Relativité restreinte – 16 Mai 2023 – 16h – A.5-02

Cours et TDs autorisés – Rédiger les sujets de relativité et de physique subatomique sur des copies différentes

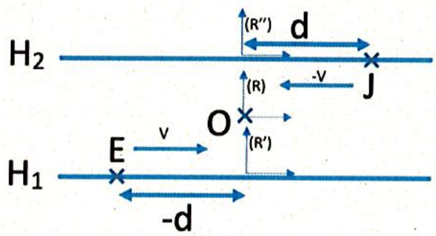
Les jeux relativistes de Jeff et Elon

1. Elon invite Jeff à essayer son train hyperloop. Elon et Jeff se placent le long de la voie aux abscisses x_E et x_J (référentiel (R)) à une distance d l'un de l'autre et synchronisent leurs montres. Jeff est éloigné d'Elon dans le sens de déplacement du train. Quand l'hyperloop arrive à l'instant t_0, Elon et Jeff sautent simultanément dans le train (référentiel (R')) [1]. Le train est pourvu d'horloges synchronisées et à un instant t'_1 ultérieur, Elon et Jeff sautent simultanément pour revenir dans (R). Question: A l'issue de l'essai, leurs montres sont-elles encore synchronisées?

   - Répondre à la question en traçant un diagramme d'espace-temps décrivant l'essai. On fera apparaître les deux lignes d'univers correspondant à Jeff et Elon ainsi que les événements correspondant aux changements de référentiels pour Jeff et Elon.
   - Répondre à la question par le calcul à l'aide des transformations de Lorentz-Poincaré.

2. Elon a lu[2] l'article: Mohazzabi, P. and Luo, Q.H., *Has the Twin Paradox Really Been Resolved?*, Journal of Applied Mathematics and Physics 9, 2187-2192 (2021), dans lequel les auteurs proposent l'expérience de pensée suivante: *Consider twins, A and B, both initially at rest with respect to an inertial frame and separated by distance d. They synchronize their clocks (...). Then at a time that the two twins had previously agreed upon, they start moving towards each other with equal accelerations relative to an inertial frame O at their midpoint. The accelerations are very large but take place in a very short time resulting in relativistic speeds. The two twins then start moving towards each other, each with a constant speed v relative to the other (...). According to twin A, twin B is moving with speed v. Therefore when they reach each other at the midpoint O, the clock of B should show a shorter time than the clock of A, i.e.,* $t_B < t_A$ *. On the other hand, according to twin B, twin A is moving with speed v. Therefore when they reach each other, the clock of A should show a shorter time than the clock of B, i.e.,* $t_B < t_A$ *. In this situation, the system is completely symmetric; neither twin leaves her reference frame, and both have the same initial acceleration. Therefore, none of the suggested explanations can resolve the paradox in this case.*

   Sans attendre, Elon décide de lever cet apparent paradoxe et fait construire une deuxième ligne H_2 d'hyperloop parallèle à la première H_1 pour avoir deux trains circulant l'un vers l'autre. Toujours avec Jeff et après avoir resynchronisé leurs montres, ils se positionnent symétriquement, chacun à une distance d par rapport à un point O au milieu des voies. Elon est en face de H_1 et Jeff en face de H_2. A l'instant t_0, Elon et Jeff sautent chacun dans un train (référentiel (R') pour Elon et (R'') pour Jeff). Ils sautent à nouveau sur le quai lorsque les trains arrivent en O, qui est l'origine spatiale des trois référentiels (R), (R'), (R''). On note comme avant $x_E = -d$ l'abscisse initiale d'Elon et $x_J = d$ celle de Jeff.

