8. VAGUES DANS L'EAU.(1)

8.1 Types de vagues.

Quand on se trouve sur un bateau, le mouvement de l'eau rend beaucoup de personnes malades. C'est aussi le cas quand on se trouve dans la galère de calculer ce type de mouvement. En effet, les vagues dans l'eau ne sont ni des ondes transversales ni des ondes longitudinales. Elles sont un peu des deux. Les particules d'eau décrivent des cercles ou des ellipses, dans un plan vertical parallèle au déplacement de la vague. Le gros problème est qu'une des conditions limites se trouve à la surface de l'eau et que l'on ne sait pas où se trouve cette surface. C'est précisément une des inconnues.

Le problème est assez ardu pour que ce calcul ne figure pas dans les livres de physique générale. J'ai essayé de l'inclure ici en le simplifiant énormément et en ne gardant que les cas les plus simples. Le calcul qui suit peut être pris comme exemple de la façon comme les physiciens se simplifient la vie en faisant des approximations.

Nous ne calculerons pas l'équation d'onde. Nous devons calculer le mouvement des particules d'eau depuis la surface jusqu'au fond de l'eau, puisque le mouvement s'étend jusqu'au fond. Mais comme les particules décrivent des ellipses il faut au moins deux variables par point: il nous faut un champ vectoriel. Nous calculerons donc le champ vectoriel des vitesses des particules, mais nous ne le calculerons pas directement. Ce que nous allons trouver c'est un potentiel scalaire de vitesses dont le gradient sera le champ vectoriel de vitesses.

Un dernier mot sur les ondes que nous allons calculer. Ces ondes s'appellent **ondes de gravité**, parce que c'est le poids de l'eau qui sert de force de restitution pour faire descendre les sommets et remonter les creux. Sur l'eau on trouve un autre type d'ondes: **les ondes de capillarité**. Dans ces ondes les forces de restitution sont des forces dues à la tension superficielle. La surface d'un liquide se comporte comme une membrane élastique étirée, qui tend à réduire sa surface. Dans le cas de la surface de l'eau, la surface minimale est obtenue pour un plan lisse sans ondulations. Dans la réalité, toutes les vagues subissent les deux types de force de restitution et toutes les vagues sont un mélange des deux. Néanmoins, il s'avère que pour les vagues de longueur d'onde inférieure à $10\,cm$ les forces de capillarité prédominent alors que pour des longueurs d'onde supérieures à $10\,cm$ ce sont les forces de gravité qui prédominent. On peut donc dire que les grandes (en longueur d'onde) vagues de la mer et des lacs sont des vagues de gravité, alors que le petites vagues que l'on voit dans les mares ou dans le lavabo sont de ondes de capillarité.

---

(1) Dans ce chapitre, la déduction du potentiel scalaire de vitesses et le calcul des solutions, sont un extrait très simplifié des sections 3.1.1 et 3.1.2 du livre sur l'océan "A Course in Ocean Engineering" disponible sur le site http://www.dnv.com/ocean/bk/fly.htm. Les références complètes sont:

S.Gran: "A Course in Ocean Engineering". Developments in Marine Technology, Vol. 8. Elsevier Science Publishers, Amsterdam - London - New York - Tokyo 1992. ISBN: 0-444-88143-3.

8.2 Le potentiel scalaire de vitesses.

Nous allons faire des calculs dans le cas le plus simple: des ondes dans un canal de section rectangulaire et de largeur et profondeur constante. Ceci réduit les dimensions du problème à deux: la profondeur et la direction d'avance des vagues. Bien entendu, on négligera la friction sur le fond ou les parois du canal et... bien d'autres choses.

Le système de coordonnées choisi est:

x horizontal dans le sens d'avancement des vagues.

y horizontal dans le sens perpendiculaire à l'avancement des vagues (sens de la largeur du canal).

z vertical. Positif vers le haut. Le zéro choisi à la surface de l'eau non perturbée. Sous l'eau z sera négatif. La profondeur de l'eau est h. Donc le fond de l'eau se trouve à $z = -h$.

Aucune des variables ne dépend de y.

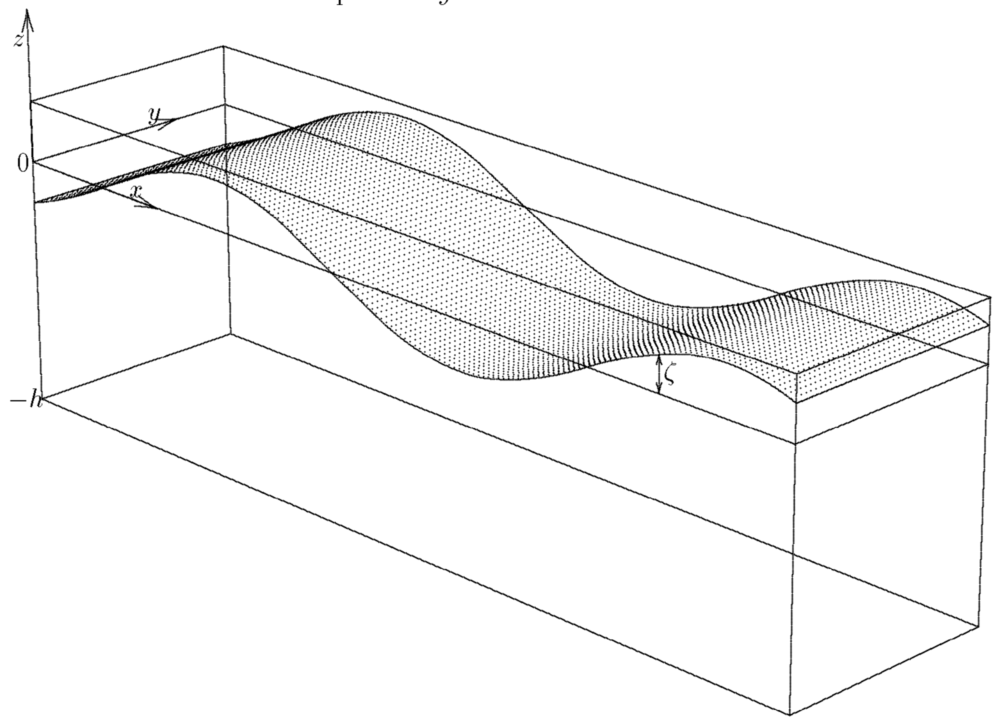

Figure 8.1 Le déplacement et la vitesse de chaque particule d'eau ne dépendent pas de y. La variable $\zeta(x,t)$ mesure la hauteur d'une particule d'eau (par rapport à la surface de l'eau en absence de vagues) au temps t. x est la position de la particule en absence de vagues.

