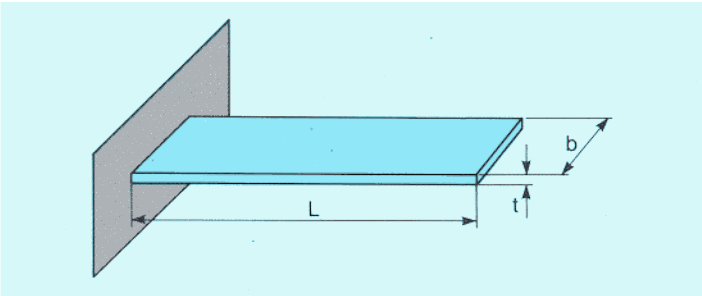
Ci-après sont données des formules de calcul des cas élémentaires de charge pour ressorts droits et des plaques circulaires. La section traite également des cas élémentaires de flexion de ressorts à courbure simple. Toutes les formules sont applicables pour une déformation élastique modérée.

Ressort droit, immobilisé à l'une des extrémités

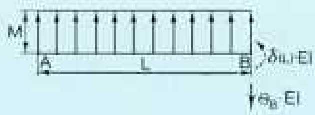
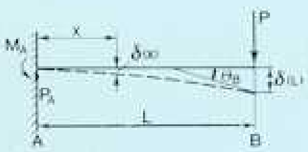
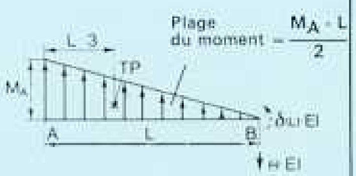
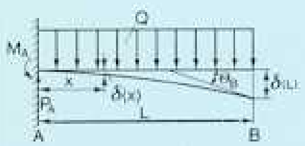
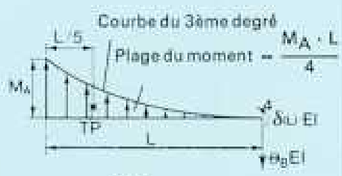


Contrainte maxi de flexion dans le ressort

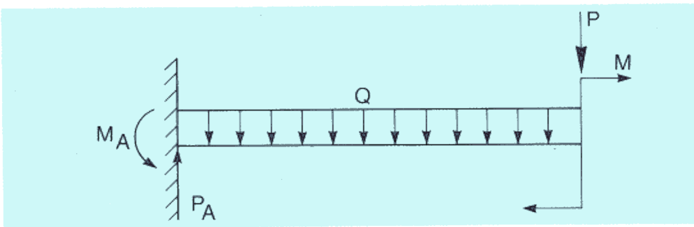
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$$

Symboles, voir page 20.

Tableau 9

	Type de charge	Diagramme de moment	Changements d'angles	Déflexion
a	 $M_A = M$	 $M_{max} = M$	$\Theta_A = 0$ $\Theta_B = \frac{ML}{EI}$	$\delta(x) = \frac{Mx^2}{2EI}$ $\delta(L) = \frac{ML^2}{2EI}$
b	 $P_A = P;\ M_A = PL$	 $M_{max} = PL$	$\Theta_A = 0$ $\Theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$	$\delta(x) = \frac{PL^3}{2EI}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{L^3}\right)$ $\delta(L) = \frac{PL^3}{3EI}$
c	 $P_A = Q;\ M_A = \frac{QL}{2}$	 $M_{max} = \frac{QL}{2}$	$\Theta_A = 0$ $\Theta_B = \frac{QL^2}{6EI}$	$\delta(x) = \frac{QL^3}{24EI}\left(6\frac{x^2}{L^2} - 4\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right)$ $\delta(L) = \frac{QL^3}{8EI}$
d	 $P_A = Q;\ M_A = \frac{QL}{3}$	 $M_{max} = \frac{QL}{3}$	$\Theta_A = 0$ $\Theta_B = \frac{QL^2}{12EI}$	$\delta(x) = \frac{PL^3}{12EI}\left(\frac{4}{5} - \frac{x}{L} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{L^5}\right)$ $\delta(L) = \frac{QL^3}{15EI}$

Les cas élémentaires peuvent être additionés, par example



$$M_{max} = M + PL + \frac{QL}{2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\left(M + PL + \frac{Q \cdot L}{2}\right) 6}{b \cdot t^2}$$

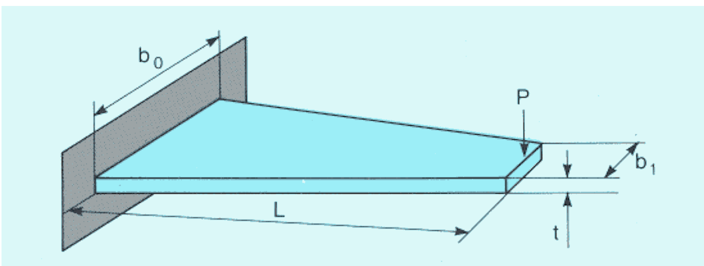
$$\delta(L) = \frac{ML^2}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{QL^3}{8EI}$$

$$\delta(x) = \frac{Mx^2}{2EI} + \frac{PL^3}{2EI}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{L^3}\right) + \frac{QL^3}{24EI}\left(6\frac{x^2}{L^2} - 4\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right)$$