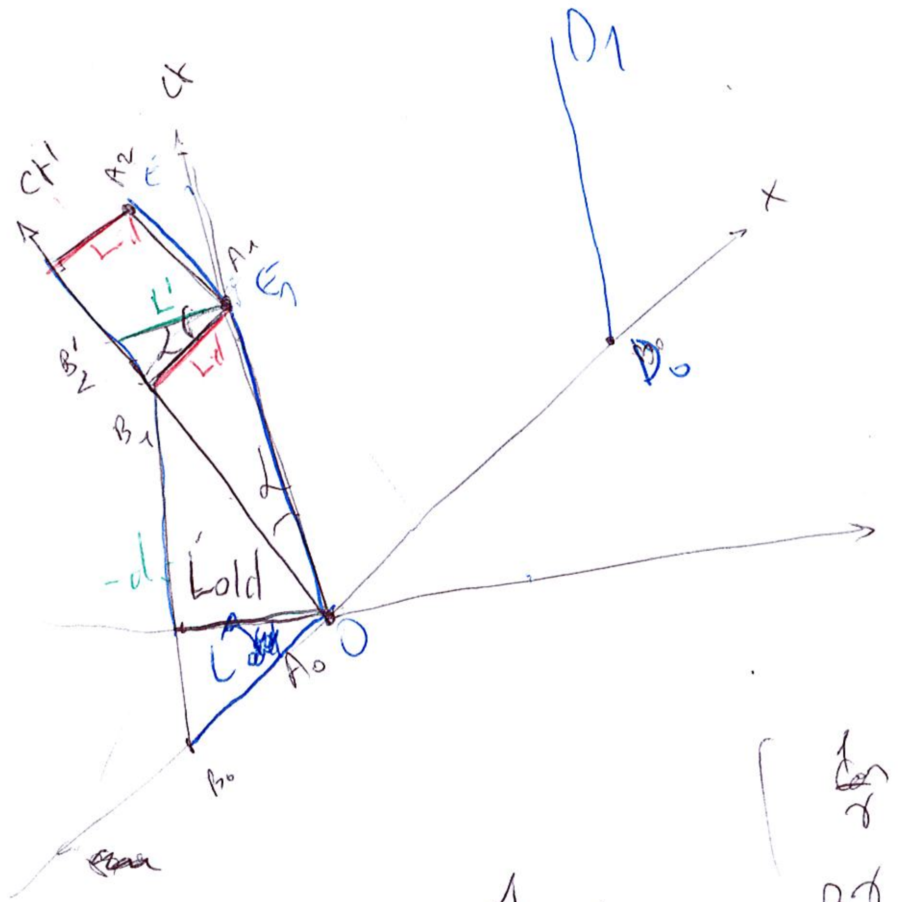
   

   Question: les montres d'Elon et Jeff sont-elles toujours synchronisées quand ils arrivent en O?

   - Tracer les 3 diagrammes d'espace-temps $(R)/(R')$, $(R)/(R'')$, $(R')/(R'')$. On prendra garde: (a) à placer correctement les abscisses x_E, x'_E et x_J, x''_J, (b) à placer correctement les axes dans chaque diagramme (c'est-à-dire à bien identifier le signe de la vitesse relative) . Il y a un détrompeur simple pour le diagramme $(R')/(R'')$: les lignes d'univers doivent se couper dans le futur!
   - Comparer les durées propres du voyage pour Elon et Jeff. Répondre à la question.
   - Les auteurs de l'article auraient-ils mieux fait de s'abstenir?[3] Pouvez-vous identifier leur erreur de raisonnement ? (indication: que se passerait-il si Jeff restait dans son train et Elon sautait dans le train de Jeff?).

3. Question bonus: Préferez-vous Poincaré ou Einstein?

[1] nous jouons avec Elon, donc nous faisons fi de toute difficulté technique.
[2] ou quelqu'un de compétent lui a fait une fiche.
[3] et les rapporteurs n'ont pas fait leur travail.



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & -\beta\gamma \\ \beta\gamma & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{\gamma}$.

$L' = \frac{L}{\gamma}$ En

$$\cos\alpha = \frac{L}{L'} = \frac{1}{\gamma}$$

$L' = x'_B - x'_A = \gamma L$

$L' = L'_{old} + v\,\Delta t'$

$= \frac{L}{\gamma} + \frac{\gamma v^2 L}{c^2}$

$= \gamma L$

$x'_A = \gamma(x_A - vt)$

$x'_B = \gamma(x_A + L - vt)$

A_0 = rocket C

D_0 = rocket A fixe dans S

B_0 = rocket B.

A_1B_1 : rocket B et C fixe dans S.

