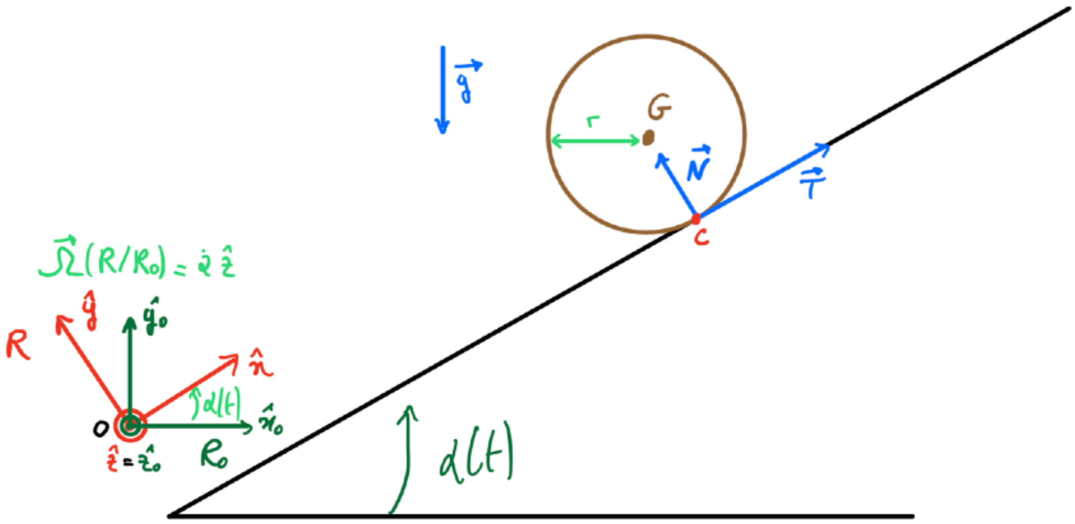

Soit une boule homogène de rayon r et de masse M, un référentiel R_b est lié à ce solide. La boule roule sans glisser sur un plan incliné, dont l'angle d'inclinaison $\alpha(t)$ est variable. Un référentiel non galiléen $R = (O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ est lié à ce plan. Et $R_0 = (O, \hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0)$ est un référentiel galiléen immobile par rapport au sol. Voir l'image pour une description visuelle de la situation.

Comme on peut le voir, R et R_0 ont la même origine et $\hat{z}_0 = \hat{z}$. Le vecteur de rotation instantané entre ces deux référentiels est $\overrightarrow{\Omega}(R/R_0) = \dot{\alpha}\hat{z}$.

La boule est soumise à trois actions, le poids $\overrightarrow{P}$, la réaction normale du plan $\overrightarrow{N}$ et la force de frottement (réaction tangentielle) $\overrightarrow{T} = T\hat{x}$.

Par rapport au centre de masse de la balle G, ces actions sont représentées par les torseurs suivants {résultante, moment} :

$\mathscr{F}_P = \{M\vec{g}, \vec{0}\}_G$

$\mathscr{F}_N = \{\overrightarrow{N}, \vec{0}\}_G$

$\mathscr{F}_T = \{\overrightarrow{T}, rT\hat{z}\}_G$

<u>Application du principe de la dynamique</u>

Le PFD dans R_0, en G,donne $\mathscr{D} = \mathscr{F}_P + \mathscr{F}_N + \mathscr{F}_T$

(où $\mathscr{D} = \{M\vec{a}(G/R), \vec{\delta}(G/R)\}_G$ est le torseur dynamique).

On a donc $M\vec{a}(G/R_0) = M\vec{g} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$ (théorème du centre de masse), la formule de composition des accélérations donne $\vec{a}(G/R_0) = \vec{a}_r(G) + \vec{a}_c(G) + \vec{a}_e(G)$.