Nos variables vont être:

Le champ vectoriel des vitesses $\vec{v}(x,z,t)$. La composante v_y est nulle. C'est l'équivalent des ondes planes étudiées pour d'autres types d'ondes. Les seules composantes de la vitesse sont donc, horizontalement, dans les sens des x et, verticalement, dans le sens des z.

Le champ scalaire de pression $p(x,z,t)$.

La densité ρ sera constante car on supposera l'eau incompressible. Cette supposition d'incompressibilité de l'eau entraîne que la divergence du champ vectoriel de vitesses de l'eau est nulle car toute l'eau qui rentre dans un volume quelconque doit être égale à l'eau qui en sort.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{8.1}$$

Prenons un petit parallélépipède de dimensions δx, δy et δz et examinons les forces qui agissent sur lui.

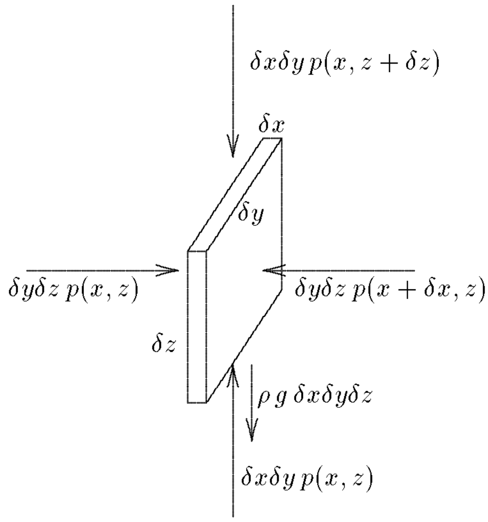

Figure 8.2 Forces sur un petit volume d'eau. Dans le sens des x la force totale est la somme de la force (vers la droite) due à la pression qui agit sur la face de gauche moins la force (vers la gauche) qui agit sur la face de droite. Pour les forces verticales la situation est similaire mais, en plus, il faut ajouter le poids du volume.

Dans le sens des x nous aurons une force due à la différence de pression entre les points $x + \delta x$ et x:

$$\delta F_x = \delta z \delta y\, [p(x, z, t) - p(x + \delta x, z, t)] = \delta z \delta y \delta x \frac{p(x, z, t) - p(x + \delta x, z, t)}{\delta x} = -\delta z \delta y \delta x \frac{\partial p}{\partial x}$$

Dans le sens des z nous aurons une force supplémentaire qui est le poids du petit volume $\rho \delta z \delta y \delta x g$ où g est l'accélération de gravité.

$$\delta F_z = -\delta z \delta y \delta x \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right)$$

car le poids est dirigé vers le bas et donc négatif.

Si nous appliquons la deuxième Loi de Newton ($F = ma$) à ce petit volume:

$$\rho \delta z \delta y \delta x \frac{dv_x}{dt} = -\delta z \delta y \delta x \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\rho \delta z \delta y \delta x \frac{dv_z}{dt} = -\delta z \delta y \delta x \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right)$$

La force due au poids, qui est dirigée vers le bas peut s'écrire d'une façon plus élégante (et compliquée):

$$\delta \vec{F}_{poids} = \delta z \delta y \delta x \vec{\nabla}(\rho g z)$$

car

$$\vec{\nabla}(\rho g\, z) = (0,\, 0,\, \rho\, g)$$

(la seule composante de ce vecteur non nulle est la composante en z). Avec ceci, et après avoir divisé par $\delta z \delta y \delta x$, le système précédent peut s'écrire sous forme vectorielle:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z) \tag{8.2}$$

Avant de continuer nous allons changer la forme du terme $\frac{d\vec{v}}{dt}$ qui est une dérivée totale et non partielle. Examinons une des deux composantes (x ou z) de ce terme. Prenons x:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y$$

Le premier terme $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ est un terme linéaire, par contre les deux autres sont des termes quadratiques (car ils comportent le produit d'une vitesse par la dérivée d'une vitesse) qui sont une infection dans tous les calculs. Nous allons donc limiter nos calculs aux cas où ces termes quadratiques soient négligeables devant les termes linéaires. Avec cette restriction,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Et l'équation (8.2) devient:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho g z) \tag{8.3}$$

Nous allons rajouter une restriction supplémentaire à nos calculs. Cette restriction consiste à admettre que le rotationnel de la vitesse est nul:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

Cela revient à dire qu'il n'y a pas de tourbillons dans l'eau. Nous avions déjà admis que la vitesse était nulle dans le sens des y, ce qui empêche les tourbillons verticaux (axe de rotation vertical). Maintenant nous éliminons la possibilité de tourbillons avec l'axe de rotation horizontal. Ce n'est pas, en fait, une trop grande restriction, nous savons qu'un objet abandonné aux vagues ne tourne pas sur lui même à moins d'être pris dans des rouleaux. Dans les cas que nous allons calculer, les amplitudes sont limitées, nous sommes dans le cas linéaire et, surtout, pas dans les rouleaux.