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma\left(t_B - \frac{v x_B}{c^2}\right) - \gamma\left(t_A - \frac{v x_A}{c^2}\right)$$

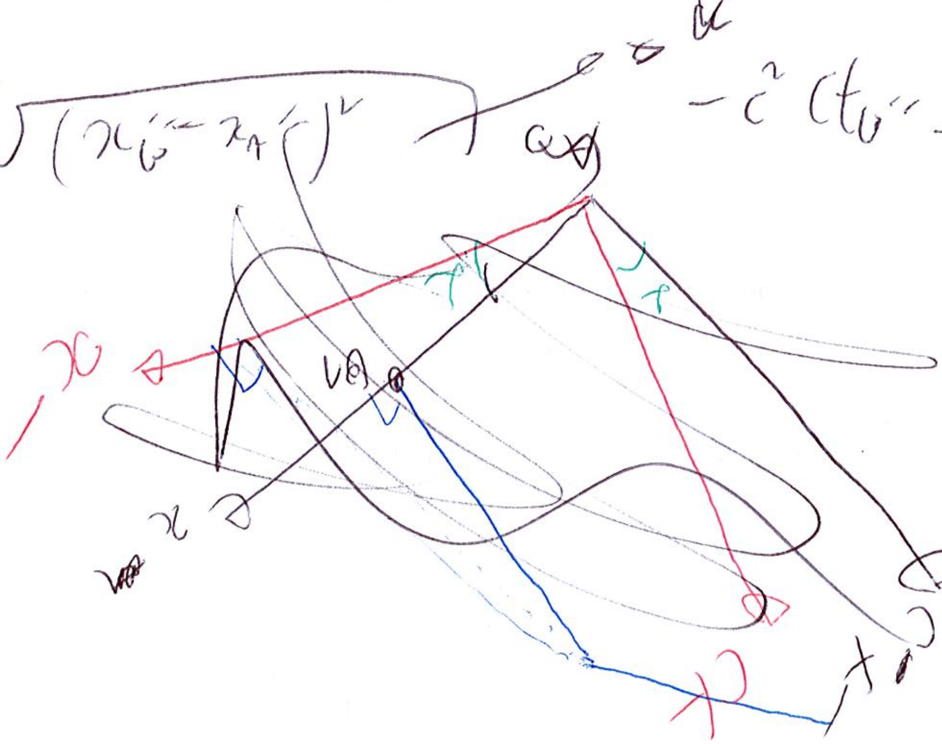
$$= \frac{\gamma v L}{c^2}$$

$$t'_B = t'_A \quad ; \quad x_B - x_A = x'_B - x'_A = L$$

$$x''_B - x'_B = v(t''_B - t'_B)$$

$$t''_B - \frac{v}{c^2} x''_B = t'_A - \frac{v}{c^2} x'_A$$

$$A'B'' = \sqrt{(x''_B - x'_A)^2 - c^2 (t''_B - t'_A)^2}$$



$$= \frac{L}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

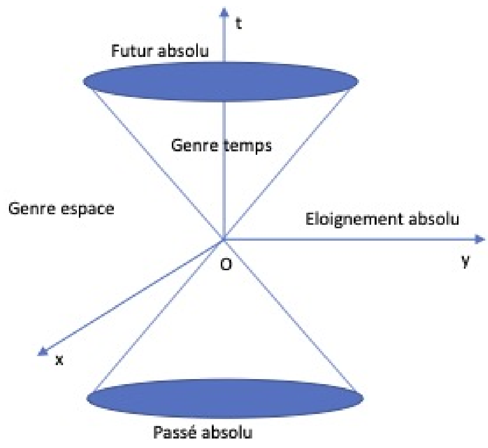


FIGURE 5.1

— $ds^2 < 0$: intervalle de genre espace. La partie spatiale domine la partie temporelle. On considère deux même événements. S'il existe un référentiel où les événements sont simultanés, alors $s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0$ et l'intervalle est du genre espace. Réciproquement, par transformation de Lorentz-Poincaré, on a :$\frac{c^2}{V} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} > c$. Les deux événements ne peuvent pas être connectés par un signal causal de vitesse $< c$. *Lorsqu'un intervalle entre deux événements est de genre espace, il existe un référentiel dans lequel les événements coïncident dans le temps.*

On représente ces différentes situations dans la figure ci-dessous. Les événements liés par une relation de causalité sont situés à l'intérieur du cône de lumière.

