



Soit une boule homogène de rayon  $r$  et de masse  $M$ , un référentiel  $R_b$  est lié à ce solide. La boule roule sans glisser sur un plan incliné, dont l'angle d'inclinaison  $\alpha(t)$  est variable. Un référentiel non galiléen  $R = (O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  est lié à ce plan. Et  $R_0 = (O, \hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$  est un référentiel galiléen immobile par rapport au sol. Voir l'image pour une description visuelle de la situation.

Comme on peut le voir,  $R$  et  $R_0$  ont la même origine et  $\hat{z}_0 = \hat{z}$ . Le vecteur de rotation instantané entre ces deux référentiels est  $\vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\alpha} \hat{z}$ .

La boule est soumise à trois actions, le poids  $\vec{P}$ , la réaction normale du plan  $\vec{N}$  et la force de frottement (réaction tangentielle)  $\vec{T} = T \hat{x}$ .

Par rapport au centre de masse de la balle  $G$ , ces actions sont représentées par les torseurs suivants {résultante, moment} :

$$\mathcal{F}_P = \{M\vec{g}, \vec{0}\}_G$$

$$\mathcal{F}_N = \{\vec{N}, \vec{0}\}_G$$

$$\mathcal{F}_T = \{\vec{T}, rT\hat{z}\}_G$$

### **Application du principe de la dynamique**

Le PFD dans  $R_0$ , en  $G$ , donne  $\mathcal{D} = \mathcal{F}_P + \mathcal{F}_N + \mathcal{F}_T$

(où  $\mathcal{D} = \{M\vec{a}(G/R), \vec{\delta}(G/R)\}_G$  est le torseur dynamique).

On a donc  $M\vec{a}(G/R_0) = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$  (théorème du centre de masse), la formule de composition des accélérations donne  $\vec{a}(G/R_0) = \vec{a}_r(G) + \vec{a}_c(G) + \vec{a}_e(G)$ .

Avec (on notera pour alléger  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(R/R_0)$ )

$$\vec{a}_r(G) = \vec{a}(G/R) = \ddot{x} \hat{x}$$

$$\vec{a}_c(G) = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}(G/R) = 2\dot{\alpha} \hat{z} \times \dot{x} \hat{x} = 2\dot{\alpha} \dot{x} \hat{y}$$

$$\vec{a}_e(G) = \vec{a}(O/R_0) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OG}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{OG}$$

On calcule  $\vec{a}_e(G) = -x\dot{\alpha}^2\hat{x} + x\ddot{\alpha}\hat{y}$

Finalement, le théorème du centre de masse s'écrit :

$$M\left((\ddot{x} - x\dot{\alpha}^2)\hat{x} + (x\ddot{\alpha} + 2\dot{x}\dot{\alpha})\hat{y}\right) = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

En projetant sur  $\hat{x}$ , on a :

$$M\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 = -Mg \sin(\alpha) + T$$

### Détermination de $T$

Il reste à déterminer  $T$ . Pour cela on utilise le théorème du moment dynamique en  $G$  :

$$\vec{\delta}(G/R_0) = rT\hat{z}.$$

Comme on travaille en  $G$ , on a :

$$\vec{\delta}(G/R_0) = \dot{\vec{\sigma}}(G/R_0), \text{ où } \vec{\sigma}(G/R_0) \text{ est le moment cinétique de la boule en } G.$$

On a de plus (toujours car on travaille en  $G$ ) :  $\vec{\sigma}(G/R_0) = \vec{\sigma}(G/R_G)$ , où  $R_G$  est le référentiel barycentrique lié à  $R_0$  (i.e le référentiel dont l'origine est en  $G$  et dont les axes ont la même orientation que ceux de  $R_0$ ).

Dans  $R_G$ , la boule est en rotation autour de l'axe fixe  $\Delta$  qui passe par  $G$  et de direction  $\hat{z}$ , le vecteur de rotation instantanée associé est  $\vec{\Omega}(R_b/R_G) = \vec{\Omega}(R_b/R_0) = \omega\hat{z}$ . On a alors :

$$\vec{\sigma}(G/R_G) \cdot \hat{z} = I_\Delta\omega, \text{ où } I_\Delta \text{ est le moment d'inertie de la boule par rapport à } \Delta.$$

Le vecteur  $\hat{z}$  étant fixe dans  $R_0$ , on a  $rT = \vec{\delta}(G/R_0) \cdot \hat{z} = \dot{\vec{\sigma}}(G/R_0) \cdot \hat{z} = I_\Delta\dot{\omega}$ .

Donc  $T = \frac{I_\Delta}{r}\dot{\omega}$ . On peut alors écrire :

$$M\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 = -Mg \sin(\alpha) + \frac{I_\Delta}{r}\dot{\omega}$$

Pour trouver une relation entre  $\omega$  et  $x$ , on écrit la condition de roulement sans glissement.

### Roulement sans glissement

La boule ne glisse pas sur le plan, donc la vitesse du point de contact  $C$  entre la boule et le plan est nulle dans le référentiel du plan  $R$  :  $\vec{v}(C/R) = \vec{0}$ . La boule étant un solide, on peut utiliser la formule de Varignon pour le champ de vitesses de la boule. On a :

$$\vec{v}(G/R) = \vec{v}(C/R) + \vec{\Omega}(R_b/R) \times \overrightarrow{CG} = \vec{\Omega}(R_b/R) \times r\hat{y}$$

Pour le vecteur de rotation instantanée, on a :

$$\vec{\Omega}(R_b/R) = \vec{\Omega}(R_b/R_0) + \vec{\Omega}(R_0/R) = \omega \hat{z} - \dot{\alpha} \hat{z}$$

Finalement,  $\vec{v}(G/R) = -r\omega \hat{x} + r\dot{\alpha} \hat{x}$  et  $\vec{v}(G/R) = \dot{x} \hat{x}$ , on la relation  $\dot{x} = -r\omega + r\dot{\alpha}$ .

En dérivant et isolant  $\dot{\omega}$ , on trouve  $\dot{\omega} = \ddot{\alpha} - \frac{\dot{x}}{r}$ .

L'équation finale est alors :

$$M\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 = -Mg \sin(\alpha) + \frac{I_{\Delta}}{r}(\ddot{\alpha} - \frac{\dot{x}}{r})$$

c'est-à-dire :

$$\left(M + \frac{I_{\Delta}}{r^2}\right)\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 + Mg \sin(\alpha) - \frac{I_{\Delta}}{r}\ddot{\alpha} = 0$$