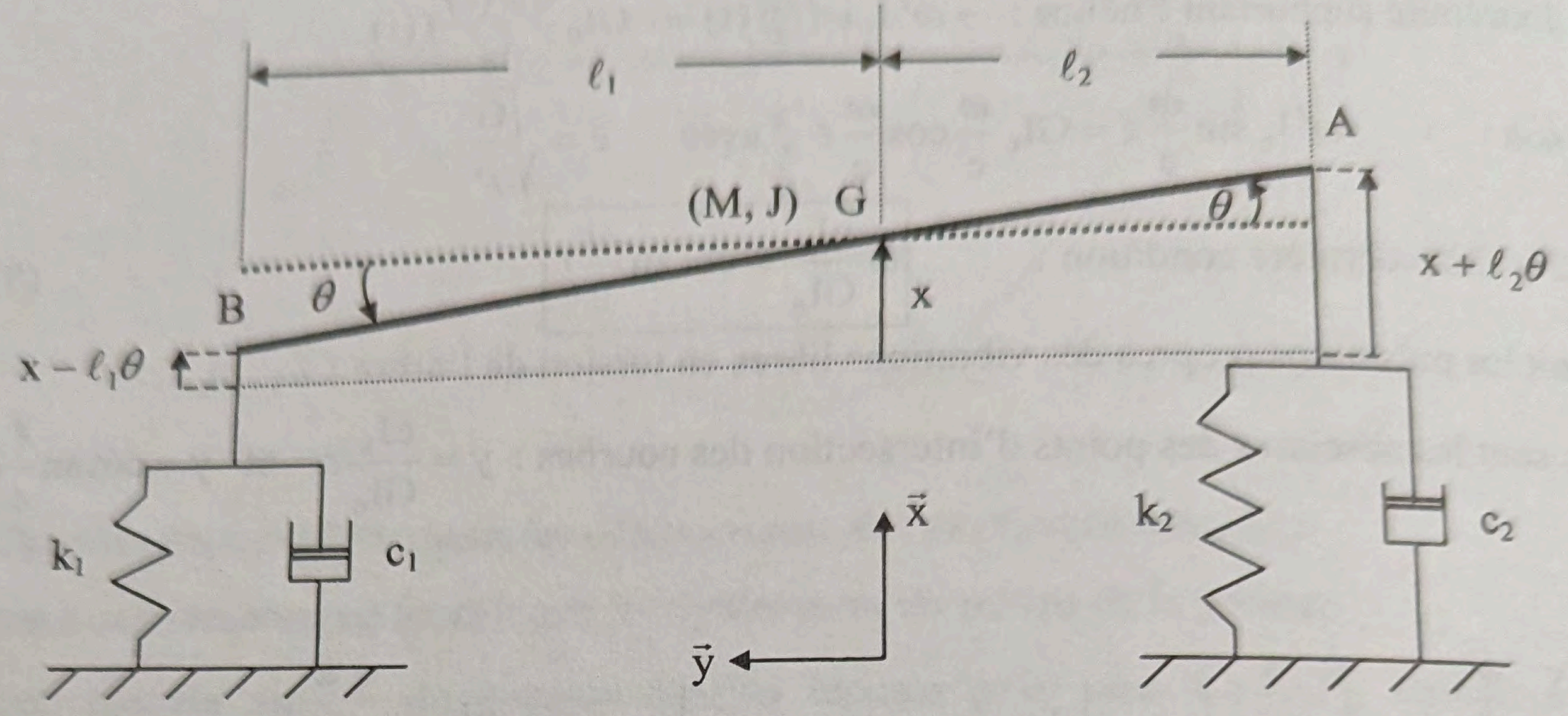
E31 : REPONSE DE LA SUSPENSION D'UN VEHICULE A UNE IMPULSION UNITAIRE

Pour étudier les oscillations verticales (pompage) et de rotation autour de l'axe transversal passant par le centre de masse (tangage) d'un véhicule, en réponse à un couple unitaire $\delta_0(t)$ (distribution de Dirac en 0), on modélise sa suspension comme suit :



Soit x le déplacement selon $\vec{x}$ du centre d'inertie G et θ la rotation du véhicule autour de $G\vec{z}$, à partir de la position d'équilibre. Au premier ordre, le déplacement du point A (avant) est $x+\ell_2\theta$ et celui du point B (arrière) $x-\ell_1\theta$, à partir de la position de ces points à l'équilibre.

Le véhicule est considéré rigide, de masse M et de moment d'inertie J selon $G\vec{z}$.

1°) Ecrire les équations régissant les petites oscillations autour de l'équilibre.

2°) En prenant les mêmes caractéristiques pour les suspensions avant et arrière :
$c_1 = c_2 = c, \qquad k_1 = k_2 = k$
et $\ell_1 = 2\ell_2 = 2\ell$ (moteur avant),
donner, sous forme matricielle, le système régissant les oscillations du système.