Quelqu'un a démontré que lorsque le rotationnel d'une variable vectorielle est nul, la variable peut être exprimée comme le gradient d'un potentiel scalaire:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$$

évidemment, ϕ est une variable qui dépend de x, z et t. Dans ce cas le terme de gauche de l'équation (8.3) devient:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi$$

Et si l'on inverse l'ordre des dérivées:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

Avec ceci l'équation (8.3) devient:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + gz)$$

ce qui peut s'écrire:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho}p + gz\right) = 0 \tag{8.4}$$

Toutes les simplifications et substitutions que nous avons faites dans les deux pages précédentes avaient pour objet d'aboutir à l'équation (8.4). Cette équation tient lieu d'équation d'onde, même si elle ne décrit pas directement la position ou la vitesse des particules. Elle a l'énorme avantage d'avoir remplacé un système de deux équations de deux variables (v_x et v_z) par deux équations d'une seule variable scalaire. Une fois résolue l'équation et la fonction $\phi(x, z, t)$ trouvée, nous pourrons déduire les vitesses:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Et les positions seront retrouvées par intégration des vitesses dans le temps.

À l'équation (8.4) il faut ajouter celle déduite de l'équation (8.1):

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right)\phi = \nabla^2\phi = 0$$

donc, le laplacien de ϕ est nul:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

ou:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad \text{pour} \qquad -h < z < 0 \tag{8.5}$$

La solution doit satisfaire des conditions limites. La plus évidente est que la vitesse verticale v_z doit être nulle au fond de l'eau:

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = -h \tag{8.6}$$

Pour trouver les conditions limites à la surface, nous allons définir la variable $\zeta(x, t)$ qui est égale au déplacement vertical d'une particule d'eau située à la surface de l'eau dont la position d'équilibre (en absence de vagues) est x. La hauteur de la surface de l'eau, mesurée par référence au niveau de l'eau sans vague sera donnée par $\zeta(x, t)$. Ainsi la vitesse verticale v_z, à la surface de l'eau sera:

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \qquad \text{pour} \qquad z = 0 \tag{8.7}$$

À la surface, on peut considérer que la pression p est toujours égale à la pression atmosphérique pour toutes les positions en x et en ζ. Rien ne change si la pression atmosphérique change, et il est plus commode de la considérer nulle. Avec ceci, l'équation (8.4) nous donne, pour la surface de l'eau:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta \qquad \text{pour} \quad z = 0 \tag{8.8}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, puis en remplaçant $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ par la valeur tirée de l'équation (8.7), on obtient:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -g\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \text{pour} \quad z = 0 \tag{8.9}$$

Résumons les conditions que ϕ doit satisfaire:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad \text{pour} \quad -h < z < 0 \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour} \quad z = -h \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \text{pour} \quad z = 0 \tag{8.9}$$

Nous allons chercher seulement des solutions du type **séparable**. C'est-à-dire que ϕ, qui est une fonction de x, z et t peut s'écrire comme le produit de trois fonctions qui dépendent, chacune, d'une seule variable. De plus, nous travaillerons seulement en régime sinusoïdal et en utilisant le formalisme des impédances.

$$\phi(x, z, t) = \chi(x)\psi(z)e^{j\omega t} \tag{8.10}$$

Comme d'habitude, nous retiendrons seulement la partie réelle des solutions.

Calculons les deuxièmes dérivées par rapport à x et z pour utiliser l'équation (8.5):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \chi''\psi e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \chi\psi'' e^{j\omega t}$$

Où les *seconde* $''$ indiquent la deuxième dérivée. L'équation (8.5) nous dit que ces deux expressions sont égales au signe près:

$$\chi''\psi e^{j\omega t} = -\chi\psi'' e^{j\omega t}$$

d'où on déduit:

$$\frac{\chi''}{\chi} = -\frac{\psi''}{\psi} = a$$

a ne peut être qu'une constante car les deux côtés de l'expression dépendent de variables indépendantes. Cette constante peut prendre, en principe, n'importe quelle valeur (réelle ou complexe). Il s'avère que les solutions qui correspondent à des vagues qui nous intéressent sont obtenues quand la constante prend la forme:

$$a = (-jk)^2$$

Nous nous retrouvons donc avec deux équations différentielles:

$$\frac{\chi''}{\chi} = -k^2$$
$$\frac{\psi''}{\psi} = k^2$$

Une solution particulière pour ce type d'équation est de la forme:

$$\chi = e^{\pm jkx}$$

et

$$\psi = e^{\pm kz}$$

Les solutions générales sont une combinaison linéaire des solutions particulières:

$$\chi = Ae^{-jkx} + Be^{jkx} \tag{8.11}$$
$$\psi = Ce^{kz} + De^{-kz} \tag{8.12}$$

La fonction ϕ peut donc s'écrire:

$$\phi = \left(Ae^{-jkx} + Be^{jkx}\right)\left(Ce^{kz} + De^{-kz}\right)e^{j\omega t}$$

Ou encore, en fusionnant les exponentielles avec j:

$$\phi = \left(Ce^{kz} + De^{-kz}\right)\left(Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}\right)$$

Le terme avec le coefficient A correspond à une vague qui se déplace dans le sens des x positifs (vers la droite), et le terme avec le coefficient B correspond à une vague qui se déplace vers la gauche. Sans perte de généralité nous pouvons ne garder que la vague qui avance vers la droite:

$$\phi = \left(Ce^{kz} + De^{-kz}\right)Ae^{j(\omega t - kx)} \tag{8.13}$$

Nous allons utiliser la condition limite (8.6).

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = -h$$

dérivons:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = kCe^{kz} - kDe^{-kz}$$

pour $z = -h$:

$$Ce^{-kh} - De^{kh} = 0$$

donc:

$$Ce^{-kh} = De^{kh} = b$$

où b est une constante à laquelle nous pouvons attribuer n'importe quelle valeur (car il reste à déterminer encore la constante A). Choisissons la valeur $1/2$:

$$Ce^{-kh} = De^{kh} = \frac{1}{2}$$

avec ceci:

$$C = \frac{1}{2} e^{kh}$$

$$D = \frac{1}{2} e^{-kh}$$

Nous pouvons remplacer ces valeurs dans l'équation (8.13):

$$\phi = \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} A e^{j(\omega t - kx)} \tag{8.14}$$

$$\phi = A \cosh\left[k(z+h)\right] e^{j(\omega t - kx)} \tag{8.15}$$

La fonction “cosh” est le cosinus hyperbolique dont vous avez la définition dans la ligne précédente. Vous pouvez apprendre un peu plus sur les fonctions hyperboliques à la fin de ce chapitre.

