[TIPE: Perturbations de l'orbite de Mars par les astéroïdes]

Procédure de Runge Kutta d'ordre 4, en deux dimensions (x et y) :

Je pose $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ vx \\ vy \end{bmatrix}$ et $U' = V = \begin{bmatrix} vx \\ vy \\ ax \\ ay \end{bmatrix}$

on a l'équation différentielle $U' = f(U) = f(U_1, U_2, U_3, U_4) = \begin{bmatrix} f_1(U) \\ f_2(U) \\ f_3(U) \\ f_4(U) \end{bmatrix}$

avec:
$f_1(U) = U_3$
$f_2(U) = U_4$

En appliquant le PFD au corps a que l'on étudie, on a $m.a = F(b \to a) = \frac{-GM}{r^2}$ avec M, masse du corps b et m masse de a (on s'intéresse à l'influence de tous les corps b sur la position et la vitesse du corps a), d'où:
$f_3(U) = \frac{-GMU_1}{(U_1^2+U_2^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(= \frac{-GM}{r^2}\cos(\theta))$
$f_4(U) = \frac{-GMU_2}{(U_1^2+U_2^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(= \frac{-GM}{r^2}\sin(\theta))$

Avec la méthode d'Euler, on aurait:
$U_i(t + dt) = U_i(t) + dtV_i(t)$

Avec la méthode de Runge Kutta, on a:
$U_i(t + dt) = U_i(t) + \frac{dt}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4})$

avec:
$k_{11} = f_1(U(t)) = f_1(U_1(t), U_2(t), U_3(t), U_4(t)) = U_3(t) = vx(t)$
et on trouve de même:
$k_{21} = f_2(U(t)) = U_4(t) = vy(t)$

$k_{31} = f_3(U(t)) = \frac{-GMx(t)}{(x^2(t)+y^2(t))^{\frac{3}{2}}} = ax(t)$

$k_{41} = f_4(U(t)) = \frac{-GMy(t)}{(x^2(t)+y^2(t))^{\frac{3}{2}}} = ay(t)$

ensuite:
(pente au milieu de l'intervalle (donc en $\frac{dt}{2}$), calculée avec les k_{i1})
$k_{12} = f_1(U_1 + \frac{dt}{2}k_{11}, U_2 + \frac{dt}{2}k_{21}, U_3 + \frac{dt}{2}k_{31}, U_4 + \frac{dt}{2}k_{41}) = U_3 + \frac{dt}{2}k_{31}$
$= vx(t) + \frac{dt}{2}ax(t)$

$k_{22} = f_2(U_1 + \frac{dt}{2}k_{11}, U_2 + \frac{dt}{2}k_{21}, U_3 + \frac{dt}{2}k_{31}, U_4 + \frac{dt}{2}k_{41}) = U_4 + \frac{dt}{2}k_{41}$
$= vy(t) + \frac{dt}{2}ay(t)$

$$k_{32} = f_3(U_1+\frac{dt}{2}k_{11}, U_2+\frac{dt}{2}k_{21}, U_3+\frac{dt}{2}k_{31}, U_4+\frac{dt}{2}k_{41}) = \frac{-GM(U_1+\frac{dt}{2}k_{11})}{((U_1+\frac{dt}{2}k_{11})^2+(U_2+\frac{dt}{2}k_{21})^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-GM(x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$k_{42} = f_4(U_1+\frac{dt}{2}k_{11}, U_2+\frac{dt}{2}k_{21}, U_3+\frac{dt}{2}k_{31}, U_4+\frac{dt}{2}k_{41}) = \frac{-GM(U_2+\frac{dt}{2}k_{21})}{((U_1+\frac{dt}{2}k_{11})^2+(U_2+\frac{dt}{2}k_{21})^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-GM(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