5.4 Représentations graphiques : diagramme de Lorentz-Brehme

Nous allons décrire une façon de représenter les événements selon deux référentiels (R) et (R'). On ne garde qu'un axe temporel et un axe spatial. On commence par tracer une horizontale et une verticale (fig.5.2) qui seront les lignes de référence. On place ensuite les axes temporels symétriquement par rapport à la ligne verticale. Les deux axes sont sépararés d'un angle α (fig.5.3). Enfin, on trace les axes Ox et Ox', de telle sorte que l'axe Ox soit perpendiculaire à l'axe Ot' et l'axe Ox' est perpendiculaire à l'axe Ot (cf. fig. 5.4). Enfin, les lignes de lumière correspondent aux bissectrices des axes, qui sont communes aux deux référentiels et perpendiculaires entre elles. Pour comprendre le sens de l'angle α, écrivons la transformation de Lorentz-Poincaré entre les deux référentiels (R) et (R').

$$x' = \gamma(x - \beta ct),\ ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

FIGURE 5.2

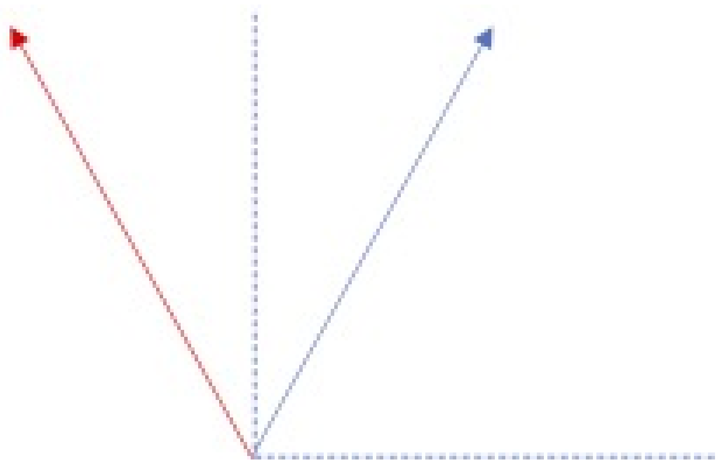


FIGURE 5.3

relations que l'on peut réécrire sous la forme :

$$x = \frac{1}{\gamma}x' + \beta ct,\ ct' = \gamma ct - \gamma\beta(\frac{1}{\gamma}x' + \beta ct),$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{1}{\gamma}x' + \beta ct,\ ct' = \gamma(1-\beta^2)ct - \beta x' = \frac{1}{\gamma}ct - \beta x'.$$

Remarquons que $\beta^2 + 1/\gamma^2 = 1$. Posons alors : $\beta = \sin\alpha$. Les relations s'écrivent alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct \end{pmatrix}$$

ce qui peut également s'écrire : $x + ict' = e^{-i\alpha}(x' + ict)$. On passe du système d'axe (x', ct) au système d'axe (x, ct') par une rotation d'angle α et $\sin\alpha = \frac{V}{c}$. Par conséquent, le diagramme est

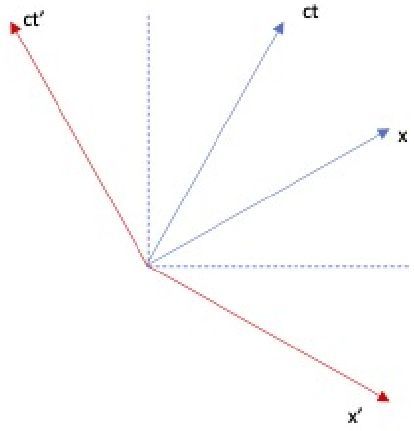


Figure 5.4

construit de telle sorte que : $x^2 + c^2t'^2 = x'^2 + c^2t^2$ et par conséquent, on a bien la conservation de l'intervalle $s^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ entre les deux référentiels (R) et (R').