Symboles utilisés

P = force
q = charge par unité de surface (unité de longneur)
Q = charge totale
M = couple de flexion
σ = contrainte. La contrainte de flexion permise pour une matière est d'environ 25—30 % plus élevée que sa contrainte de traction permise.
σ_r = contrainte radiale
σ_t = contrainte tangentielle
E = module d'élasticité
W = résistance de flexion pour section rectangulaire $\left(= \frac{b \cdot t^2}{6}\right)$
I = couple d'inertie pour section rectangulaire $\left(= \frac{b \cdot t^3}{12}\right)$
J = couple d'inertie, ressort à courbure simple
b = largeur du ressort
t = épaisseur du ressort
L = longueur développée du ressort
r = rayon
a = rayon de la plaque
A = surface transversale
φ = angle
Θ = changement d'angle (en radians)
δ = déflexion
$\delta(x)$ = déflexion, distance x ou x_1
$\delta(L)$ = déflexion maxi (tableau 9)
$\delta(L/2)$ = déflexion maxi (tableau 10)
$\delta(r)$ = déflexion avec le rayon r
k'' = voir fig. 27
ν = indice de Poisson (pour l'acier = env. 0,3)
m $= \frac{1}{\nu}$
ln = logarithme naturel ($\ln x = 2{,}3026 \cdot \log x$)
η = écartement maxi de l'axe neutre à "la fibre extrême"
$\varkappa$ $= \frac{J}{A \cdot r^2}$
TP = centre de gravité

Ressort trapézoïdal, immobilisé à l'une des extrémites



Contrainte maxi de flexion dans le ressort

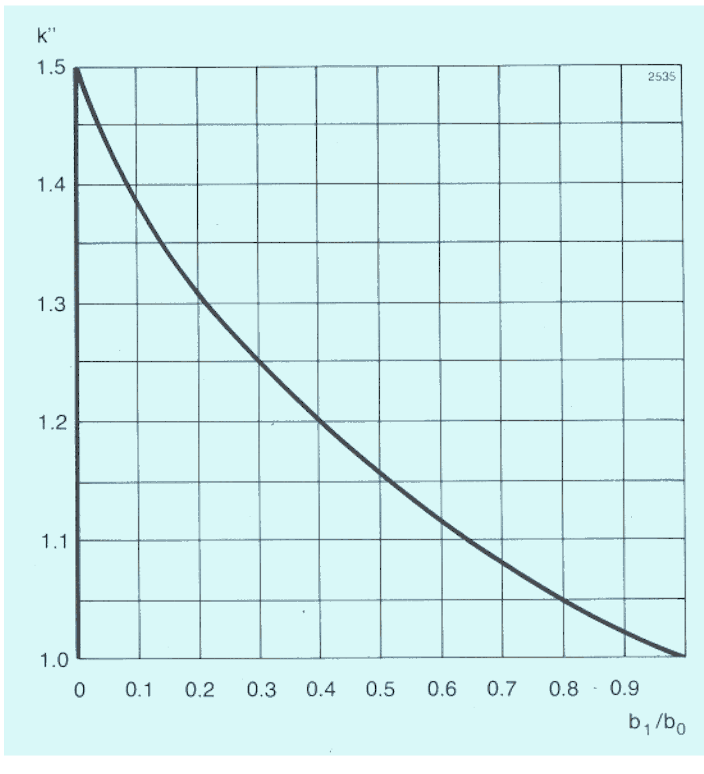
$$\sigma_{max} = \frac{P \cdot 6 \cdot L}{b_0 \cdot t^2}$$

Déflexion du ressort à l'extrémité libre

$$\delta(L) = \frac{k''}{3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I} = \frac{4 \cdot k''}{b_0 \cdot t^3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E} = \frac{2k''}{3} \cdot \frac{L^2}{t} \cdot \frac{\sigma_{max}}{E}$$

La valeur du coefficient k'' dépend du rapport b_1/b_0 et varie selon la courbe de la fig. 27.

Fig. 27. Le coefficient k" pour un ressort trapézoïdal

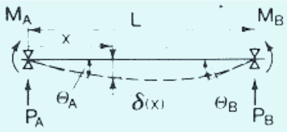
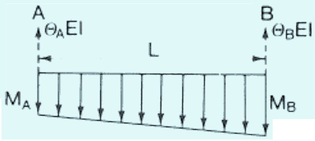
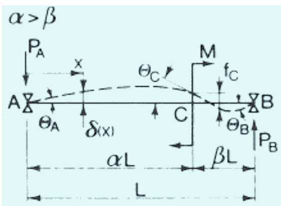
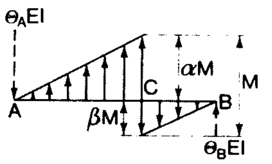
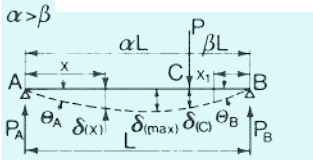
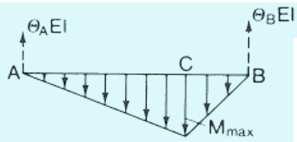
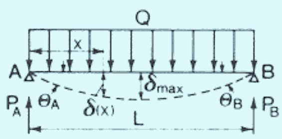
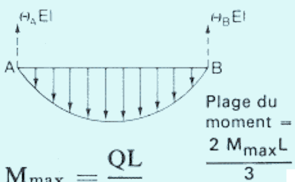
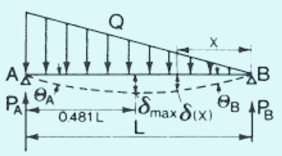
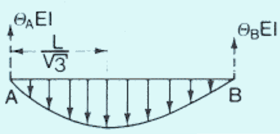