Nous allons finalement utiliser la condition limite (8.9):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \text{pour} \quad z = 0 \tag{8.9}$$

$$-\omega^2 A \cosh\left[k(z+h)\right] e^{j(\omega t - kx)} = -gAk \sinh\left[k(z+h)\right] e^{j(\omega t - kx)} \qquad \text{pour} \quad z = 0$$

En remplaçant z par zéro et en simplifiant:

$$-\omega^2 \cosh(kh) = -gk \sinh(kh)$$

ou:

$$\frac{\omega^2 h}{g} \frac{1}{kh} = \tanh(kh) \tag{8.16}$$

Cette équation, (malheureusement) **transcendante**([2]), relie la profondeur h avec la pulsation des vagues et la vitesse de phase (ne pas oublier que $k = \omega / v_{phase}$). Donc pour chaque paire de fréquence des vagues et de profondeur de l'eau on obtient une vitesse de phase. Ou, dit autrement, la vitesse de phase des vagues dépend et de la profondeur et de la fréquence des vagues.

Même si la solution analytique n'existe pas, on peut toujours résoudre numériquement l'équation (8.16). Dans la figure 8.2 nous avons tracé le résultat du calcul des vitesses de phase et de groupe en fonction de la période des vagues pour plusieurs valeurs de la profondeur de l'eau.

On peut constater en regardant les courbes que, pour une période donnée, la vitesse des vagues diminue quand la profondeur diminue. C'est la raison pour laquelle les vagues, qui arrivent de l'océan avec un front d'onde droit, s'incurvent pour épouser la forme de la plage. Par exemple, en arrivant dans une baie, le centre avance plus vite que les flancs (car la profondeur est plus grande au centre), le front d'onde devient courbe, et c'est presque simultanément que les rouleaux brisent sur la plage.

([2]) Les équations transcendantes sont les équations qui n'ont pas de solution analytique. C'est-à-dire, si la variable à trouver est, par exemple, x vous ne pouvez pas écrire $x =$ (une formule sans x).

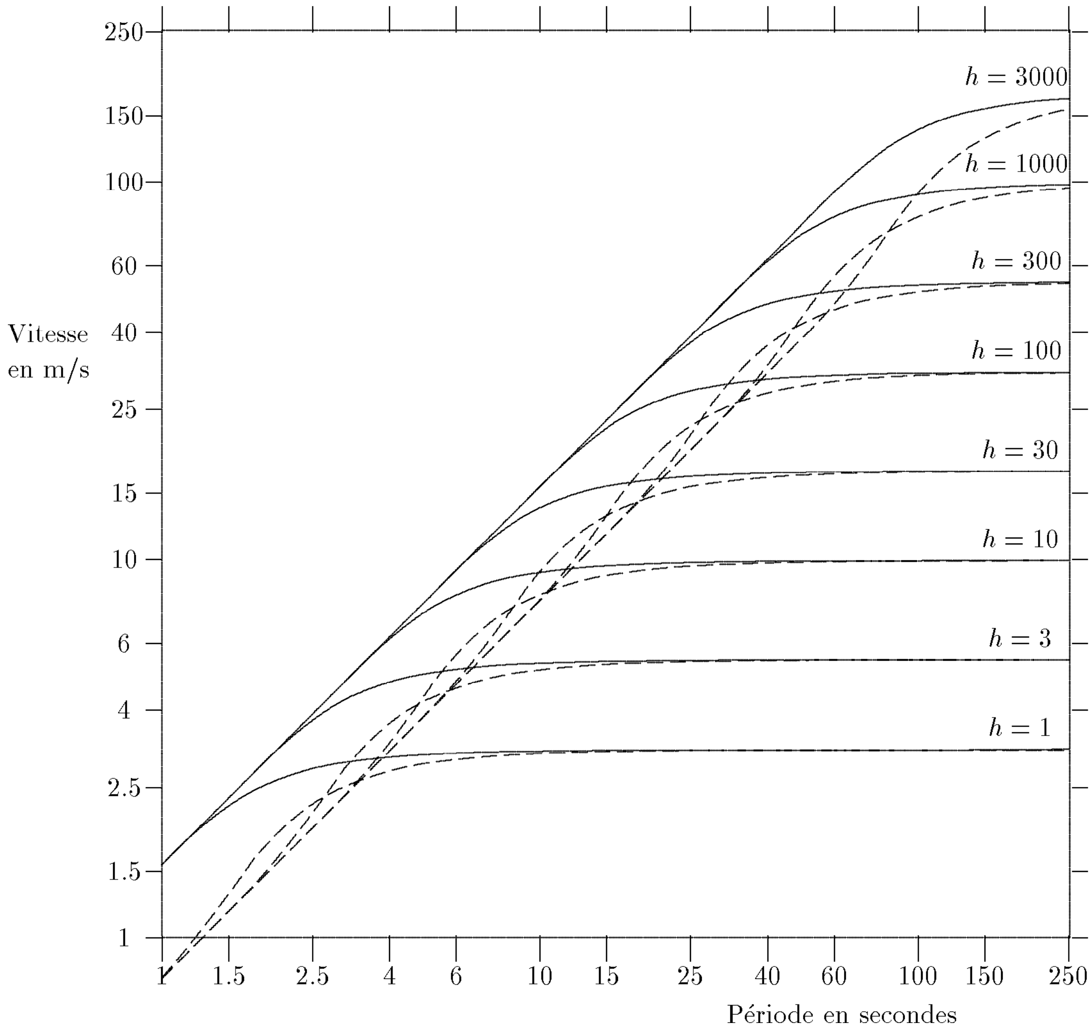

Figure 8.3 Vitesse de phase (en continu) et vitesse de groupe (en pointillés) des vagues en fonction de leur période. Le paramètre h est la profondeur de l'eau en mètres. La droite inclinée commune correspond au déplacement en eau profonde. La partie horizontale des courbes correspond au déplacement en eau peu profonde. Remarquez que les échelles sont logarithmiques.

