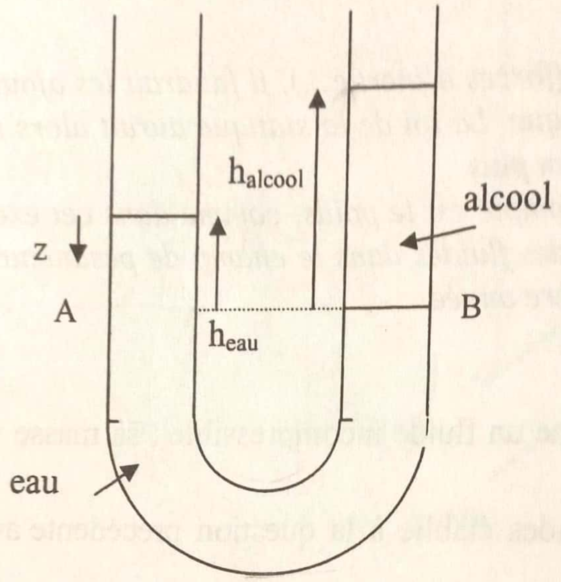
TD 2 : Oscillations de fluides non miscibles dans un tube en U

Dans un tube en U de section S on verse deux liquides non miscibles (eau de masse volumique ρ_{eau} et alcool de masse volumique ρ_{alcool}).

On note h_{eau} et h_{alcool} les hauteurs des liquides au-dessus de la surface de séparation.

On note l ligne moyenne d'une extrémité à l'autre de la surface.



Données : $\rho_{eau} = 10^3\,kg.m^{-3}; \rho_{alcool} = 0{,}6.10^3\,kg.m^{-3}; h_{alcool} = 15cm; l = 1m$.

1. Etablir la relation entre $\rho_{eau}, h_{eau}, \rho_{alcool}, h_{alcool}$. Calculer h_{eau}.

On écarte les liquides par rapport à leur position d'équilibre d'une altitude z, petite devant les hauteurs mises en jeu (h_{eau}, h_{alcool}).

2. Etablir l'expression de l'énergie cinétique $E_c(z)$ pour l'ensemble des liquides en fonction de $\dot{z}, S, l, h_{eau}, \rho_{eau}$ et ρ_{alcool}.
3. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(z)$ pour l'ensemble des liquides, en fonction de z, S, ρ_{eau}, à une constante près.
4. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique pour l'ensemble des liquides, en déduire l'équation différentielle en z des petites oscillations. En déduire la période T des petites oscillations en fonction de $h_{alcool}, \rho_{eau}, \rho_{alcool}, l$.
   Calculer T.

Solution

1.

En utilisant l'isobare dans le fluide homogène eau : $P(A) = P(B)$.

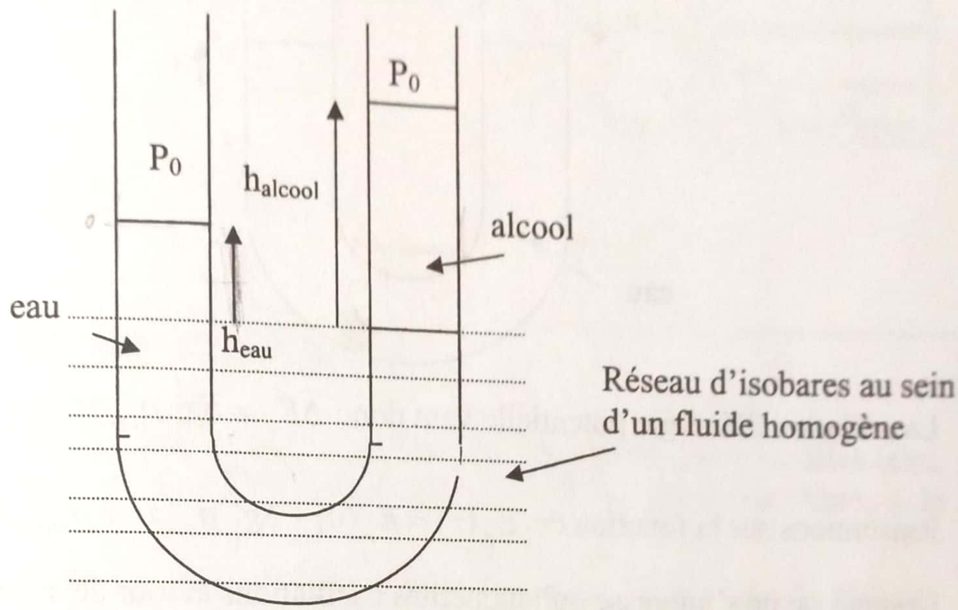
$P(A) = \rho_{eau} g h_{eau} + P_0$ et $P(B) = \rho_{alcool} g h_{alcool} + P_0$