Ressort droit reposant librement sur deux appuis

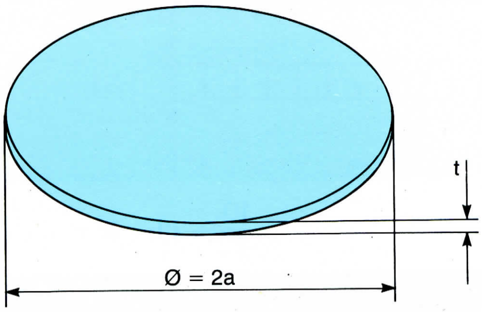
Contrainte de flexion maxi du ressort

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$$

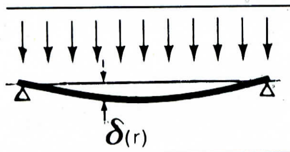
Tableau 10

	Type de charge	Diagramme de moment	Changements d'angles	Déflexion
	 $P_A = -P_B = \frac{M_B - M_A}{L}$	 M_{max} M_B ou M_A	$\Theta_A = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI}$ Θ_B $\frac{M_B L}{3EI} + \frac{}{6EI}$	$\delta(x$ $\frac{x(L-x)}{6LEI}\left[M_A(2L- \quad) + M_B(L \quad x)\right]$
	M_A M_B M	M_{max} M	Θ_A Θ_B $\frac{ML}{2EI}$	$\delta(x)$ $\frac{M}{EI} \cdot \frac{x(L-x)}{2}$ $\delta(L/2) = \frac{ML^2}{8EI}$
b	 $P_A = P_B = \frac{M}{L}$	 M_{max} αM ou βM	Θ_A $\frac{3\beta^2}{6}$ $\frac{ML}{EI}$ Θ_B $\frac{3\alpha^2}{6} \cdot \frac{ML}{EI}$ Θ_C $\frac{3\alpha\beta}{3}$ $\frac{ML}{EI}$	$\delta(x)$ $\frac{MLx}{6EI}\left(1 - 3\beta^2 \quad \frac{x^2}{L^2}\right)$ pour x $\delta(x)$ $\frac{ML(L-x)}{6EI}\left[\left(\frac{L}{} \frac{x}{L}\right) \quad 3\alpha^2 - 1\right]$ pour $x > \alpha L$ δ_C $\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{3}$ $\frac{ML^2}{EI}$
	$\beta = 0; \alpha$	M_{max} M	Θ_A $\frac{ML}{6EI}$; Θ_C	$\delta(x) = \frac{MLx}{6EI}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$; $\delta_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{ML^2}{EI}$
c	 $P_A = \beta P$; $P_B = \alpha P$	 $M_{max} = \alpha\beta PL$	$\Theta_A = \frac{\alpha\beta(1 \quad)}{6} \cdot \frac{}{EI}$ Θ_B $\frac{\alpha\beta(1+\alpha)}{6} \cdot \frac{PL^2}{EI}$	$\delta(x) = \frac{PL^3}{EI} \cdot \frac{\alpha^2\beta^2}{6}\left[\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\frac{x}{L} - \frac{1}{\alpha^2\beta}\frac{x^3}{L^3}\right]$ pour $x < \alpha L$ $\delta(x_1) = \frac{PL^3}{EI} \cdot \frac{\alpha^2\beta^2}{6}\left[\left(\frac{2}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)\frac{x_1}{L} - \frac{1}{\beta^2\alpha}\frac{x_1^3}{L^3}\right]$ pour $x > \alpha L$ δ_C $\frac{\alpha^2\beta^2}{3}$ $\frac{PL^3}{EI}$ δ_{max} $\frac{\beta\alpha^3/_2}{3}\left(\frac{2\beta+\alpha}{3}\right)^{3/2}\frac{PL^3}{EI}$
	$\alpha = \beta$; $P_A = P_B = \frac{P}{2}$	$M_{max} = \frac{PL}{4}$	Θ_A Θ_B $\frac{PL^2}{16EI}$	$\delta(x) = \frac{PL^3}{16EI}\left(\frac{x}{L} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{L^3}\right)$ pour x $\frac{L}{2}$; $\delta(L/2) = \frac{PL^3}{48EI}$
d	 $P_A = P_B = \frac{Q}{2}$	 $M_{max} = \frac{QL}{8}$	$\Theta_A = \Theta_B = \frac{QL^2}{24EI}$	$\delta(x) = \frac{PL^3}{24EI}\left(\frac{x}{L} \quad 2\frac{x^3}{L^3} \quad \frac{x^4}{L^4}\right)$ $\delta(L/2) = \frac{5QL^3}{384EI}$
e	 $P_A = \frac{2Q}{3}$; $P_B = \frac{Q}{3}$	 $M_{max} = 0{,}128\ QL$	$\Theta_A = \frac{8QL^2}{180EI}$ $\Theta_B = \frac{7QL^2}{180EI}$	$\delta(x) = \frac{PL^3}{180EI}\left(7\frac{x}{L} - 10\frac{x^3}{L^3} + 3\frac{x^5}{L^5}\right)$ $\delta_{max} = 0{,}01304\frac{QL^3}{EI}$

Plaque circulaire, reposant librement à la périphérie extérieure sur un appui circulaire



Charge uniforme sur l'ensemble de la surface



$Q = q\pi a^2$

A une distance r du centre:

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{8\pi m t^2}\left[(3m+1)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{8\pi m t^2}\left[(3m+1)-(m+3)\frac{r^2}{a^2}\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{8\pi E m^2 t^3}\left[\frac{(5m+1)a^2}{2(m+1)}+\frac{r^4}{2a^2}-\frac{(3m+1)r^2}{m+1}\right]$$

Au milieu:

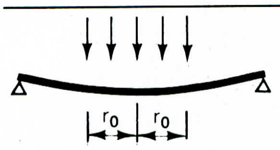
$$\sigma_{r(max)} = \sigma_{t(max)} = -\frac{3Q}{8\pi m t^2}(3m+1)$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m-1)(5m+1)a^2}{16\pi E m^2 t^3}$$