Nous pouvons revenir sur l'équation (8.15) et ne garder que la partie réelle (nous sortons du formalisme des impédances):

$$\phi = A \cosh\left[k(z+h)\right]\cos(\omega t - kx) \tag{8.16}$$

Et maintenant que nous avons l'expression complète de ϕ nous pouvons calculer toutes les données du mouvement ondulatoire.

Le déplacement vertical Z est obtenu à partir de l'équation (8.7):

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Pour obtenir Z il faut dériver l'équation (8.16) par rapport à z, puis intégrer le résultat par rapport au temps. La dérivée:

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = kA \sinh\left[k(z+h)\right] \cos(\omega t - kx)$$

L'intégrale:

$$Z = \frac{k}{\omega} A \sinh\left[k(z+h)\right] \sin(\omega t - kx) \tag{8.17}$$

Le déplacement ζ à la surface est obtenu pour $z = 0$:

$$\zeta = \frac{k}{\omega} A \sinh(kh) \sin(\omega t - kx) \tag{8.18}$$

Si nous appelons R l'amplitude de la vague (en surface):

$$\zeta = R \sin(\omega t - kx)$$

où

$$R = \frac{k}{\omega} A \sinh(kh)$$

Avec ceci, le déplacement vertical Z devient:

$$Z = R \frac{\sinh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) \tag{8.19}$$

Le potentiel de vitesses ϕ devient, en fonction de l'amplitude R:

$$\phi = R \frac{\omega}{k} \frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \tag{8.20}$$

La vitesse horizontale d'une particule d'eau sera:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = kR \frac{\omega}{k} \frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx)$$

Et le déplacement horizontal $X(x, z, t)$ sera l'intégrale de v_x par rapport au temps:

$$X = -R \frac{\omega}{\omega} \frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \tag{8.21}$$

et à la surface $z = 0$

$$X = -R \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \tag{8.22}$$

Il est intéressant de calculer la "profondeur de pénétration" de la vague. En effet, on sait que les vagues se font sentir de moins en moins à mesure que l'on s'enfonce.

Pour kh grand on peut approcher $\sinh(kh)$ par $e^{kh}/2$ et $\sinh\left[k(z+h)\right]$ par $e^{k(z+h)}/2$. Avec ces approximations, le déplacement vertical Z (éq. 8.19) devient:

$$Z = R \frac{e^{k(h+z)}}{e^{kh}} \sin(\omega t - kx) = R e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

sans oublier que, sous l'eau, z est négatif. L'amplitude des mouvements diminue exponentiellement avec la profondeur. La **distance de relaxation**, c'est-à-dire, la distance à laquelle l'effet (ici l'amplitude du mouvement) est réduite d'un facteur $1/e$ est donnée par:

$$kz = -1 \;\Rightarrow\; z_r = -\frac{1}{k} = -\frac{\lambda}{2\pi}$$

Autrement dit, à une profondeur d'un dixième de λ, l'amplitude tombe à un tiers et à 0,75λ l'amplitude est réduite d'un facteur 100.

Pour le mouvement horizontal la situation est la même. Pour kh grand on peut approcher aussi bien le sinh que le cosh par $\frac{1}{2}e^{kh}$. L'équation (8.21) devient:

$$X = -R\frac{e^{k(z+h)}}{e^{kh}}\cos(\omega t - kx) = -Re^{kz}\cos(\omega t - kx)$$

et la distance de relaxation est la même que pour le mouvement vertical.

Le fait que l'équation (8.15) soit transcendante rend l'étude générale des solutions impossible. Il faut le faire cas par cas. Néanmoins, quand kh est petit, ou quand kh est grand, on peut faire des approximations.

En effet, pour kh inférieur à 0,25 on peut approcher $\tanh(kh)$ par kh avec une erreur inférieure à 2%. De même, pour kh plus grand que 2,3 on peut approcher $\tanh(kh)$ par 1 avec une erreur inférieure aussi à 2%.

8.3 Vagues en eau peu profonde.

Le premier cas $kh < 0{,}25$ correspond au cas de l'eau peu profonde (par rapport à la longueur d'onde des vagues). En effet, si l'on remplace k par $2\pi/\lambda$ on déduit de l'inégalité:

$$\lambda > 25h$$

Il est utile de rappeler que, même si la profondeur h de l'eau est très petite devant la longueur d'onde des vagues, nos calculs ne sont valables que quand l'amplitude des vagues est petite devant la profondeur de l'eau.

L'équation (8.15) devient:

$$\frac{\omega^2 h}{g}\frac{1}{kh} \simeq kh$$

et on déduit:

$$\omega = \sqrt{gh}k$$

La vitesse de phase et la vitesse de groupe deviennent:

$$v_p = v_g = \sqrt{gh}$$

et sont indépendantes de la fréquence.

L'amplitude du déplacement horizontal est donnée par l'équation (8.22):

$$X = -R\frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)}\cos(\omega t - kx)$$

où R est l'amplitude du déplacement vertical.

Pour des petites valeurs de kh on peut approcher $\tanh(kh)$ par kh et l'équation (8.22) devient:

$$X = -\frac{R}{kh}\cos(\omega t - kx)$$

Le mouvement de chaque particule d'eau est composé par un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude R et d'un autre mouvement sinusoïdal horizontal, en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ d'amplitude R/kh, plus grande que l'amplitude verticale. Les particules d'eau décrivent donc des ellipses avec l'axe horizontal plus grand que l'axe vertical. Quand la vague se déplace vers la droite, les particules tournent dans le sens négatif.