$\boxed{\rho_{eau}\, h_{eau} = \rho_{alcool}\, h_{alcool}}$

A.N. : $h_{eau} = \dfrac{\rho_{alcool}\, h_{alcool}}{\rho_{eau}} = \dfrac{0{,}6.10^3 * 15.10^{-2}}{10^3} = \underline{9\,cm}$.

❖ *Note*

Par définition, une isobare est une surface telle que $P = cste$.
La loi de la statique des fluides dans le champ de pesanteur s'écrit : $dP = \rho g dz$.
Pour un fluide homogène incompressible, les isobares sont donc des surfaces planes à $z = cste$.



Ceci n'est plus vrai dans le cas de plusieurs fluides incompressibles non miscibles :

- *On remarque que l'isobare à P_0 n'est pas une surface plane : il y a une dénivellation entre les deux branches du tube.*
- *Les isobares planes ne se trouvent qu'au sein d'un même fluide incompressible.*

2.

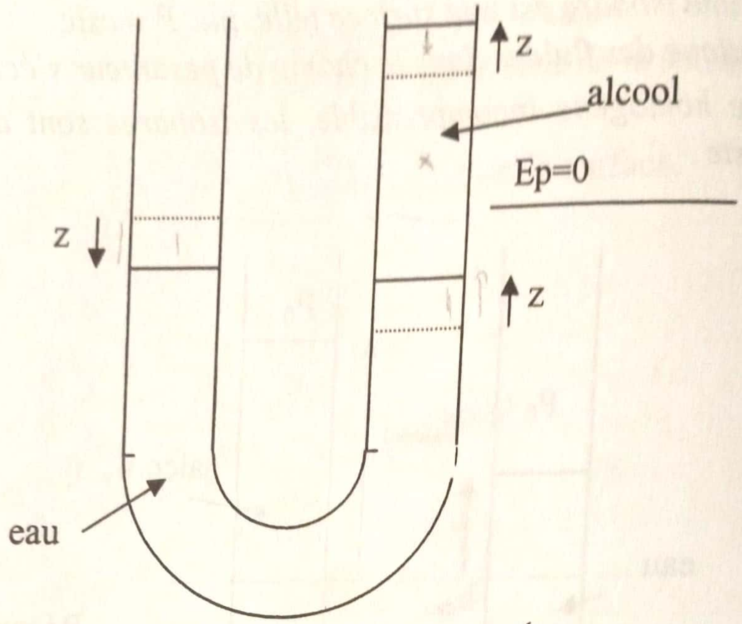
Prenons comme système fermé $\Sigma = \{eau + alcool\}$.
La masse totale de ce système vaut
$m = (h_{eau}S)\rho_{eau} + (h_{alcool}S)\rho_{alcool} = S((l - h_{eau})\rho_{eau} + h_{alcool}\rho_{aloccol})$.
Elle oscille à la vitesse $\dot{z}$.
L'énergie cinétique pour l'ensemble du fluide vaut :

$$E_c(z) = \frac{1}{2} S((l - h_{eau})\rho_{eau} + h_{alcool}\rho_{alcool})\dot{z}^2 .$$

3.

Prenons comme origine des potentiels l'isobare passant par l'interface entre les deux liquides.
Pour le liquide eau : le volume Sz de masse $\rho_{eau} S z$ à gauche se retrouve à droite, élevé d'une altitude de z.

Pour le liquide alcool : le centre de gravité du volume $S\,h_{alcool}$ de masse $S\,h_{alcool}\,\rho_{alcool}$ s'élève d'une altitude de $\frac{z}{2}$.



La variation d'énergie potentielle vaut donc $\Delta E_p = Sg\left(\rho_{eau} z^2 + \rho_{alcool} h_{alcool} \frac{z}{2}\right)$.

Raisonnons sur la fonction de $E_p(z) = E_p(0) + Sg\left(\rho_{eau} z^2 + \rho_{alcool} h_{alcool} \frac{z}{2}\right)$.