Au bord:

$$\Theta = \frac{3Q(m-1)a}{2\pi E m t^3}$$

Charge uniforme sur une partie concentrique et circulaire de la surface avec le rayon r_0



$Q = q\pi r_0^2$

A une distance r du centre:

$r < r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[m+(m+1)\ln\frac{a}{r_0}-(m-1)\frac{r_0^2}{4a^2}-\right.$$
$$\left.-(3m+1)\frac{r^2}{4r_0^2}\right]$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[m+(m+1)\ln\frac{a}{r_0}-(m-1)\frac{r_0^2}{4a^2}-\right.$$
$$\left.-(m+3)\frac{r^2}{4r_0^2}\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3}\left[4a^2-5r_0^2+\frac{r^4}{r_0^2}-(8r^2+4r_0^2)\log\frac{a}{r_0}-\right.$$
$$\left.-\frac{2(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{(m+1)a^2}+\frac{8m(a^2-r^2)}{m+1}\right]$$

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m+1)\ln\frac{a}{r}-(m-1)\frac{r_0^2}{4a^2}+(m-1)\frac{r_0^2}{4r^2}\right]$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m-1)+(m+1)\ln\frac{a}{r}-(m-1)\frac{r_0^2}{4a^2}-\right.$$
$$\left.-(m-1)\frac{r_0^2}{4r^2}\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3}\left[\frac{(12m+4)(a^2-r^2)}{m+1}-\right.$$
$$\left.-\frac{2(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{(m+1)a^2}-(8r^2+4r_0^2)\ln\frac{a}{r}\right]$$

Au milieu:

$$\sigma_{r(max)} = \sigma_{t(max)} = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[m+(m+1)\ln\frac{a}{r_0}-(m-1)\frac{r_0^2}{4a^2}\right]$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3}\left[\frac{(12m+4)a^2}{m+1}-4r_0^2\ln\frac{a}{r_0}-\frac{(7m+3)r_0^2}{m+1}\right]$$

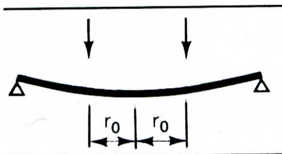
Pour r_0 très petit (charge concentrée):

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m-1)(3m+1)a^2}{4\pi E m^2 t^3}$$

Au bord:

$$\Theta = \frac{3Q(m-1)a}{\pi E m t^3}$$

Charge uniforme sur un anneau concentrique, circulaire et de rayon r_0



A une distance r du centre:

$r < r_0$

$$\sigma_{r(max)} = \sigma_{t(max)} = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[\frac{1}{2}(m-1)+(m+1)\ln\frac{a}{r_0}-\right.$$
$$\left.-(m-1)\frac{r_0^2}{2a^2}\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3}\left[\frac{(3m+1)(a^2-r^2)}{2(m+1)}-(r^2+r_0^2)\ln\frac{a}{r_0}+\right.$$
$$\left.+(r^2-r_0^2)-\frac{(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{2(m+1)a^2}\right]$$

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m+1)\ln\frac{a}{r}+(m-1)\frac{r_0^2}{2r^2}-(m-1)\frac{r_0^2}{2a^2}\right]$$

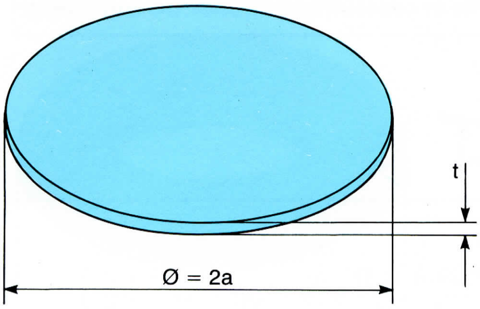
$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m-1)+(m+1)\ln\frac{a}{r}-(m-1)\frac{r_0^2}{2r^2}-\right.$$
$$\left.-(m-1)\frac{r_0^2}{2a^2}\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3}\left[\frac{(3m+1)(a^2-r^2)}{2(m+1)}-(r^2+r_0^2)\ln\frac{a}{r}-\right.$$
$$\left.-\frac{(m-1)r_0^2(a^2-r^2)}{2(m+1)a^2}\right]$$

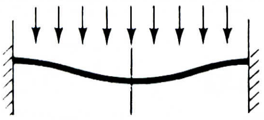
Au milieu:

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3}\left[\frac{(3m+1)a^2-(m-1)r_0^2}{2(m+1)}-\right.$$
$$\left.-r_0^2\left(\ln\frac{a}{r_0}+1\right)\right]$$

Plaque circulaire, immobilisée à la périphérie extérieure



Charge uniforme sur l'ensemble de la surface



$$Q = q\pi a^2$$

A une distance r du centre:

$$\sigma_r = \frac{3Q}{8\pi m t^2}\left[(3m+1)\frac{r^2}{a^2} - (m+1)\right]$$

$$\sigma_t = \frac{3Q}{8\pi m t^2}\left[(m+3)\frac{r^2}{a^2} - (m+1)\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3}\left[\frac{(a^2-r^2)^2}{a^2}\right]$$

Au milieu:

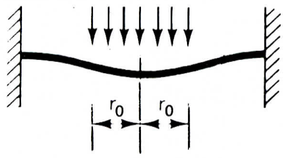
$$\sigma_r = \sigma_t = -\frac{3Q(m+1)}{8\pi m t^2}$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)a^2}{16\pi E m^2 t^3}$$

