2.1. Décomposition modale et analyse de Fourier

Après avoir étudié individuellement les modes de l'onde stationnaire de la corde, nous allons maintenant déterminer de manière plus générale les solutions de l'équation des cordes, en adjoignant des conditions initiales (de forme et de vitesse) aux conditions aux limites [4]. On recherchera la solution générale sous forme d'une superposition de modes propres dérivés de ceux établis au cours de la séance 1. On parlera dans ce cas d'une approche *spectrale*, par analogie avec l'analyse de Fourier.

Pour émettre le son, on considère que la corde est pincée et lâchée à $t = 0$, de telle manière que sa vitesse initiale est nulle à cet instant. Le point x_0 où l'on pince la corde a une grande importance dans la constitution des harmoniques du son, formant sa caractéristique de « timbre ».

Les conditions sont donc les suivantes :

i) la forme intiale de la corde est donnée en tout point $x \in [0, L]$: $f(x) = y(x, 0)$,

ii) la vitesse initiale de la corde est nulle en tout point $v(x) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0, \forall x \in [0, L]$,

iii) deux points fixes : $y(0, t) = y(L, t) = 0$, formant des conditions aux limites de type « Dirichlet ».

1) Comment nomme-t-on les conditions initiales i) et ii) ?

2) Comme lors de la séance 1, on recherche une solution générale de l'équation (7) sous une forme séparable $y(x, t) = u(x)v(t)$. Montrer dans ce cas que les fonctions u et v sont de la forme :

$$\begin{cases} u(x) = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x) \\ v(t) = A_2 \cos(\lambda ct) + B_2(\sin \lambda ct) \end{cases} \tag{4}$$

où λ, A_i et B_i sont des constantes réelles.

3) Déterminer les valeurs des paramètres λ, A_i, B_i en fonction des conditions aux limites et des conditions initiales. En déduire l'expression de l'amplitude d'un mode $y_n(x, t)$.

4) La solution générale étant une superposition (infinie de modes), montrer qu'elle s'exprime par

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \omega_n t \cdot \sin k_n x \tag{5}$$

avec ω_n et k_n à exprimer en fonction des paramètres physiques de la corde L, T et μ.

5) En déduire que la forme initiale de la corde vérifie le développement :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6}$$

Pour identifier les coefficients a_n du développement 6, on va considérer la fonction $F(x)$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaire et périodique de période $2L$, qui coïncide sur $[0, L]$ avec la fonctions f (voir schéma figure 3.a). De même, on notera $V(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaire et périodique de période $2L$, qui coïncide sur $[0, L]$ avec la fonction vitesse v.

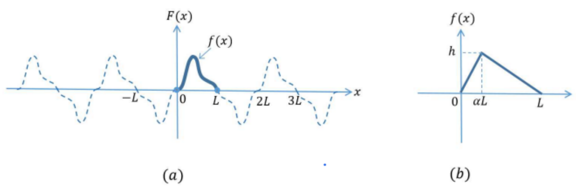


FIGURE 3 – *a) Représentation des conditions initiales de la corde vibrante : a) fonction « périodisée » et b) cas particulier d'une corde pincée sans vitesse initiale.*

2.2. Vers la notion de « timbre » d'un instrument

6) Montrer que les coefficients a_n de l'expression (6) apparaissent comme les coefficients du développement en série de Fourier de F. C ... nt ...).

7) On donne la fonction f sur la figure 3.b. On considèrera $0 \leq \alpha \leq 1$. Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in [0, L]$.

8) Calculer les coefficients a_n dans le cas particulier où $\alpha = 1/2$.

9) Par une méthode de votre choix, représenter les variations d'amplitude de la corde $y(x, t)$, pour $h = 4\text{mm}$, $L = 0,7\text{m}$ et $c = 40\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Même chose pour la vitesse de la corde en tout (x, t).

la corde en tout (x, t).

10) Montrer que les coefficients a_n et b_n se déduisent simplement de la décomposition en série de Fourier des fonctions $\hat{f}$ et $\hat{v}$ définies sur R tout entier, impaires et périodiques de période $2L$, qui coïncident sur $[0, L]$ avec les fonctions f et v.

11) On s'intéresse au problème de la *corde pincée* (guitare ou clavecin). La corde de longueur L est pincée, puis lâchée sans vitesse initiale à $t = 0$.

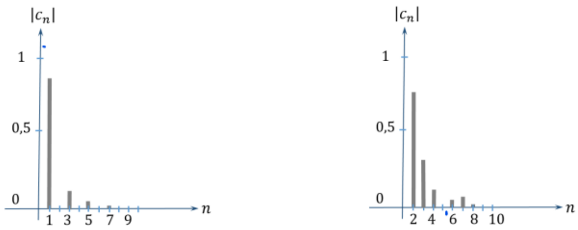
12) Que valent les coefficients b_n ? Comment peut-on déterminer les coefficients a_n ?

13) La figure 4 fournit la répartition spectrale de la puissance calculée pour une corde pincée à la moitié de sa longueur (a), puis au cinquième de celle-ci (b). On a $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Comment peut-on expliquer, dans le cadre de la modélisation précédente, l'absence de certaines harmoniques ?

14) On s'intéresse maintenant au problème de la corde frappée. Une corde de piano est frappée par un petit marteau à la distance $x_0 = \alpha L$ de son extrémité $x = 0$.

   a) Donner les valeurs des coefficients a_n ? Comment choisir α si l'on veut imposer l'amplitude de l'harmonique n la plus petite possible ?

   b) On peut montrer que les coefficients a_n associés à la corde pincée décroissent en $1/n^2$, alors que les amplitudes des harmoniques de la corde frappée décroissent en $1/n$. En déduire une comparaison qualitative des sons d'un piano et d'un clavecin.



(a) (b)