Comme on ne s'intéresse qu'aux petites oscillations autour de $z = 0$, transformons ce potentiel en un potentiel harmonique , autour de la position d'équilibre $z = 0$.
Un développement limité à l'ordre deux en $z = 0$ donne :

$$E_p(z) = E_p(0) + \left(\frac{\delta E_p}{\delta z}\right)_{z=0} z + \left(\frac{\delta^2 E_p}{\delta z^2}\right)_{z=0} z^2 .$$

$\left(\frac{\delta E_p}{\delta z}\right)_{z=0} = 0$ car il s'agit d'une position d'équilibre.

$\left(\frac{\delta^2 E_p}{\delta z^2}\right)_{z=0} = 2g\rho_{eau} S$.

donc $\boxed{E_p(z) = E_p(0) + 2g\rho_{eau} S\, z^2}$ au voisinage de z = 0.

4.

En négligeant toutes les forces dissipatives (comme le frottement visqueux), l'énergie mécanique se conserve dans le temps, au cours du mouvement.
$E_m = E_c + E_p = cste$

$$\frac{1}{2} S\left((l - h_{alcool})\rho_{eau} + h_{alcool}\rho_{alcool}\right)\dot{z}^2 + Sg\rho_{eau} z^2 = cste$$

En dérivant par rapport au temps,

$$\dot{z}\ddot{z} S\left((l - h_{alcool})\rho_{eau} + h_{alcool}\rho_{alcool}\right) + 2Sg\rho_{eau} z\dot{z} = 0$$

$$\boxed{\ddot{z}+\frac{2g\rho_{eau}}{((l-h_{alcool})\rho_{eau}+h_{alcool}\rho_{alcool})}z=0}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique libre de la forme : $\ddot{z}+w_0{}^2z=0$.

La pulsation propre des oscillations est : $\boxed{w_0=\sqrt{\frac{2g\rho_{eau}}{(l-h_{alcool})\rho_{eau}+h_{alcool}\rho_{alcool}}}}$.

La période propre des oscillations est : $\boxed{T_0=\frac{2\pi}{w_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g\rho_{eau}}{(l-h_{alcool})\rho_{eau}+h_{alcool}\rho_{alcool}}}}}$.

A.N. : $w_0=\underline{4{,}57\,rad.s^{-1}}$; $T_0=\underline{1{,}37s}$.

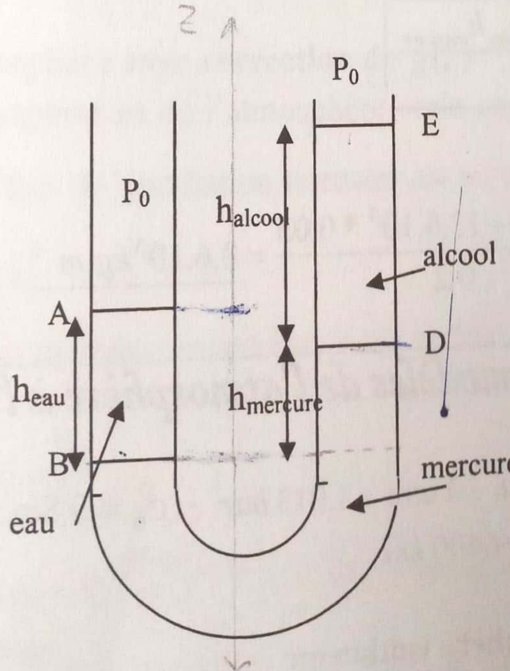
TD 3 : Trois fluides non miscibles

Un système de trois liquides incompressibles, homogènes et non miscibles (eau, alcool, mercure) est en équilibre dans un tube en U ouvert à l'air libre, à la pression P_0.

Les hauteurs respectives d'eau et d'alcool h_{eau} et h_{alcool}, ainsi que la distance entre les niveaux de mercure $h_{mercure}$ sont indiquées sur la figure.

Données :

$h_{eau}=0{,}8m; h_{mercure}=0{,}05m; h_{alcool}=0{,}2m; \rho_{eau}=10^3kg.m^{-3}; \rho_{mercure}=13{,}6.10^3kg.m^{-3}$.



1. Exprimer ρ_{alcool} en fonction de ρ_{eau}, $\rho_{mercure}$, h_{eau}, $h_{mercure}$ et h_{alcool}.
2. Calculer ρ_{alcool}.