

Exercice 9 :

Pour déplacer suivant un axe (O, \vec{x}) un meuble en bois (3) de masse M , de centre de gravité G , sur un sol en béton (0) on intercale entre le meuble et le sol deux barres cylindriques de révolution (1) et (2) identiques, en acier, homogènes, de rayon r , de masse m , d'axe parallèle à (O, \vec{x}) (figure 7).

Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au sol. Soit $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

On suppose que les coefficients de frottement aux différents points de contact sont identiques, ainsi que les paramètres de résistance au roulement. Notons alors :

f : les coefficients de frottement

η : les paramètres de résistance au roulement.

Le but de l'étude est la détermination :

— de la force horizontale nécessaire au déplacement du meuble,

— de la position que doit avoir le meuble par rapport aux barres cylindriques, pour qu'il soit en contact et roule sans glisser sur celles-ci.

Définissons aux différents points de contact les torseurs d'action mécanique du sol et du meuble sur les barres :

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} \\ \vec{M}_1 = M_1\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{T}(0 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}_2 = X_2\vec{x} + Y_2\vec{y} \\ \vec{M}_2 = M_2\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} \\ \vec{M}_1 = M_1\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{T}(3 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}_2 = X_2\vec{x} + Y_2\vec{y} \\ \vec{M}_2 = M_2\vec{z} \end{cases}$$

On déplace le meuble à une vitesse de translation constante $V\vec{x}$ ($V > 0$) en exerçant sur ce meuble une action mécanique représentée par la force (P, \vec{F}) telle que :

$$\vec{F} = F\vec{x} \quad \text{avec } F > 0$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{y} = 2r + h \quad (h : \text{constante positive}).$$

Au cours de ce mouvement on suppose que les barres roulent sans glisser sur le sol et sur le meuble.

Dans un tel mouvement uniforme, on montre en dynamique (chapitre 2) que le principe fondamental de la statique est applicable à tout sous-ensemble matériel de l'ensemble matériel constitué par (1), (2) et (3).

Soit l la distance entre les axes des barres (1) et (2). Cette distance reste constante au cours du mouvement.

Soit x l'abscisse sur l'axe (O, \vec{x}) du centre de gravité G par rapport au centre C_1 de la barre (1). On suppose que $0 < x < l$.

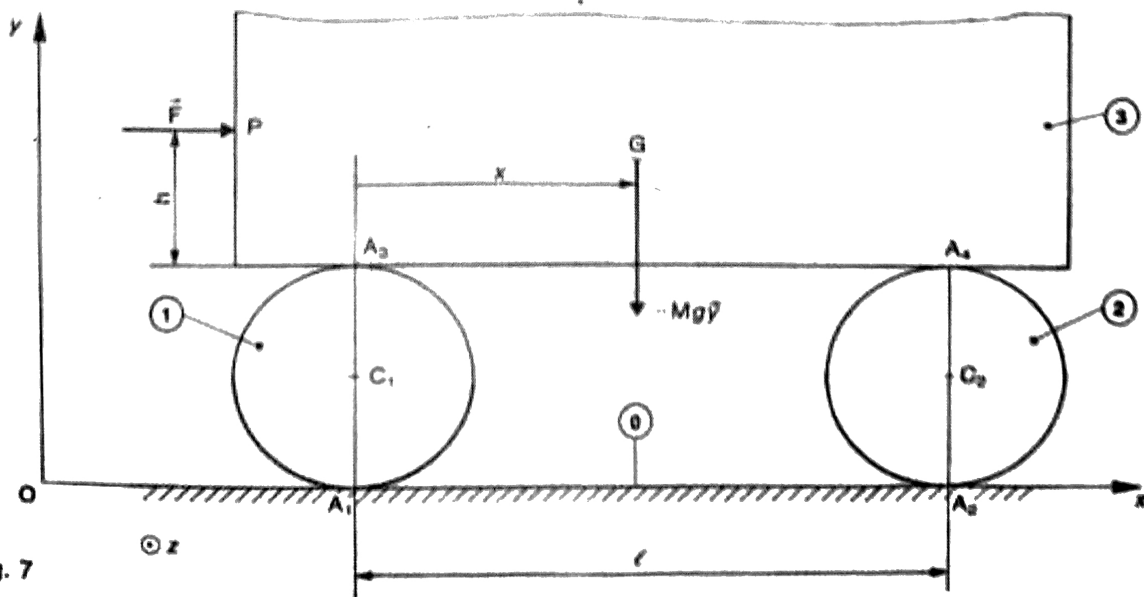


Fig. 7

Questions :

1. Ecrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à la barre (1).
2. Ecrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à la barre (2).
3. Ecrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué au meuble (3)
4. Déterminer les vecteurs rotation $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{1/3}$ en fonction de V et r .
5. Sachant qu'aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 il y a roulement sans glissement entre les solides en contact, en utilisant les différentes conditions pour un contact ponctuel avec un vecteur vitesse de glissement ($T < f \cdot N$) et vecteur vitesse rotation de roulement ($M_t = \eta \cdot N$), pour déterminer les relations que vérifient :
 - a. X_1, Y_1 et M_1
 - b. X_2, Y_2 et M_2
 - c. X_3, Y_3 et M_3
 - d. X_4, Y_4 et M_4
6. Déterminer la force et \overrightarrow{F} qui engendre le mouvement du meuble. Faire l'application numérique pour :
 - $M = 200 \text{ kg}$
 - $M = 12 \text{ kg}$
 - $r = 3 \text{ cm}$
 - $\eta = 0.4 \text{ cm}$
 - $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
7. Déterminer les composantes des résultantes générales des torseurs d'actions mécanique de contact : $X_1, Y_1, X_2, \dots, Y_4$.
8. Quelle est la valeur maximale que peut prendre x pour que le meuble soit toujours en contact avec la barre (1), sachant que $h = 1 \text{ m}$ et $l = 1.5 \text{ m}$?
9. Lorsque le meuble est en contact avec les deux barres et que le coefficient de frottement est $f = 0.5$, déterminer entre quelles valeurs peut varier x pour que l'hypothèse de roulement sans glissement des barres sur le sol et sur le meuble soit vérifiée.