8.4 Vagues en eau profonde.

Le deuxième cas dans lequel nous pouvons faire des approximations est le cas d'eau profonde (toujours par rapport à la longueur d'onde des vagues). Comme nous l'avons expliqué, pour $kh > 2{,}3$ on peut approcher $\tanh(kh)$ par 1. En remplaçant k par $2\pi/\lambda$ nous obtenons:

$$h > \frac{2{,}3}{2\pi}\lambda \simeq 0{,}37\lambda$$

Donc la solution en eau profonde est valable dès que la profondeur est plus grande qu'un tiers de la longueur d'onde!

Cette fois l'équation (8.16) devient:

$$\omega = \sqrt{gk}$$

La vitesse de phase devient:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\omega}$$

Et la vitesse de groupe est:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\frac{g}{\omega}$$

Les vitesses de phase et de groupe ne sont pas les mêmes, mais les deux augmentent quand la fréquence diminue ou quand la longueur d'onde augmente.

Les deux vitesses sont plus grandes en eau profonde qu'en eau peu profonde et ne dépendent plus de la profondeur.

Le déplacement horizontal à la surface:

$$X = -R\frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)}\cos(\omega t - kx)$$

(où R est l'amplitude du déplacement vertical) devient:

$$X = -R\cos(\omega t - kx)$$

car on approche $\tanh(kh)$ par 1.

Cette fois les particules d'eau à la surface décrivent des cercles et non des ellipses. Elles tournent aussi dans le sens négatif pour des vagues qui avancent vers la droite.

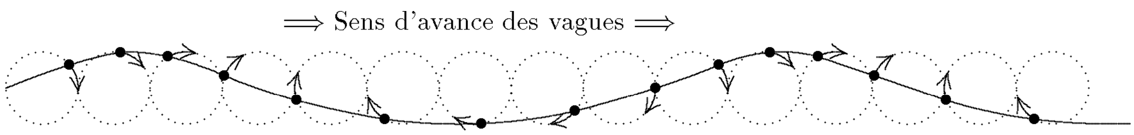

Figure 8.4 Mouvement des particules d'eau à la surface d'une vague en eau profonde. Les particules, représentées par le petit cercle noir, décrivent des cercles. En absence de vagues les particules occuperaient le centre des cercles.

8.5 Puissance transportée.

Les vagues transportent de la puissance. Quand elles transfèrent leur énergie à d'autres objets, les effets peuvent être nuisibles et, bien des fois, catastrophiques.

Au sein de la vague, l'énergie est transmise par le travail fait par les forces horizontales, dues à la pression, sur les particules d'eau en mouvement (pour le transport d'énergie, seules les forces et les mouvements dans le sens des x comptent). L'énergie est transmise parce que pendant le mouvement des particules vers l'avant, le niveau d'eau est plus haut qu'à l'équilibre et la pression est plus grande que la moyenne. Par contre pendant le mouvement de l'eau vers l'arrière, la surface est du côté creux et la pression est plus faible que la moyenne. On trouve un travail net positif exercé vers la droite.

Pour calculer ce travail nous allons devoir calculer le travail net, exercé pendant une période, sur une surface verticale perpendiculaire à l'axe x de dimensions L en y et dz en z, et dont les coordonnées à l'équilibre sont x et z. La force vers la droite sera:

$$dF = Lpdz$$

et le travail pour un déplacement horizontal vers la droite de dx sera:

$$d^2W = dFdx = Lpdzdx \tag{8.23}$$

Maintenant, comme la pression p varie en fonction de z et du temps, et que le déplacement en x dépend lui aussi du temps, il faut exprimer toutes les variables en fonction du temps.

Commençons déjà par calculer la pression.

Revenons à l'équation (8.4):

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho}p + gz\right) = 0 \tag{8.4}$$

et remplaçons $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ par sa valeur (dérivée de l'équation (8.20)):

$$\vec{\nabla}\left(-R\frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)}\sin(\omega t - kx) + \frac{1}{\rho}p + gz\right) = 0$$

On peut toujours séparer la pression en deux parties: une partie statique plus une partie dynamique. La partie statique, comme l'est aussi le terme gz, ne joue pas de rôle direct dans la transmission de puissance. Les seuls termes qui jouent sont des termes qui varient à l'intérieur d'une période. Et pour que le gradient de ces termes qui varient dans le temps soit constant (et égal à zéro) il faut que les termes soient égaux à zéro en permanence. C'est-à-dire que le premier terme à l'intérieur de la parenthèse $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ plus la partie dynamique de p doit être égal à zéro:

$$-R\frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)}\sin(\omega t - kx) + \frac{1}{\rho}p_d = 0$$

où p_d est la partie dynamique de la pression. Donc:

$$p_d = \rho R\frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)}\sin(\omega t - kx)$$

Pour exprimer un petit déplacement dans la direction des x il faut différentier l'équation (8.21):

$$dx = dX = R\omega \frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) dt$$

En remplaçant p et dx dans l'équation (8.23):

$$d^2W = dF dx = Ldz\rho R^2 \frac{\omega^2}{k} \frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx)\omega \frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) dt$$

$$d^2W = Ldz \frac{\rho R^2 \omega^3}{k} \frac{\cosh^2\left[k(z+h)\right]}{\sinh^2(kh)} \sin^2(\omega t - kx) dt$$

Et nous devons intégrer cette expression sur une période $2\pi/\omega$:

$$dW = Ldz \frac{\rho R^2 \omega^3}{k} \frac{\cosh^2\left[k(z+h)\right]}{\sinh^2(kh)} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t - kx) dt$$

On laisse au lecteur le soin de prouver que l'intégrale vaut $\frac{\pi}{\omega}$.

$$dW = Ldz \frac{\rho R^2 \pi \omega^2}{k} \frac{\cosh^2\left[k(z+h)\right]}{\sinh^2(kh)}$$

Nous venons de calculer le travail fait par l'onde sur une petite surface de hauteur dz située à une hauteur z en absence de vague. Pour calculer le travail total il faut intégrer cette expression de $z = -h$ jusqu'à $z = 0$:

$$W = L \frac{\rho R^2 \pi \omega^2}{k \sinh^2(kh)} \int_{-h}^{0} \cosh^2\left[k(z+h)\right] dz$$