Au bord:

$$\sigma_{r(max)} = \frac{3Q}{4\pi t^2} \qquad \sigma_{t(max)} = \frac{3Q}{4\pi m t^2}$$

Charge uniforme sur une partie concentrique et circulaire de la surface avec le rayon r_0



$$Q = q\pi r_0^2$$

A une distance r du centre:

$r < r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m+1)\ln\frac{a}{r_0} + (m+1)\frac{r_0^2}{4a^2} - (3m+1)\frac{r^2}{4r_0^2}\right]$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m+1)\ln\frac{a}{r_0} + (m+1)\frac{r_0^2}{4a^2} - (m+3)\frac{r^2}{4r_0^2}\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3}\left[4a^2 - (8r^2+4r_0^2)\ln\frac{a}{r_0} - \frac{2r^2r_0^2}{a^2} + \frac{r^4}{r_0^2} - 3r_0^2\right]$$

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m+1)\ln\frac{a}{r} + (m+1)\frac{r_0^2}{4a^2} + (m-1)\frac{r_0^2}{4r^2} - m\right]$$

$$\sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m+1)\ln\frac{a}{r} + (m+1)\frac{r_0^2}{4a^2} - (m-1)\frac{r_0^2}{4r^2} - 1\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3}\left[4a^2 - (8r^2+4r_0^2)\ln\frac{a}{r} - \frac{2r^2r_0^2}{a^2} - 4r^2 + 2r_0^2\right]$$

Au milieu:

$$\sigma_r = \sigma_t = -\frac{3Q}{2\pi m t^2}\left[(m+1)\ln\frac{a}{r_0} + (m+1)\frac{r_0^2}{4a^2}\right] = \max \sigma_r \text{ pour } r_0 < 0{,}588a$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{16\pi E m^2 t^3}\left[4a^2 - 4r_0^2\ln\frac{a}{r_0} - 3r_0^2\right]$$

Pour r_0 très petit (charge concentrée):

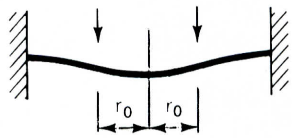
$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)a^2}{4\pi E m^2 t^3}$$

Au bord:

$$\sigma_r = \frac{3Q}{2\pi t^2}\left(1 - \frac{r_0^2}{2a^2}\right) = \max \sigma_r \text{ pour } r_0 > 0{,}588a$$

$$\sigma_t = \frac{3Q}{2\pi m t^2}\left(1 - \frac{r_0^2}{2a^2}\right)$$

Charge uniforme sur un anneau concentrique, circulaire et de rayon r_0



A une distance r du centre:

$r < r_0$

$$\sigma_r = \sigma_t = -\frac{3Q}{4\pi m t^2}\left[(m+1)\left(2\ln\frac{a}{r_0} + \frac{r_0^2}{a^2} - 1\right)\right] = \max \sigma \text{ pour } r_0 < 0{,}31a$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_0^2}{a^2}\right)(a^2-r^2) - (r^2+r_0^2)\ln\frac{a}{r_0} + (r^2 - r_0^2)\right]$$

$r > r_0$

$$\sigma_r = -\frac{3Q}{4\pi m t^2}\left[(m+1)\left(2\ln\frac{a}{r} + \frac{r_0^2}{a^2}\right) + (m-1)\frac{r_0^2}{r^2} - 2m\right]$$

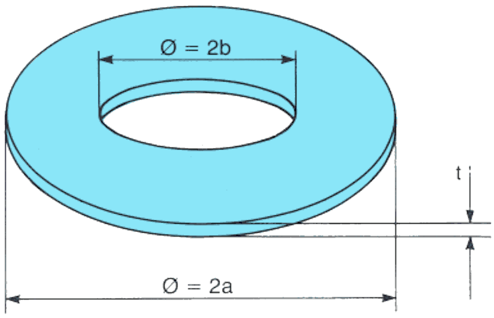
$$\sigma_t = -\frac{3Q}{4\pi m t^2}\left[(m+1)\left(2\ln\frac{a}{r} + \frac{r_0^2}{a^2}\right) - (m-1)\frac{r_0^2}{r^2} - 2\right]$$

$$\delta(r) = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_0^2}{a^2}\right)(a^2-r^2) - (r^2+r_0^2)\ln\frac{a}{r}\right]$$

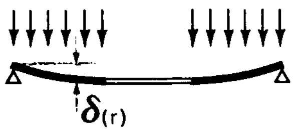
Au milieu:

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{2\pi E m^2 t^3}\left[\frac{1}{2}(a^2-r_0^2) - r_0^2\ln\frac{a}{r_0}\right]$$

Plaque circulaire avec trou circulaire et concentrique (anneau circulaire) reposant librement sur un appui circulaire



Charge uniforme sur l'ensemble de la surface, l'anneau reposant à la périphérie extérieure sur un appui circulaire



$$Q = q\pi(a^2 - b^2)$$

Au bord intérieur:

$$\sigma_{t(max)} = -\frac{3q}{4mt^2(a^2-b^2)}\Big[a^4(3m+1) + b^4(m-1) -$$

$$- 4ma^2b^2 - 4(m+1)a^2b^2 \ln\frac{a}{b}\Big]$$

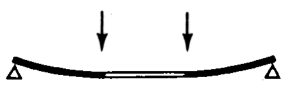
Si b est très petit, $\sigma_{t(max)} = -\dfrac{3qa^2(3m+1)}{4mt^2}$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3q(m^2-1)}{2m^2Et^3}\Big[\frac{a^4(5m+1)}{8(m+1)} + \frac{b^4(7m+3)}{8(m+1)}$$

$$\frac{a^2b^2(3m+1)}{2(m+1)} + \frac{a^2b^2(3m+1)}{2(m-1)}\ln\frac{a}{b} -$$

$$\frac{2a^2b^4(m+1)}{(a^2-b^2)(m-1)}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2\Big]$$

