Démonstration :

On se place dans le cas où le hamiltonien $\hat{\mathbf{H}}$ ne dépend pas du temps. Dans le cours, nous avions écrit au paragraphe précédent que $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{t},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t})$, l'opérateur d'évolution, pouvait s'écrire au 1[er] ordre de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{t},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t})=\hat{\mathbf{1}}-\frac{\mathbf{i}\delta\mathbf{t}}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}$$

Et nous avions aussi vu que $\hat{\mathbf{U}}$ était régi par la loi de groupe $\hat{\mathbf{U}}(\tau_1+\tau_2) = \hat{\mathbf{U}}(\tau_1)\hat{\mathbf{U}}(\tau_2)$, soit ici :

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t})=\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{t},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t})\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})$$

En remplaçant dans cette égalité $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{t},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t})$ par son expression, on obtient donc :

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t}) = \left(\hat{\mathbf{1}}-\frac{\mathbf{i}\delta\mathbf{t}}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}\right)\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})$$

On développe :

$$\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})-\frac{\mathbf{i}\delta\mathbf{t}}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})$$

On soutraie $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})$ et on multiplie par $\frac{\mathbf{i}\hbar}{\delta\mathbf{t}}$:

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t})-\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})}{\delta\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})$$

Et par définition, lorsque l'on fait tendre $\delta\mathbf{t}$ vers $\mathbf{0}$, $\frac{\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t}+\delta\mathbf{t})-\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})}{\delta\mathbf{t}}$ est l'expression de la dérivée par rapport au temps de $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})$: $\frac{\mathbf{d}\,\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} = \lim_{\mathbf{dt}\to\mathbf{0}}\frac{\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t}+\mathbf{dt})-\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})}{\mathbf{dt}}$

Et donc :

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial\,\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})}{\partial\,\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{0},\mathbf{t})$$