3°) Application numérique : $M = 1.500$ kg, $J = 400$ kg.m^2
$\ell = 1{,}2$ m, $c = 2{,}5$ kNs/m, $k = 100$ kN/m

a) Déterminer les pulsations naturelles ω_1 et ω_2.
b) Déterminer la matrice $[P]$ des vecteurs de forme normalisés par rapport à la masse et les pulsations propres amorties.
c) Ecrire, puis résoudre, les équations modales.
d) Donner les expressions de x(t) et $\theta(t)$, et représenter leurs variations en fonction du temps.

Solution :

1°) Les petites oscillations autour de l'équilibre (au premier ordre) sont régies par :

- l'équation de la somme dynamique selon $\vec{x}$:

$$M x'' = -c_1(x'-\ell_1\theta') - c_2(x'+\ell_2\theta') - k_1(x-\ell_1\theta) - k_2(x+\ell_2\theta)$$

- l'équation du moment dynamique en G selon $\vec{z}$:

$$J\theta'' = c_1\ell_1(x'-\ell_1\theta') - c_2\ell_2(x'+\ell_2\theta') + k_1\ell_1(x-\ell_1\theta) - k_2\ell_2(x+\ell_2\theta) + \delta_0(t)$$

Sous forme matricielle, ces équations s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'' \\ \theta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2\ell_2 - c_1\ell_1 \\ c_2\ell_2 - c_1\ell_1 & c_2\ell_2^2 + c_1\ell_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ \theta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2\ell_2 - k_1\ell_1 \\ k_2\ell_2 - k_1\ell_1 & k_2\ell_2^2 + k_1\ell_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{bmatrix}$$

2°) Avec les mêmes suspensions en avant et en arrière et $\ell_1 = 2\ell_2 = 2\ell$, cela devient :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'' \\ \theta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c\ell \\ -c\ell & 5c\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ \theta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k\ell \\ -k\ell & 5k\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{bmatrix}$$

On voit que dans ce cas on a un amortissement proportionnel : $[C] = \frac{c}{k}[K]$

3°) Pour l'application numérique nous obtenons :

$$[M] = \begin{bmatrix} 1500 & 0 \\ 0 & 400 \end{bmatrix}, \quad [C] = 10^3\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 18 \end{bmatrix}, \quad [K] = 10^3\begin{bmatrix} 200 & -120 \\ -120 & 720 \end{bmatrix}, \quad [C] = \frac{1}{40}[K]$$

a) Les racines de $\left|[K] - \omega^2[M]\right| = 0$ fournissent les pulsations naturelles :

$\omega_1 = 10{,}911$ rad/s (fréquence : 1,74 Hz) et $\omega_2 = 42{,}594$ rad/s (fréquence : 6,78 Hz)

b) La matrice des vecteurs de forme normalisés par rapport à la masse est :

$$[P] = \begin{bmatrix} 0{,}0257 & -0{,}0024 \\ 0{,}0046 & 0{,}0498 \end{bmatrix}$$

Les facteurs d'amortissement des 2 modes, déterminés de : $\frac{\omega_i^2}{40} = 2\delta_i\omega_i$,

sont : $\delta_1 = \frac{\omega_1}{80} = 0{,}1364$ et $\delta_2 = \frac{\omega_2}{80} = 0{,}5324$

Alors les pulsations propres amorties sont : $\omega_{a_i} = \omega_i\sqrt{1 - \delta_i^2}$

soit : $\omega_{a_1} = 10{,}809$ rad/s et $\omega_{a_2} = 36{,}055$ rad/s

c) En posant : $\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = [P]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

on obtient le système aux variables modales :

$$(\Sigma) \qquad y_i'' + \frac{\omega_i^2}{40} y_i' + \omega_i^2 y_i = \Delta_i \qquad , \qquad i = 1 \text{ ou } 2$$

avec $\{\Delta\} = [P]^T\begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0046\delta_0 \\ 0{,}0498\delta_0 \end{bmatrix}$

Les variations des coordonnées modales dues à l'impulsion unitaire (Dirac) $\delta_0(t)$ (nulle en dehors de $t = 0$ où elle vaut 1) appliquée au système physique, sont :

$$y_i = \frac{p_{2i}}{\omega_{a_i}} e^{-\delta_i\omega_i t} \sin\omega_{a_i} t$$

soit explicitement :