Charge uniforme sur le bord intérieur d'un anneau, sa périphérie extérieure reposant sur un appui circulaire



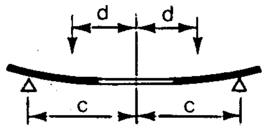
Au bord intérieur:

$$\sigma_{t(max)} = -\frac{3Q}{2\pi mt^2}\left[\frac{2a^2(m+1)}{a^2-b^2}\ln\frac{a}{b} + (m-1)\right]$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{4\pi Em^2t^3}\Big[\frac{(a^2-b^2)(3m+1)}{(m+1)} +$$

$$+ \frac{4a^2b^2(m+1)}{(m-1)(a^2-b^2)}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2\Big]$$

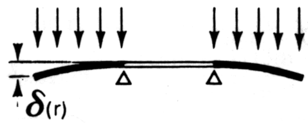
Charge uniforme sur un anneau circulaire et concentrique, près du bord intérieur, l'anneau reposant au bord extérieur sur un appui circulaire et concentrique



Au bord intérieur:

$$\sigma_{t(max)} = -\frac{3Q}{2\pi mt^2}\left[\frac{2a^2(m+1)}{a^2-b^2}\ln\frac{c}{d} + (m-1)\frac{c^2-d^2}{a^2-b^2}\right]$$

Charge uniforme sur l'ensemble de la surface, l'anneau reposant à la périphérie intérieure sur un appui circulaire



$$Q = q\pi(a^2 - b^2)$$

Au bord intérieur:

$$\sigma_{t(max)} = \frac{3q}{4mt^2(a^2-b^2)}\Big[4a^4(m+1)\ln\frac{a}{b} + 4a^2b^2 +$$

$$+ b^4(m-1) - a^4(m+3)\Big]$$

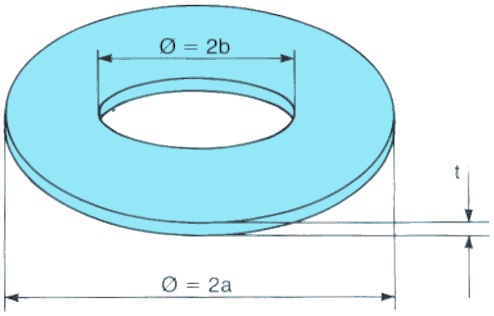
Au bord extérieur:

$$\delta_{(max)} = \frac{3q(m-1)}{16Em^2t^3}\Big[a^4(7m+3) + b^4(5m+1) -$$

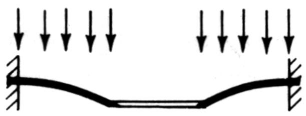
$$- a^2b^2(12m+4) - \frac{4a^2b^2(3m+1)(m+1)}{(m-1)}\ln\frac{a}{b} +$$

$$+ \frac{16a^4b^2(m+1)^2}{(a^2-b^2)(m-1)}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2\Big]$$

Plaque circulaire avec trou circulaire et concentrique (anneau circulaire), immobilisé à la périphérie intérieure ou extérieure



Charge uniforme sur l'ensemble de la surface, l'anneau étant immobilisé à la périphérie extérieure



$$Q = q\pi(a^2 - b^2)$$

Au bord extérieur:

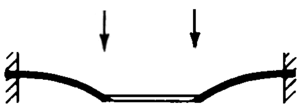
$$\sigma_{r(max)} = \frac{3q}{4t^2}\left[a^2 - 2b^2 + \frac{b^4(m-1) - 4b^4(m+1)\ln\frac{a}{b} + a^2b^2(m+1)}{a^2(m-1) + b^2(m+1)}\right]$$

Au bord intérieur:

$$\sigma_{t(max)} = -\frac{3q(m^2-1)}{4mt^2}\left[\frac{a^4 - b^4 - 4a^2b^2\ln\frac{a}{b}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)}\right]$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3q(m^2-1)}{16m^2Et^3}\left[a^4 + 5b^4 - 6a^2b^2 + 8b^4\ln\frac{a}{b} - \frac{8b^6(m+1) - 4a^2b^4(3m+1) - 4a^4b^2(m+1)\ln\frac{a}{b} + 16a^2b^4(m+1)\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4a^2b^4 + 2a^4b^2(m+1) - 2b^6(m-1)}{a^2(m-1) + b^2(m+1)}\right]$$

Charge uniforme sur un anneau au bord intérieur, l'anneau étant immobilisé à la périphérie extérieure



Au bord extérieur:

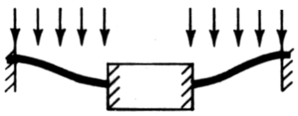
$$\sigma_{r(max)} = \frac{3Q}{2\pi t^2}\left[1 - \frac{2mb^2 - 2b^2(m+1)\ln\frac{a}{b}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)}\right] = \sigma_{(max)} \text{ si } \frac{a}{b} < 2.4$$

Au bord intérieur:

$$\sigma_{t(max)} = \frac{3Q}{2\pi mt^2}\left[1 + \frac{ma^2(m-1) - mb^2(m+1) - 2(m^2-1)\,a^2\ln\frac{a}{b}}{a^2(m-1) + b^2(m+1)}\right] = \sigma_{(max)} \text{ si } \frac{a}{b} > 2.4$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{4\pi m^2Et^3}\left\{a^2 - b^2 + \frac{2mb^2(a^2-b^2) - 8ma^2b^2\ln\frac{a}{b} + 4a^2b^2(m+1)\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2}{a^2(m-1) + b^2(m+1)}\right\}$$