puis:
(pente au milieu de l'intervalle, mais calculée cette fois-ci avec les k_{i2})
$$k_{13} = f_1(U_1 + \frac{dt}{2}k_{12}, U_2 + \frac{dt}{2}k_{22}, U_3 + \frac{dt}{2}k_{32}, U_4 + \frac{dt}{2}k_{42}) = U_3 + \frac{dt}{2}k_{32}$$
$$= vx(t) + \frac{dt}{2}\frac{-GM(x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$k_{23} = f_2(U_1 + \frac{dt}{2}k_{12}, U_2 + \frac{dt}{2}k_{22}, U_3 + \frac{dt}{2}k_{32}, U_4 + \frac{dt}{2}k_{42}) = U_4 + \frac{dt}{2}k_{42}$$
$$= vy(t) + \frac{dt}{2}\frac{-GM(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$k_{33} = f_3(U_1+\frac{dt}{2}k_{12}, U_2+\frac{dt}{2}k_{22}, U_3+\frac{dt}{2}k_{32}, U_4+\frac{dt}{2}k_{42}) = \frac{-GM(U_1+\frac{dt}{2}k_{12})}{((U_1+\frac{dt}{2}k_{12})^2+(U_2+\frac{dt}{2}k_{22})^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-GM(x(t)+\frac{dt}{2}vx(t)+\frac{dt^2}{4}ax(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t)+\frac{dt^2}{4}ax(t))^2+((y(t)+\frac{dt}{2}vy(t)+\frac{dt^2}{4}ay(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$k_{43} = f_4(U_1+\frac{dt}{2}k_{12}, U_2+\frac{dt}{2}k_{22}, U_3+\frac{dt}{2}k_{32}, U_4+\frac{dt}{2}k_{42}) = \frac{-GM(U_2+\frac{dt}{2}k_{22})}{((U_1+\frac{dt}{2}k_{12})^2+(U_2+\frac{dt}{2}k_{22})^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-GM(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t)+\frac{dt^2}{4}ay(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t)+\frac{dt^2}{4}ax(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t)+\frac{dt^2}{4}ay(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

enfin:
(pente de fin d'intervalle (donc en dt) calculée avec les k_{i3})
$$k_{14} = f_1(U_1 + dt.k_{13}, U_2 + dt.k_{23}, U_3 + dt.k_{33}, U_4 + dt.k_{43}) = U_3 + dt.k_{33}$$
$$= vx(t) + dt.\left[\frac{-GM(x(t)+\frac{dt}{2}vx(t)+\frac{dt^2}{4}ax(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t)+\frac{dt^2}{4}ax(t))^2+((y(t)+\frac{dt}{2}vy(t)+\frac{dt^2}{4}ay(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$
$$k_{24} = f_2(U_1 + dt.k_{13}, U_2 + dt.k_{23}, U_3 + dt.k_{33}, U_4 + dt.k_{43}) = U_4 + dt.k_{43}$$
$$= vy(t) + dt.\left[\frac{-GM(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t)+\frac{dt^2}{4}ay(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t)+\frac{dt^2}{4}ax(t))^2+((y(t)+\frac{dt}{2}vy(t)+\frac{dt^2}{4}ay(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$
$$k_{34} = f_3(U_1+dt.k_{13}, U_2+dt.k_{23}, U_3+dt.k_{33}, U_4+dt.k_{43}) = \frac{-GM(U_1+dt.k_{13})}{((U_1+dt.k_{13})^2+(U_2+dt.k_{23})^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-GM(x(t)+dt.\left[vx(t)+\frac{dt}{2}\frac{-GM(x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right])}{((x(t)+dt.\left[vx(t)+\frac{dt}{2}\frac{-GM(x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right])^2+(y(t)+dt.\left[vy(t)+\frac{dt}{2}\frac{-GM(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right])^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$k_{44} = f_4(U_1+dt.k_{13}, U_2+dt.k_{23}, U_3+dt.k_{33}, U_4+dt.k_{43}) = \frac{-GM(U_2+dt.k_{23})}{((U_1+dt.k_{13})^2+(U_2+dt.k_{23})^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{-GM(y(t)+dt.\left[vy(t)+\frac{dt}{2}\frac{-GM(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right])}{((x(t)+dt.\left[vx(t)+\frac{dt}{2}\frac{-GM(x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right])^2+(y(t)+dt.\left[vy(t)+\frac{dt}{2}\frac{-GM(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))}{((x(t)+\frac{dt}{2}vx(t))^2+(y(t)+\frac{dt}{2}vy(t))^2)^{\frac{3}{2}}}\right])^2)^{\frac{3}{2}}}$$