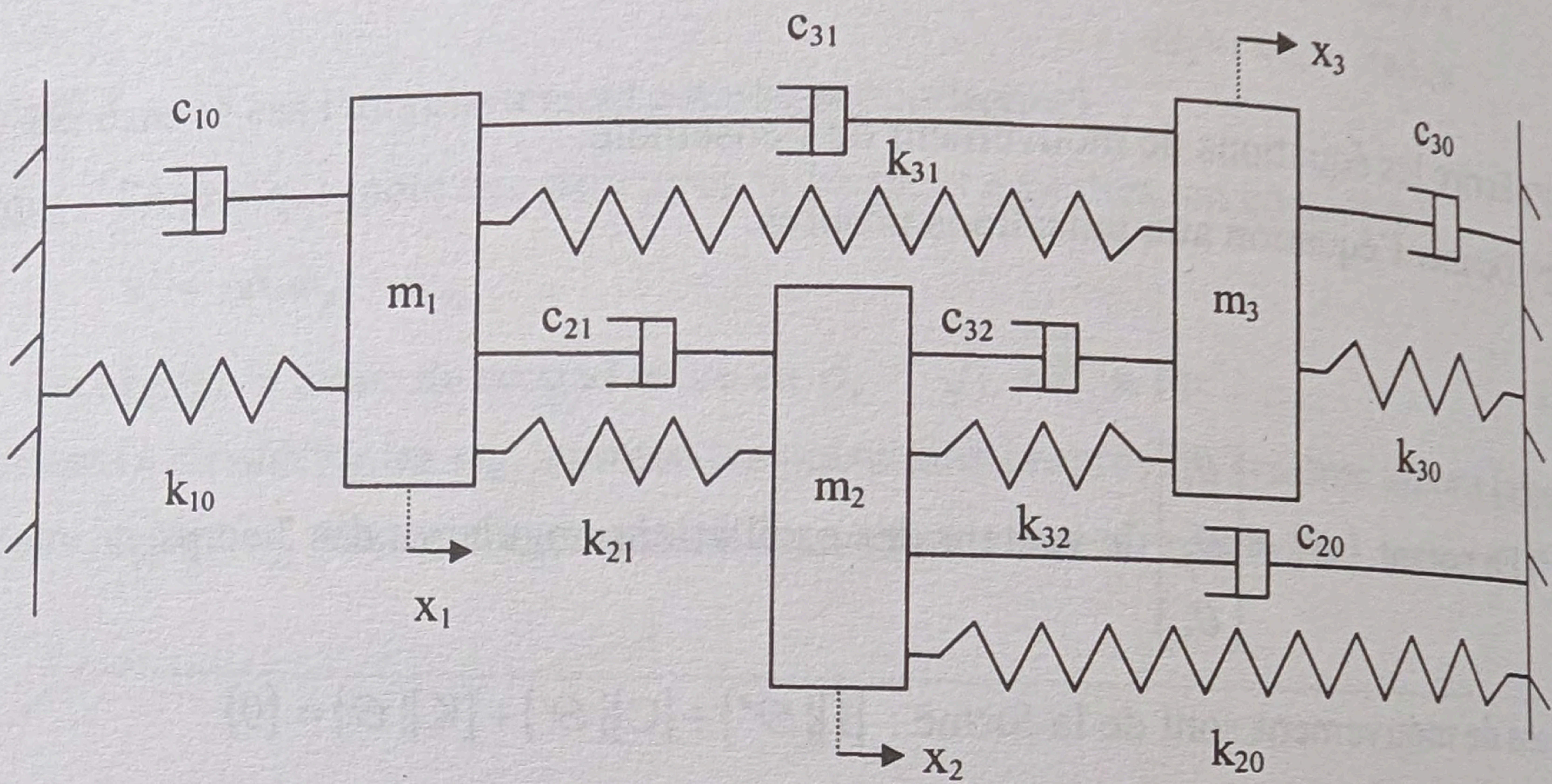
E27 : MODES PROPRES D'UN SYSTEME A 3 DDL CONSRVATIF OU DISSIPATIF avec amortissement proportionnel ou avec amortissement non proportionnel

Une structure à 3 degrés de liberté est modélisée comme suit :



On utilisera l'application numérique :

$m_1 = 1$ (kg) $\quad c_{10} = 2$ (Ns/m) $\quad k_{10} = 50$ (N/m)

$m_2 = 2 \quad c_{21} = 1 \quad k_{21} = 25$

$m_3 = \dfrac{10}{3} \quad c_{31} = 1 \quad k_{31} = 25$

$c_{20} = 3 \quad k_{20} = 75$

$c_{32} = 2 \quad k_{32} = 50$

$c_{30} = \dfrac{25}{3} \quad k_{30} = \dfrac{625}{3}$

I) Ecrire les équations de mouvement de la structure.

En déduire les matrices : - de masse [M]
- d'amortissement [C] (visqueux)
- de raideur [K]

II) 1°) Déterminer ses pulsations naturelles : $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$

et les vecteurs de forme correspondants : $\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}$.

2°) Ecrire la matrice [Q] de passage à la base modale.

Représenter les déformées modales.

3°) Donner les matrices de masse et de raideur généralisées.

4°) Déterminer la matrice formée par les vecteurs de forme normalisés (par rapport à la masse).

5°) Après avoir remarqué que l'on a un amortissement proportionnel, calculer le facteur d'amortissement visqueux de chaque mode.

6°) Calculer la matrice d'amortissement généralisée.

III) 1°) Déterminer les racines de : $\left|s^2[M]+s[C]+[K]\right|=0$

2°) Déterminer les vecteurs de forme correspondants et comparer avec les résultats du II).