Charge uniforme sur l'ensemble de la surface, l'anneau étant immobilisé à la periphérie extérieure et serré à la périphérie intérieure



$$Q = q\pi(a^2 - b^2)$$

Au bord extérieur:

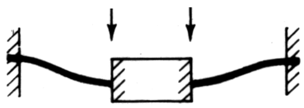
$$\sigma_{r(max)} = \frac{3q}{4t^2}\left[(a^2 - 3b^2) + \frac{4b^4}{a^2 - b^2}\ln\frac{a}{b}\right]$$

Au bord intérieur:

$$\sigma_r = \frac{3q}{4t^2}\left[(a^2 + b^2) - \frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)}\ln\frac{a}{b}\right]$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3q(m^2-1)}{16m^2Et^3}\left[a^4 + 3b^4 - 4a^2b^2 - 4a^2b^2\ln\frac{a}{b} + \frac{16a^2b^4}{a^2 - b^2}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

Charge uniforme sur un anneau au bord intérieur, l'anneau étant immobilisé à la periphérie extérieure et serré à la periphérie intérieure



Au bord extérieur:

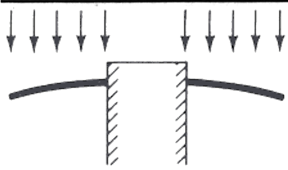
$$\sigma_r = \frac{3Q}{2\pi t^2}\left[1 - \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\ln\frac{a}{b}\right]$$

Au bord intérieur:

$$\sigma_{r(max)} = \frac{3Q}{2\pi t^2}\left[1 - \frac{2a^2}{a^2 - b^2}\ln\frac{a}{b}\right]$$

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{4\pi m^2Et^3}\left[a^2 - b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2 - b^2}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

Charge uniforme sur l'ensemble de la surface, l'anneau étant immobilisé à la périphérie intérieure



$$Q = q\pi(a^2 - b^2)$$

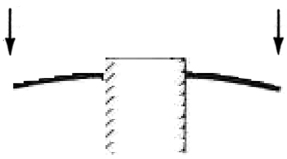
Au bord intérieur:

$$\sigma_{r(max)} = \frac{3q}{4t^2}\left[\frac{4a^4(m+1)\ln\frac{a}{b} - a^4(m+3) + b^4(m-1) + 4a^2b^2}{a^2(m+1) + b^2(m-1)}\right]$$

Au bord extérieur:

$$\delta_{(max)} = -\frac{3q(m^2-1)}{16m^2Et^3}\cdot\frac{a^6(7m+3) + b^6(m-1) - a^4b^2(m+7) - a^2b^4(7m-5) - 4a^2b^2[a^2(5m-1) + b^2(m+1)]\ln\frac{a}{b} - 16a^4b^2(m+1)\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2}{a^2(m+1) + b^2(m-1)}$$

Charge uniforme sur un anneau au bord extérieur, l'anneau étant immobilisé à la périphérie intérieure



Au bord intérieur:

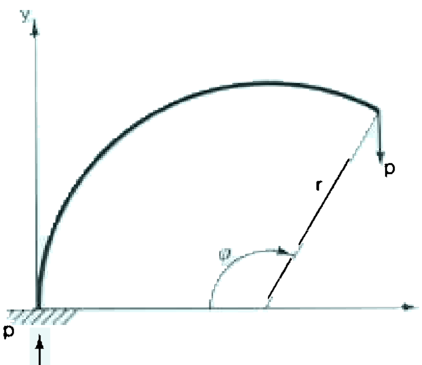
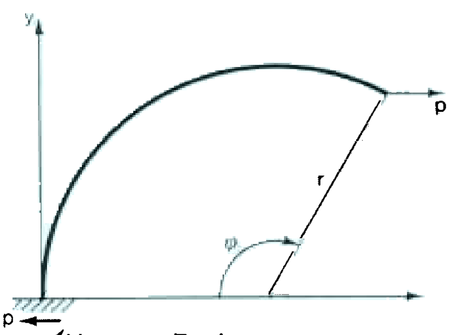
$$\sigma_{r(max)} = \frac{3Q}{2\pi t^2}\left[\frac{2a^2(m+1)\ln\frac{a}{b} + a^2(m-1) - b^2(m-1)}{a^2(m+1) + b^2(m-1)}\right]$$

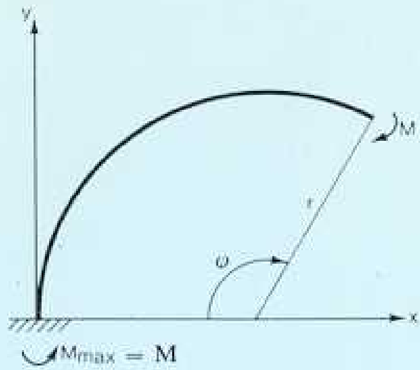
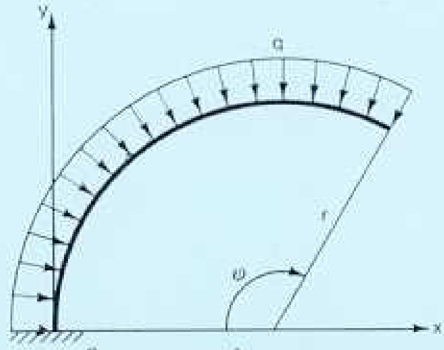
Au bord extérieur:

$$\delta_{(max)} = -\frac{3Q(m^2-1)}{4m^2\pi Et^3}\cdot\frac{a^4(3m+1) - b^4(m-1) - 2a^2b^2(m+1) - 8ma^2b^2\ln\frac{a}{b} - 4a^2b^2(m+1)\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2}{a^2(m+1) + b^2(m-1)}$$