Chapitre 6

Travaux Dirigés : Espace-Temps

6.1 Désintégration des muons

Interpréter l'expérience de désintégration des muons à l'aide des diagrammes de Lorentz. *Le référentiel (R') est le référentiel du laboratoire et le référentiel (R) est le référentiel propre du muon. Le muon est émis en altitude à un instant t'_1 et un point x'_1, c'est l'événement E_1. Le muon se désintègre au niveau du sol à un instant t'_2, c'est l'événement E_2. (voir fig. 6.1). Dans (R), l'intervalle d'espace-temps est $c^2\Delta t^2$ puisque le muon est immobile. Dans (R') l'intervalle d'espace-temps est $c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2\Delta t^2$. On voit sur le diagramme que : $\cos\alpha = \frac{c\Delta t}{c\Delta t'}$, soit $\Delta t' = \gamma\Delta t$, on retrouve bien le résultat obtenu par le calcul : la durée mesurée dans (R') est supérieure à la durée mesurée dans (R). L'épaisseur de l'atmosphère mesurée dans (R) correspond à la distance spatiale entre la ligne d'un point du sol et l'événement E_1 mesurés au même instant. C'est la distance Δx. On voit sur la figure que $\cos\alpha = \Delta x/\Delta x'$ et par suite $\Delta x = \gamma^{-1}\Delta x'$: on retrouve le phénomène de contraction des longueurs.*

6.2 Paradoxe des jumeaux

On considère deux horloges A et B en mouvement l'une par rapport à l'autre. Pour l'observateur accompagnant A, l'horloge B retarde et réciproquement. Si A fait demi-tour et repasse devant B, que constate-t-on ? (les horloges ne peuvent retarder toutes les deux l'une par rapport à l'autre ! C'est le "paradoxe"). *On appelle (R) le référentiel où B est au repos. On considère alors la séquence d'événements suivants :*

- *(E_1) : départ de A au repos dans (R) et passage instantané dans un référentiel (R') animé d'une vitesse $\overrightarrow{V}$ par rapport à (R),*
- *(E_2) : arrêt de A et passage instantané dans un référentiel (R'') animé d'une vitesse $-\overrightarrow{V}$ par rapport à (R),*
- *(E_3) : retour de A au point de départ.*

Pour analyser ces événements, on utilise les diagrammes de Lorentz. Dans le premier diagramme ci-dessous, A est fixe dans (R') entre E_1 et E_2. La durée propre du trajet (i.e. mesurée dans (R')) est $\Delta\tau$ et la durée impropre (i.e. mesurée dans (R)) est Δt. Le diagramme montre que :

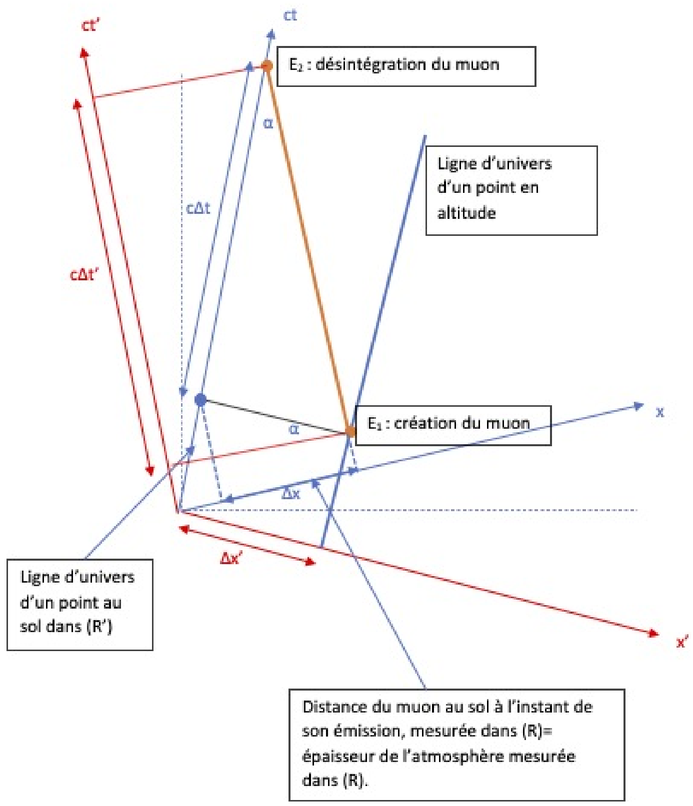


FIGURE 6.1

$c\Delta\tau = c\Delta t\cos(\alpha)$. *Le trajet retour est décrit dans le diagramme ci-dessous : La durée du trajet est la même (distance et vitesse identiques). La durée entre E_2 et E_3 mesurée dans (R) par l'horloge B est Δt la durée mesurée par A dans (R'') est $\Delta\tau$. La durée totale du trajet mesurée par A est donc : $T_A = 2\Delta\tau$ et la durée totale mesurée par B est $T_B = 2\Delta t$. On a donc la relation :*