Avec (on notera pour alléger $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}(R/R_0)$)

$\vec{a}_r(G) = \vec{a}(G/R) = \ddot{x}\hat{x}$

$\vec{a}_c(G) = 2\overrightarrow{\Omega} \times \vec{v}(G/R) = 2\dot{\alpha}\hat{z} \times \dot{x}\hat{x} = 2\dot{\alpha}\dot{x}\hat{y}$

$\vec{a}_e(G) = \vec{a}(O/R_0) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OG}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \overrightarrow{OG}$

On calcule $\vec{a}_e(G) = -x\dot{\alpha}^2\hat{x} + x\ddot{\alpha}\,\hat{y}$

Finalement, le théorème du centre de masse s'écrit :

$$M\Big((\ddot{x} - x\dot{\alpha}^2)\hat{x} + (x\ddot{\alpha} + 2\dot{x}\dot{\alpha})\hat{y}\Big) = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

En projetant sur $\hat{x}$, on a :

$$M\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 = -Mg\sin(\alpha) + T$$

__Détermination de T__

Il reste à déterminer T. Pour cela on utilise le théorème du moment dynamique en G :

$\vec{\delta}(G/R_0) = rT\hat{z}$.

Comme on travaille en G, on a :

$\vec{\delta}(G/R_0) = \dot{\vec{\sigma}}(G/R_0)$, où $\vec{\sigma}(G/R_0)$ est le moment cinétique de la boule en G.

On a de plus (toujours car on travaille en G) : $\vec{\sigma}(G/R_0) = \vec{\sigma}(G/R_G)$, où R_G est le référentiel barycentrique lié à R_0 (i.e le référentiel dont l'origine est en G et dont les axes ont la même orientation que ceux de R_0).

Dans R_G, la boule est en rotation autour de l'axe fixe Δ qui passe par G et de direction $\hat{z}$, le vecteur de rotation instantanée associé est $\vec{\Omega}(R_b/R_G) = \vec{\Omega}(R_b/R_0) = \omega\hat{z}$. On a alors :

$\vec{\sigma}(G/R_G) \cdot \hat{z} = I_\Delta\omega$, où I_Δ est le moment d'inertie de la boule par rapport à Δ.

Le vecteur $\hat{z}$ étant fixe dans R_0, on a $rT = \vec{\delta}(G/R_0) \cdot \hat{z} = \dot{\vec{\sigma}}(G/R_0) \cdot \hat{z} = I_\Delta\dot{\omega}$.

Donc $T = \dfrac{I_\Delta}{r}\dot{\omega}$. On peut alors écrire :

$$M\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 = -Mg\sin(\alpha) + \frac{I_\Delta}{r}\dot{\omega}$$

Pour trouver une relation entre ω et x, on écrit la condition de roulement sans glissement.

__Roulement sans glissement__

La boule ne glisse pas sur le plan, donc la vitesse du point de contact C entre la boule et le plan est nulle dans le référentiel du plan R : $\vec{v}(C/R) = \vec{0}$. La boule étant un solide, on peut utiliser la formule de Varignon pour le champ de vitesses de la boule. On a :

$$\vec{v}(G/R) = \vec{v}(C/R) + \vec{\Omega}(R_b/R) \times \overrightarrow{CG} = \vec{\Omega}(R_b/R) \times r\,\hat{y}$$

Pour le vecteur de rotation instantanée, on a :

$\overrightarrow{\Omega}(R_b/R) = \overrightarrow{\Omega}(R_b/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_0/R) = \omega\hat{z} - \dot{\alpha}\hat{z}$

Finalement, $\vec{v}(G/R) = -r\omega\hat{x} + r\dot{\alpha}\hat{x}$ et $\vec{v}(G/R) = \dot{x}\hat{x}$, on la relation $\dot{x} = -r\omega + r\dot{\alpha}$.

En dérivant et isolant $\dot{\omega}$, on trouve $\dot{\omega} = \ddot{\alpha} - \frac{\ddot{x}}{r}$.

L'équation finale est alors :

$M\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 = -Mg\sin(\alpha) + \frac{I_\Delta}{r}(\ddot{\alpha} - \frac{\ddot{x}}{r})$

c'est-à-dire :

$$\left(M + \frac{I_\Delta}{r^2}\right)\ddot{x} - Mx\dot{\alpha}^2 + Mg\sin(\alpha) - \frac{I_\Delta}{r}\ddot{\alpha} = 0$$