Calculons l'intégrale séparément. On commence par remplacer le $\cosh^2 u$ par $\frac{1}{2}(1 + \cosh u)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{0} \cosh^2\left[k(z+h)\right] dz &= \frac{1}{2} \int_{-h}^{0} \left[1 + \cosh\left[2k(z+h)\right]\right] dz \\
&= \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{2k} \sinh\left[2k(z+h)\right]\right]_{-h}^{0} \\
&= \frac{1}{2} \left[h + \frac{1}{2k} \sinh(2kh)\right] \\
&= \frac{1}{2} \left[h + \frac{\sinh(kh)\cosh(kh)}{k}\right]
\end{aligned}$$

Le travail effectué pendant une période sera:

$$W = L \frac{\rho R^2 \pi \omega^2}{2k \sinh^2(kh)} \left[h + \frac{\sinh(kh)\cosh(kh)}{k}\right]$$

Pour calculer la puissance il faut diviser ce travail par le temps nécessaire pour l'effectuer, c'est-à-dire une période, qui vaut $2\pi/\omega$. Puis, pour obtenir la puissance transmise par mètre linéaire de vague il faut diviser par L:

$$\frac{\mathcal{P}}{\ell} = \frac{\rho R^2 \omega^3}{4k \sinh^2(kh)} \left[h + \frac{\sinh(2kh)}{2k}\right]$$

Dans cette équation il ne faut pas oublier que h, ω et k ne sont pas des variables indépendantes: elles sont reliées par la relation exprimée par l'équation (8.16). Pour une même vague, seule la période et, évidemment, ω restent constantes. Quand la profondeur de l'eau h change, k varie aussi. Quand on fait le calcul on constate que le coefficient qui multiplie l'amplitude au carré R^2, diminue quand la profondeur de l'eau diminue. Comme la puissance transportée est, grosso modo, conservée, l'amplitude de la vague augmente quand la profondeur diminue.

Il est facile de comprendre pourquoi l'amplitude d'une vague doit augmenter quand la vitesse diminue. L'énergie d'une vague est la somme de son énergie cinétique plus son énergie potentielle. L'énergie potentielle est celle que l'on pourrait récupérer en remplissant les creux avec le sommets. L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques de toutes les particules d'eau. Cette énergie cinétique augmente avec l'amplitude et avec la vitesse de la vague. Si l'on diminue la vitesse, l'énergie cinétique diminue et il faut que l'énergie potentielle augmente. Pour que l'énergie potentielle augmente il faut que l'amplitude augmente.

Ce phénomène fait la joie des surfeurs: quand les vagues arrivent vers la plage leur amplitude augmente et leur vitesse diminue ce qui diminue λ et rapproche les sommets. Ces deux effets augmentent la pente des vagues.

Ce qui, pour des petites vagues, fait la joie des surfeurs, se transforme en cataclysme dans le cas des grosses vagues. C'est le cas des **tsunamis** (mot japonais parfois traduit comme "raz de marée"). Ce sont des vagues d'amplitude relativement modeste (quelques mètres) mais de très grande longueur d'onde et période, produites par des séismes ou des glissements de terrain sous-marins([3]). Une vague de $1\,m$ d'amplitude et de 20 minutes de période se déplace à $\sim 198\,m/s$ sur des fonds de $4000\,m$. Un bateau, même petit, ne la sentira pas le soulever. La même vague arrivant sur un fond de $10\,m$ réduira sa vitesse à $\sim 10\,m/s$ mais son amplitude passera à plus de $4{,}7\,m$ (ou, en langage de marins, à des creux de 9 mètres)([4]). Une vague de cette hauteur pénètre profondément dans les terres en détruisant tout sur son passage. Les dégâts et les victimes causés par les tsunamis sont souvent plus importants que ceux causés directement par le tremblement de terre qui les a créés. Heureusement tous les tremblements de terre ne sont pas sous-marins et tous les tremblements de terre sous-marins ne créent pas des tsunamis.

8.6 Retour à la réalité.

Dans tout ce chapitre nous avons fait énormément de simplifications. Nous nous sommes restreints aux seules solutions qui correspondent à des ondes progressives alors qu'il y a d'autres ondes. Nous n'avons pris que des solutions séparables. Et surtout nous nous sommes restreints à rester en régime linéaire et pour ce faire il faut que les amplitudes soient faibles devant la longueur d'onde. D'ailleurs si vous regardez attentivement la figure 8.4, vous constaterez que l'amplitude des mouvements (ou le diamètre des cercles) est trop importante pour que la surface de la vague

([3]) Le tsunami connu le plus meurtrier eut lieu le 26 décembre 2004 dans l'océan indien, dû à un tremblement de terre sous-marin de magnitude 8,9 à l'est de Sumatra. Il causa la mort de près de 300000 personnes en Indonésie, Sri Lanka, Inde, Thaïlande et Maldives. On calcule que, lors de l'éruption catastrophique du volcan de l'île de Krakatoa, dans le détroit de la Sonde (entre Sumatra et Java) en 1883, le tsunami de 35 mètres créé, tua plus de 30000 personnes dans un rayon de 120 km. En juillet 1998, un tsunami tua 2200 personnes en Papouasie Nouvelle Guinée

([4]) Il ne faut pas confondre, comme le font certains journalistes, la hauteur des vagues et la hauteur des embruns. Ainsi, il y a quelques années, un journaliste annonçait des vagues de 15 mètres à Nice ou Cannes.

soit sinusoïdale. Les sommets sont plus "pointus" que les creux. En fait la surface n'est pas une sinusoïde mais une *"cycloïde raccourcie"*.

En restant en régime linéaire nous avons raté les ondes de choc et les rouleaux.

Nous avions vu que dans le gaz on obtenait des ondes de choc quand l'amplitude était suffisamment grande pour que l'augmentation de température due à la compression du gaz augmente la vitesse de propagation des sommets de pression et ralentisse celle des creux. Les sommets avaient une tendance à rattraper les creux et il se formait un front d'onde abrupt avec du gaz à température ambiante à l'avant et du gaz chaud à l'arrière du front.

