

Les anneaux partent de la hauteur h , leur altitude à t est $z(t)$.

Théorème de l'énergie cinétique pour une bague

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

$$v^2 = 2g(h - z(t))$$

Accélération normale dans la direction radiale avec α angle par rapport à la verticale et N action normale du cerceau sur la bague, application du principe fondamental de la dynamique sur la bague :

$$-m \frac{v^2}{R} = -mg \cos \alpha + N \text{ avec } \cos \alpha = \frac{z(t) - R}{R}$$

$$N = mg \frac{z - R}{R} - 2mg \frac{h - z}{R} = \frac{mg}{R} (3z - R - 2h)$$

Composante verticale de l'action des deux bagues sur le cerceau : $N_z = -2N \cos \alpha$

$$N_z = \frac{2mg}{R} \frac{z - R}{R} (R + 2h - 3z)$$

$$\frac{dN_z}{dz} = R + 2h - 3z - 3(z - R) = -6z + 2h + 4R \text{ à } \frac{2mg}{R^2} > 0 \text{ près}$$

s'annule pour $3z = 2R + h$ et $N_{z,\max} = 2mg \frac{(h - R)^2}{3R^2}$

Le cerceau décolle si $N_z > Mg$ soit $\frac{m}{M} > \frac{3}{2} \frac{R^2}{(h - R)^2}$