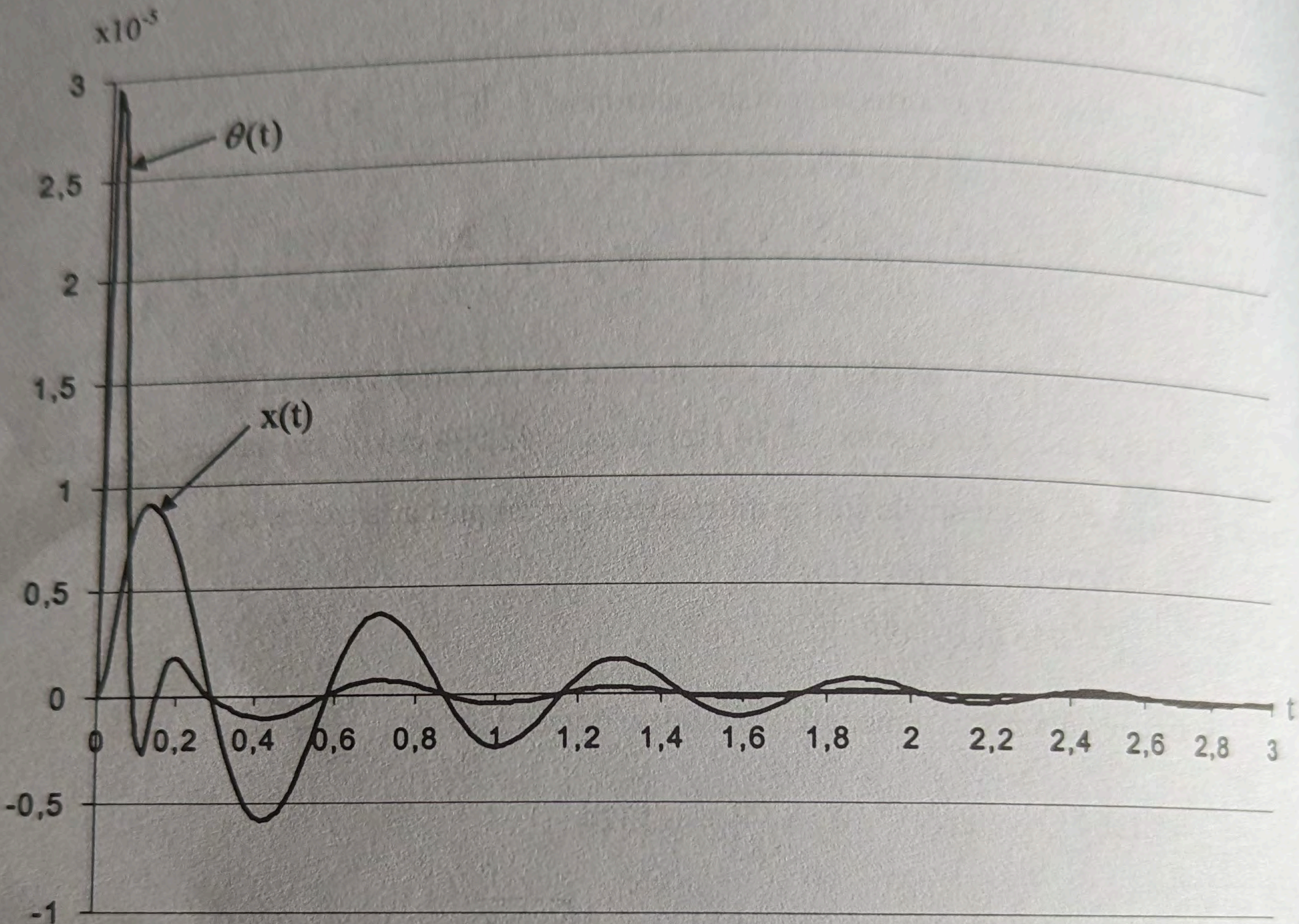
$$y_1 = \frac{0{,}0046}{10{,}809} e^{-1{,}4882t} \sin 10{,}809t$$

$$y_2 = \frac{0{,}0498}{36{,}055} e^{-22{,}677t} \sin 36{,}055t$$

c) Ainsi le déplacement x (pompage) du centre de masse G du véhicule et sa rotation θ (tangage) autour de $G\vec{z}$, sont :

$$x(t) = 1{,}093\ e^{-1{,}4882t} \sin 10{,}809t - 0{,}331\ e^{-22{,}677t} \sin 36{,}055t\ , \quad \text{en } 10^{-5}\ \text{m}$$

$$\theta(t) = 0{,}195\ e^{-1{,}4882t} \sin 10{,}809t + 6{,}878\ e^{-22{,}677t} \sin 36{,}055t\ , \quad \text{en } 10^{-5}\ \text{rad}$$



θ est initialement davantage excité (par le deuxième mode) mais ses oscillations sont plus vite amorties. Les amplitudes des oscillations forcées seront proportionnelles à l'amplitude d'une impulsion non unitaire.

E32 : MODELISATION DE LA SUSPENSION COMPLETE D'UN VEHICULE

Si on ajoute au modèle de la suspension de l'exercice précédent, les caractéristiques des roues : masse m, raideur k_2 et constante d'amortissement visqueux c_2 (pour chaque train), on a un système à 4 degrés de liberté.

1°) Ecrire ses équations des petits mouvements libres.
2°) Donner ses matrices de masse, d'amortissement et de raideur.
3°) Déterminer ses modes propres dans le cas de l'application numérique :

$\ell_1 = 2\ell_2 = 2{,}4$ m
$m = 50$ kg, $M = 1500$ kg, $J = 400$ kg.m^2
$c_1 = 2$ kNs/m, $k_1 = 90$ kN/m
$c_2 = 0{,}5$ kNs/m, $k_2 = 10$ kN/m