$$v_x(0.05) = 0.000 - 4.000 \times 0.050 = -0.200;$$
$$v_y(0.05) = 1.630 + 0.000 \times 0.100 = 1.630.$$

Maintenant nos calculs importants commencent:

$$\begin{aligned}
x(0.1) &= 0.500 - 0.20 \times 0.1 &&= 0.480\\
y(0.1) &= 0.0 + 1.63 \times 0.1 &&= 0.163\\
r &= \sqrt{0.480^2 + 0.163^2} &&= 0.507\\
1/r^3 &= 7.67 &&\\
a_x(0.1) &= 0.480 \times 7.67 &&= -3.68\\
a_y(0.1) &= -0.163 \times 7.70 &&= -1.256\\
v_x(0.15) &= -0.200 - 3.68 \times 0.1 &&= -0.568\\
v_y(0.15) &= 1.630 - 1.26 \times 0.1 &&= 1.505\\
x(0.2) &= 0.480 - 0.568 \times 0.1 &&= 0.423\\
y(0.2) &= 0.163 + 1.50 \times 0.1 &&= 0.313\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

De cette manière nous obtenons les valeurs données au Tableau 9-2, et en 20 étapes ou à peu près, nous avons suivi la planète jusqu'à mi-course autour du soleil! A la Fig. 9-6 sont reportées les coordonnées x et y données au Tableau 9-2. Les points représentent les positions aux différents intervalles de temps séparés d'un dixième d'unité; nous voyons qu'au départ la planète se déplace rapidement et qu'à la fin elle se déplace lentement, et ainsi la forme de courbe est déterminée. Ainsi nous voyons que nous *savons réellement* calculer le mouvement des planètes!

Voyons maintenant comment nous pouvons calculer les mouvements de Neptune, Jupiter et Uranus, ou de n'importe quelle planète. Si nous avons un grand nombre de planètes, et laissons le soleil se déplacer également, pouvons-nous faire la même chose? Bien sûr nous pouvons. Nous calculons la force sur une planète particulière, disons la planète i, qui a une position x_i, y_i, z_i ($i = 1$ peut représenter le soleil, $i = 2$ Mercure, $i = 3$ Vénus, etc). Nous devons connaître les positions de toutes les planètes. La force agissant sur l'une d'entre elles est due à tous les autres corps qui sont situés, disons, aux positions x_j, y_j, z_j. De ce fait les équations sont

$$m_i \frac{dv_{ix}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} - \frac{Gm_im_j(x_i - x_j)}{r_{ij}^3},$$

$$m_i \frac{dv_{iy}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} - \frac{Gm_im_j(y_i - y_j)}{r_{ij}^3}, \quad (9.18)$$

$$m_i \frac{dv_{iz}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} - \frac{Gm_im_j(z_i - z_j)}{r_{ij}^3}.$$