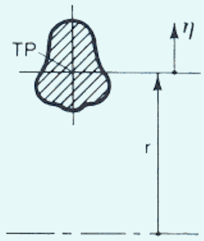
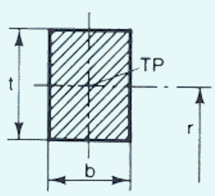
Ressort à courbure simple avec ligne médiane circulaire, immobilisé à l'une des extrémités

Tableau 11

	Type de charge	Décalages dans les sens x et y, respectivement, avec l'angle φ et avec changement angulaire dans le sens des aiguilles d'une montre
a	 $M_{max} = Pr\,(1 - \cos\varphi)$	$\delta_{x\,(\varphi)} = \frac{Pr^3}{EJ}\left[\cos\varphi - \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\varphi) - \frac{\varphi}{2}(1+\varkappa)\sin 2\varphi\right]$ $\delta_{y\,(\varphi)} = \frac{Pr^3}{EJ}\left[\frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{\varphi}{2} - \varphi(1+\varkappa)\cos^2\varphi\right]$ $\Theta_{(\varphi)} = \frac{Pr^2}{EJ}[\sin\varphi - \varphi(1+\varkappa)\cos\varphi]$ $\delta_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Pr^3}{2EJ}$ $\quad\delta_x(\pi) = -2\frac{Pr^3}{EJ}$ $\delta_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}\frac{Pr^3}{EJ}$ $\quad\delta_y(\pi) = -\frac{3\pi}{2}\frac{Pr^3}{EJ}\left(1 + \frac{2\varkappa}{3}\right)$ $\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Pr^2}{EJ}$ $\quad\Theta(\pi) = \pi\frac{Pr^2}{EJ}(1+\varkappa)$
b	 $M_{max} = Pr\sin\varphi$	$\delta_{x\,(\varphi)} = \frac{Pr^3}{EJ}\left[\frac{3}{4}\sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} - 2\sin\varphi + \varphi(1+\varkappa)\sin^2\varphi\right]$ $\delta_{y\,(\varphi)} = \frac{Pr^3}{EJ}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\varphi - \cos\varphi + \frac{\varphi}{2}(1+\varkappa)\sin 2\varphi\right]$ $\Theta_{(\varphi)} = \frac{Pr^2}{EJ}[\cos\varphi - 1 + \varphi(1+\varkappa)\sin\varphi]$ $\delta_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Pr^3}{EJ}\left(\frac{3\pi}{4} - 2 + \frac{\pi}{2}\varkappa\right)$ $\quad\delta_x(\pi) = \frac{\pi}{2}\frac{Pr^3}{EJ}$ $\delta_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{Pr^3}{2EJ}$ $\quad\delta_y(\pi) = 2\frac{Pr^3}{EJ}$ $\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Pr^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2}\varkappa\right)$ $\quad\Theta(\pi) = -2\frac{Pr^2}{EJ}$

	Type de charge	Décalages dans les sens x et y, respectivement, avec l'angle φ et avec changement angulaire dans le sens des aiguilles d'une montre
c		$\delta_{x(\varphi)} = \frac{Mr^2}{EJ}[\cos\varphi - 1 + \varphi(1+\varkappa)\sin\varphi]$ $\delta_{y(\varphi)} = \frac{Mr^2}{EJ}[-\sin\varphi + \varphi(1+\varkappa)\cos\varphi]$ $\Theta_{(\varphi)} = \frac{Mr}{EJ}(1+\varkappa)\varphi$ $\delta_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Mr^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2}\varkappa\right)$ $\quad \delta_x(\pi) = -2\frac{Mr^2}{EJ}$ $\delta_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{Mr^2}{EJ}$ $\quad \delta_y(\pi) = -\pi\frac{Mr^2}{EJ}(1+\varkappa)$ $\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{Mr}{EJ}(1+\varkappa)$ $\quad \Theta(\pi) = \pi\frac{Mr}{EJ}(1+\varkappa)$
d	 Px = qr sin φ Py = qr (1 — cos φ) Mmax = qr² (1 — cos φ)	$\delta_{x(\varphi)} = \frac{qr^4}{EJ}\left(\frac{3\varphi}{2}\sin\varphi + \cos\varphi - \sin^2\varphi - 1\right)$ $\delta_{y(\varphi)} = \frac{qr^4}{EJ}\left[\frac{1}{2}(3\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \sin 2\varphi)\right]$ $\Theta_{(\varphi)} = \frac{qr^3}{EJ}(\varphi - \sin\varphi)$ $\delta_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{qr^4}{EJ}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)$ $\quad \delta_x(\pi) = -2\frac{qr^4}{EJ}$ $\delta_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{qr^4}{EJ}$ $\quad \delta_y(\pi) = -\frac{3\pi}{2}\frac{qr^4}{EJ}$ $\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{qr^3}{EJ}$ $\quad \Theta(\pi) = \pi\frac{qr^3}{EJ}$

Détermination du couple d'inertie, J[1]

e		$J = \int \frac{\eta^2 dA}{1 + \frac{\eta}{r}}$
f		$J = r^3 b \ln\left(\frac{2r+t}{2r-t}\right) - r^2 bt = I\left(1 + \frac{3}{5}\left(\frac{t}{2r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{t}{2r}\right)^4 + \ldots\right)$ (Ligne médiane de la flexion au centre)

[1] Dans le cas spécial où r = ∞ (ressort droit), J est égal au couple d'inertie I de la section