$$T_B = \gamma T_A.$$

L'horloge A retarde sur l'horloge B. Le jumeau qui a voyagé revient plus jeune que celui qui est resté dans R. La différence est due aux accélérations subies par A lorsqu'il change de référentiels. Cet effet a été mesuré expérimentalement lors de l'expérience d'Hafele et Keating au cours de laquelle des horloges atomiques ont été embarquées dans des avions.

6.3 Paradoxe du train dans le tunnel

Un train de longueur propre L se dirige à la vitesse $\overrightarrow{V}$ vers un tunnel de longueur propre L. Le tunnel est pourvu d'une porte d'entrée E et d'une porte de sortie S pouvant être fermées

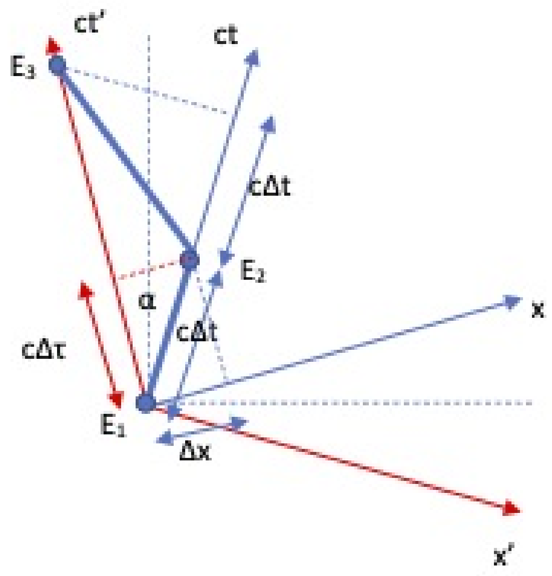


FIGURE 6.2

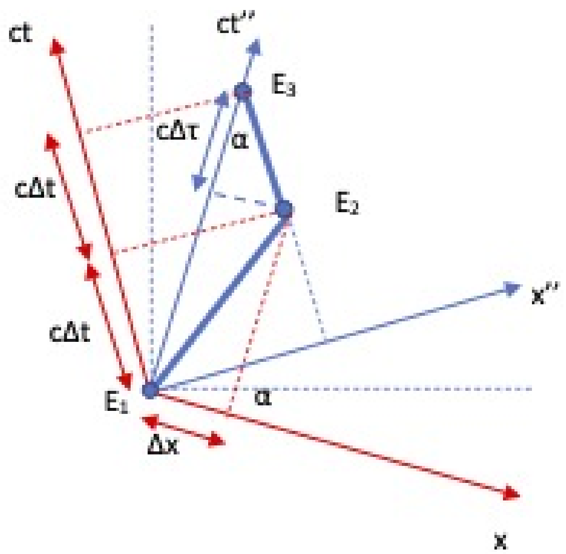


FIGURE 6.3

par un opérateur au repos dans le référentiel propre du tunnel. Du point de vue de l'opérateur, le train a une longueur L/γ et pourra donc tenir en entier dans le tunnel. Pour le conducteur du train, en revanche, c'est le tunnel qui a une longueur inférieure à L. L'opérateur ferme les deux portes E et S lorsque l'extrémité du train arrive à la sortie du tunnel. Le train pourra-t-il tenir intégralement dans le tunnel ? *On va analyser la situation à l'aide d'un diagramme de Lorentz. On a les différents événemts*

- *E_1 : le train entre dans le tunnel.*
- *E_2 : l'avant du train sort du tunnel.*
- *E_3 : L'arrière du train entre dans le tunnel.*
- *E_4 : L'arrière du train sort du tunnel.*
- *E_5 : Position de l'arrière du train au moment de la fermeture des portes dans (R).*
- *E_6 : position de l'arrière du train au moment de la fermeture de (S), observée dans dans (R').*

On voit sur le diagramme qu'à l'instant t_1 dans (R) le train est entièrement contenu dans le tunnel : les portes se ferment. En revanche, dans (R') la porte (S) se ferme avant la porte (E).

