Le problème :

Bilan global :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{ext} = \vec{F}_s^{ext} + \vec{F}_v^{ext}$$
$$\vec{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\mathrm{d}V$$
$$\vec{F}_s^{ext} = \int_{\mathcal{S}} \vec{f}_s^{ext}(\vec{r},t)\mathrm{d}S$$
$$\vec{F}_v^{ext} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f}_v^{ext}(\vec{r},t)\mathrm{d}V$$

Théorème de Cauchy sur les forces surfaciques :

$$\forall \vec{r} \in \mathcal{S} \; \vec{f}_s^{ext}(\vec{r},t)\mathrm{d}S = \boldsymbol{\sigma}(\vec{r},t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

On reformule :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}(\vec{r},t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{\mathcal{V}} \vec{f}_v^{ext}(\vec{r},t)\mathrm{d}V$$

Ici j'applique le théorème de Green-Ostrogradski alors que $\boldsymbol{\sigma}$ n'est a priori pas défini sur tout $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}(\vec{r},t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\vec{r},t)\mathrm{d}V$$

On regroupe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\vec{r},t) + \vec{f}_v^{ext}(\vec{r},t))\mathrm{d}V$$

J'utilise le théorème de transport de Reynolds :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v})(\vec{r},t)\right)\mathrm{d}V$$

On regroupe encore :

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v})(\vec{r},t)) - \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\vec{r},t) - \vec{f}_v^{ext}(\vec{r},t)\right)\mathrm{d}V{=}0$$

C'est valide pour tout $\mathcal{V}$, donc l'intégrande est nulle, donc finalement :

$$\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f}_v^{ext}$$

Or souvent on a $\vec{f}_v^{ext} = \vec{f}_v$, on prend aussi en compte les forces intérieures. Par exemple, en astrophysique, on prend souvent :

$\vec{f}_v = \rho_c(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ou $\vec{f}_v = \rho\vec{\mathcal{G}}$ les forces de Lorentz et de gravitation, prenant en compte dans les champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ les champs internes au milieu.