IV) Pour le même système mais <u>en modifiant</u> l'amortissement, dont les nouvelles constantes sont :

$$c_{10}=0{,}2$$
$$c_{21}=0{,}2, \quad c_{20}=0{,}3$$
$$c_{31}=0, \quad c_{32}=0, \quad c_{30}=0{,}9$$

calculer les pulsations propres, les facteurs d'amortissement, les vecteurs de forme, la matrice d'amortissement normalisée et comparer avec les résultats de II) et de III).

<u>Solution</u> :

I) Les équations de mouvement du système libre et amorti sont :

(S) : $[M]\{x''\}+[C]\{x'\}+[K]\{x\}=\{0\}$

avec $$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{10}+c_{21}+c_{31} & -c_{21} & -c_{31} \\ -c_{21} & c_{20}+c_{21}+c_{32} & -c_{32} \\ -c_{31} & -c_{32} & c_{30}+c_{31}+c_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 34/3 \end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{10}+k_{21}+k_{31} & -k_{21} & -k_{31} \\ -k_{21} & k_{20}+k_{21}+k_{32} & -k_{32} \\ -k_{31} & -k_{32} & k_{30}+k_{31}+k_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 & -25 & -25 \\ -25 & 150 & -50 \\ -25 & -50 & 850/3 \end{bmatrix}$$

II) 1°) Les pulsations naturelles sont les racines de :

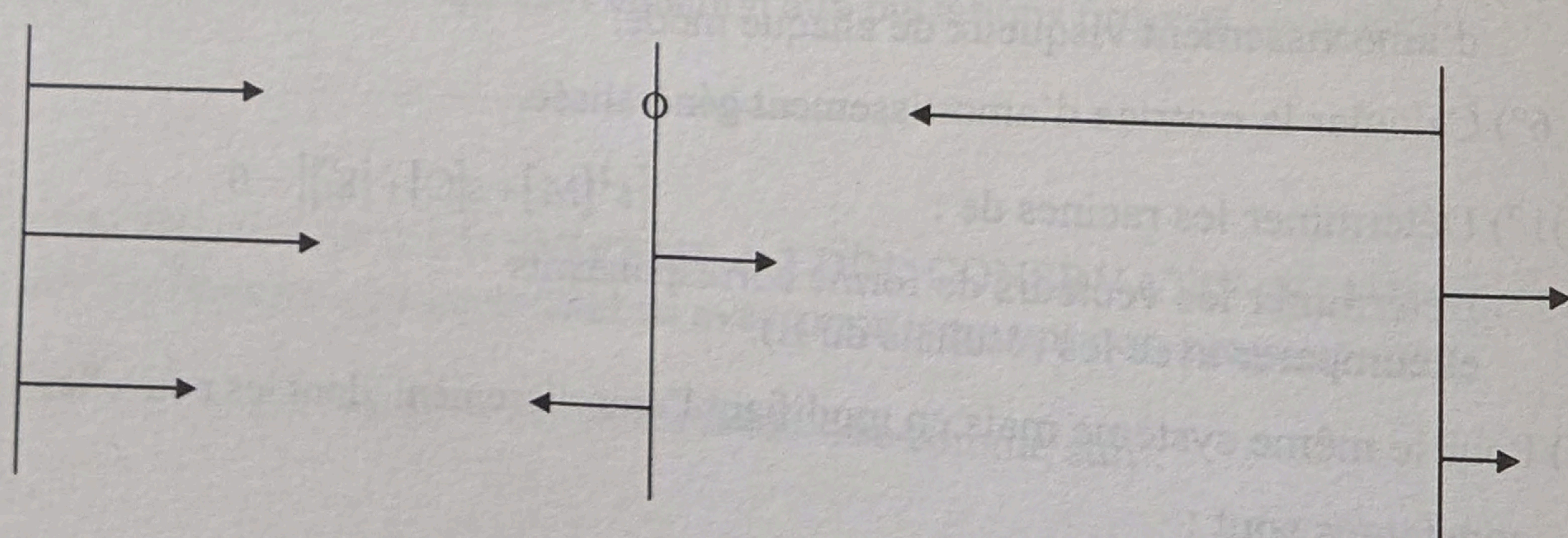
$$\left|[\mathrm{K}]-\omega^2[\mathrm{M}]\right|=0 \longrightarrow \left(100-\omega^2\right)\left(50-\omega^2\right)\left(110-\omega^2\right)=0$$

soit : $\omega_1 = 7{,}07$, $\omega_2 = 10$, $\omega_3 = 10{,}488$ (rad/s)

Les vecteurs de forme correspondant sont : $\{X_1\}=\begin{bmatrix}4\\5\\3\end{bmatrix}$, $\{X_2\}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\{X_3\}=\begin{bmatrix}-20\\5\\3\end{bmatrix}$

2°) D'où la matrice de passage à la base modale : $[Q]=\begin{bmatrix}4 & 0 & -20\\5 & 1 & 5\\3 & -1 & 3\end{bmatrix}$

La déformée modale lors de 3 modes est représentée par :



1er mode 2^{e} mode 3^{e} mode

3°) La matrice de masse généralisée est : $[\mu]=[Q]^T[M][Q]=\begin{bmatrix}96 & 0 & 0\\0 & 16/3 & 0\\0 & 0 & 480\end{bmatrix}$

et celle de raideur généralisée est : $[K_g]=[Q]^T[K][Q]=\begin{bmatrix}4800 & 0 & 0\\0 & 1600\ldots\end{bmatrix}$