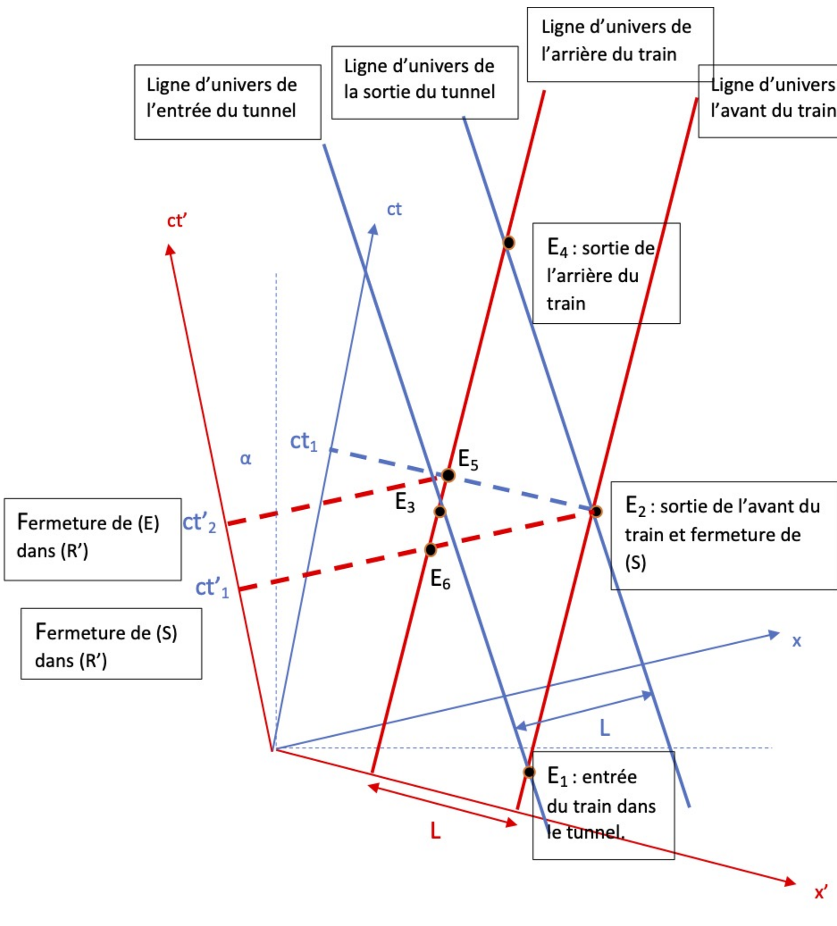
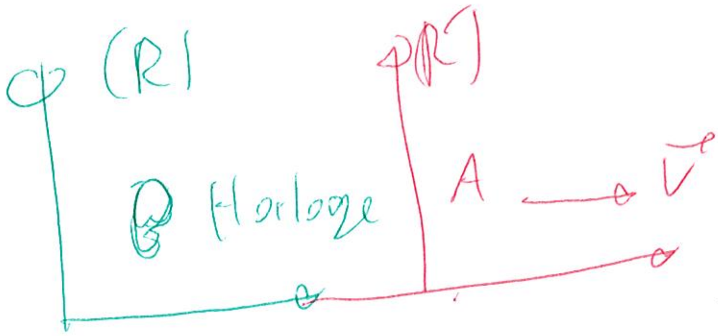