Pour les vagues on trouve la même situation avec les mêmes conséquences. Nous avions vu que la vitesse des vagues dépendait de la profondeur de l'eau. Or, sous les sommets la profondeur d'eau est plus grande que sous les creux, et les sommets ont tendance à rattraper les creux. Quand la profondeur est grande devant l'amplitude, la différence de vitesse est faible et rien ne change notablement. Par contre, près de la plage, la profondeur commence à devenir comparable à l'amplitude. Les sommets commencent à rattraper les creux. Les pentes frontales des vagues deviennent de plus en plus verticales et il arrive un moment dans laquelle la pente s'inverse: elle est en dévers. Le haut de la vague tombe sur le creux: la vague se brise et forme des rouleaux. Ces rouleaux portent bien leur nom. Un objet pris dans les rouleaux roule sur lui même: le rotationnel de la vitesse de l'eau n'est plus égal à zéro.

Le mouvement de l'eau dans les rouleaux est tourbillonnaire. De l'énergie est dissipée sous forme de chaleur à travers des forces de viscosité et sous forme de bruit et cela s'entend.

La forme des vagues dépend de la façon dont les fonds remontent vers la plage. Ainsi on peut avoir des rouleaux très retournés et qui brisent violemment, ou des vagues qui brisent doucement sans former de "tube".

On peut trouver le même type d'onde de choc dans les torrents de montagne. Suite à une augmentation soudaine de la quantité d'eau disponible, à la suite d'un orage ou d'un lâcher d'eau d'un barrage, une onde de choc se forme car les vagues s'accumulent au niveau du front. Les promeneurs ou les occupants des campings le long du torrent sont piégés car l'eau ne remonte pas progressivement. Ils voient arriver un mur d'eau qui emporte tout sur son passage.

Plus rarement on peut trouver la formation d'une onde de choc avec les remontées d'eau dues à la marée dans les rivières. Par des grandes marées et dans certaines rivières il se produit une onde de choc qui remonte la rivière sur des kilomètres, à la grande joie des surfeurs qui étaient prévenus et qui étaient là, au bon endroit et au bon moment. Ces ondes de choc reçoivent le nom de **mascaret**([5]).

([5]) La fille de Victor Hugo mourut noyée quand le mascaret de la Seine au niveau de Rouen retourna son embarcation.

8.7 Fonctions hyperboliques.

Les fonctions hyperboliques peuvent être définies comme suit:

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\end{aligned}$$

La forme des fonctions est la suivante:

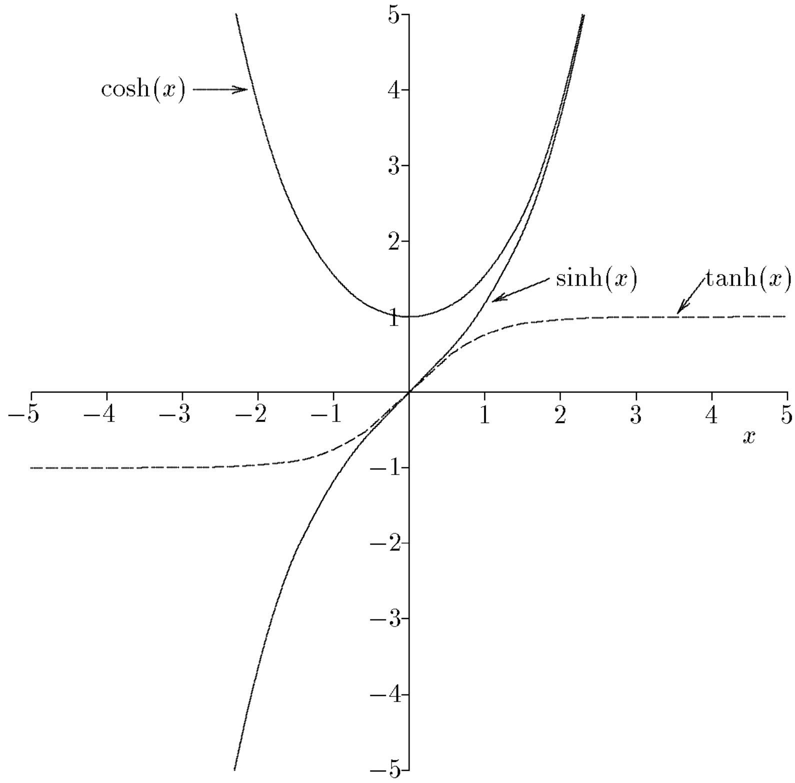

Figure 8.5 Fonctions hyperboliques.

Il est facile de démontrer que:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1\\ \sinh(x) &= -j\sin(jx)\\ \cosh(x) &= \cos(jx)\\ \tanh(x) &= -j\tan(jx)\\ d\ \sinh(x) &= \cosh(x)\ dx\\ d\ \cosh(x) &= \sinh(x)\ dx\\ d\ \tanh(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)}dx\end{aligned}$$

Et, avec plus de difficulté:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\
\operatorname{arccosh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\\
\operatorname{arctanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
\sinh(x\pm y) &= \sinh x\cosh y \pm \cosh x \sinh y\\
\cosh(x\pm y) &= \cosh x\cosh y \pm \sinh x \sinh y\\
\sinh x+\sinh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)\\
\sinh x-\sinh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x-y)\cosh\frac{1}{2}(x+y)\\
\cosh x+\cosh y &= 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)\\
\cosh x-\cosh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y)
\end{aligned}$$

Toutes ces formules portent un air de famille avec les formules des fonctions trigonométriques mais elles ne sont pas les mêmes: il faut se méfier!

Des différentes fonctions hyperboliques, seule cosh nous est familière. En effet, c'est la forme prise par une chaînette ou une corde infiniment souple et homogène tenue par les extrémités et laissée pendante sous son poids. Pour ceci on l'appelle aussi **chaînette** ou **caténaire**. Comparez au caténaire des cheminots.