FIGURE 6.4



$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ $v = \frac{pc^2}{E}$

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Delta t' = \gamma \Delta t$

$ct'_1 = (ct_1 - \beta x)\gamma$

$ct'_2 = (ct_2 - \beta x)\gamma$

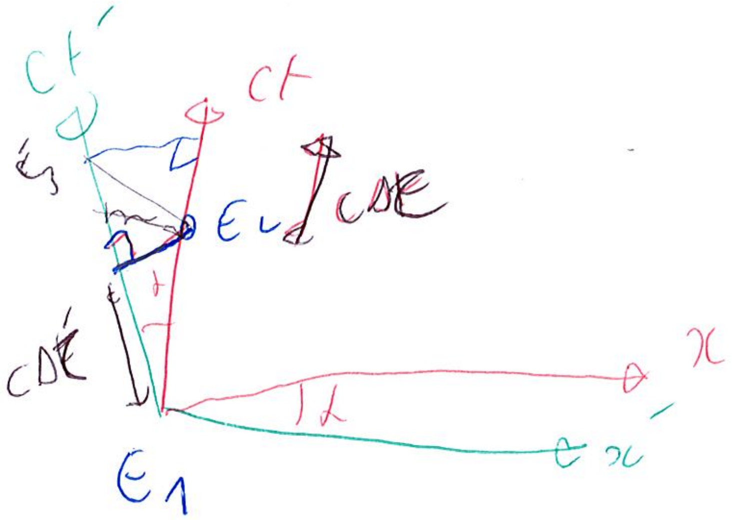
$\Delta t' = \gamma \Delta t$

- A' à un instant donné, A fait demi-tour et revient devant B

- E_1 : Départ de A au repos dans (R) passage instantanné dans (R') à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à R.

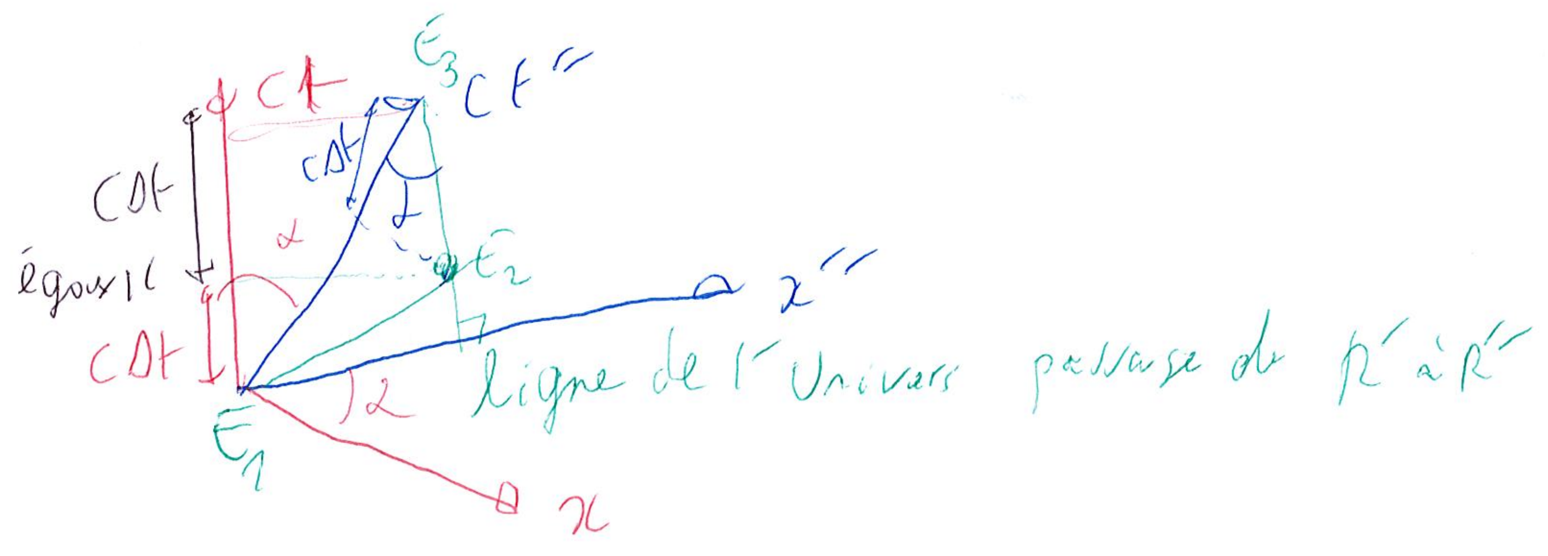
E_2 : arrêt de A et passage instantanné dans R'' $\vec{v}_{/R}$

. retour au point de départ.



- Durée propre du trajet de A entre E_1 et E_2 $\Delta\tau$
- Δt durée impropre du trajet dans (R') :

$c\Delta\tau = \cos\alpha \, c\Delta t$



- Durée propre totale : $t_p = 2\Delta\tau$
- ~~impropre~~ : $t_i = 2\Delta t$

$\boxed{t_i = \gamma t_p}$