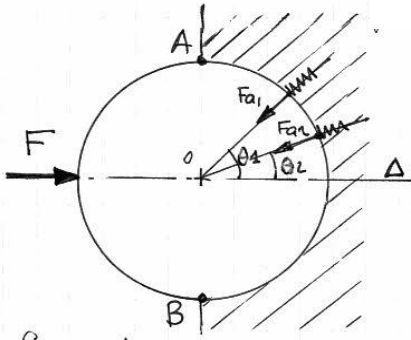


1 - REPARTITION DE LA PRESSION SUR L'ARC

Hypothèses: l'effort F est réparti sur une portée de longueur l



Croquis 1

• Chaque point constitue un système élastique de raideur R_a .

• l'effort restitué par chaque point est donc $F_a = R_a \cdot \Delta a$

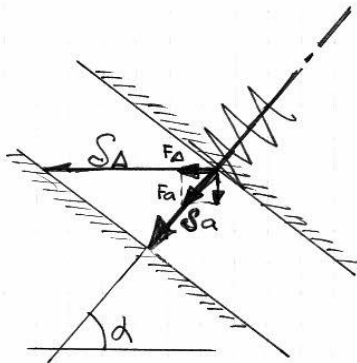
Δa = déplacement du point suivant θ

• la raideur d'un point suivant Δ sera

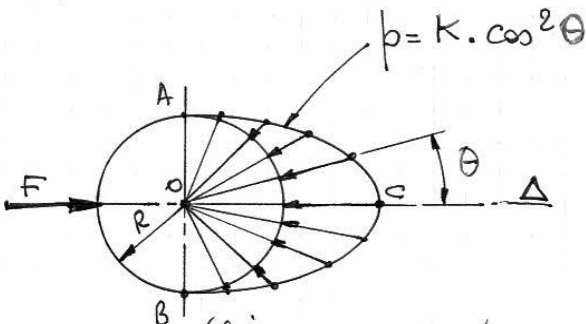
$$\text{donc : } R_{\Delta} = \frac{F_a}{\Delta \Delta} = \frac{F_a \cos \theta}{\frac{\Delta a}{\cos \theta}} = \frac{F_a \cos^2 \theta}{\Delta a}$$

$$R_{\Delta} = R_a \cdot \cos^2 \theta$$

La pression sur l'arc $\widehat{AB}$ se répartit donc suivant cette loi (cf. croquis 3)



Croquis 2



Croquis 3 (le jeu entre arbre et alésage est nul)

Il faut maintenant déterminer K .

La pression s'exerce sur chaque élément de surface

$$ds = R d\theta l$$

l = longueur de contact axe/alésage

On écrit que la force totale résultant de l'action de p sur l'arc $\widehat{AB}$ est égale à F (suivant Δ).

$$F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p ds \cdot \cos \theta$$

$$F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} K \cdot \cos^2 \theta \cdot R d\theta \cdot l \cdot \cos \theta$$

$$F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R l k \cos^3 \theta d\theta$$

$$F = R l k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = R l k \left[\frac{3}{4} \sin(\theta) + \frac{1}{12} \sin(3\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$F = R l k \left(\left[\frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12} \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right] - \left[\frac{3}{4} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{12} \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right] \right)$$

$$F = R l k \left(\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} \right) - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{12} \right) \right) \quad F = \frac{4}{3} R l k$$

$$k = \frac{3F}{4l.R}$$

d'où

$$p = \frac{3F}{4l.R} \cos^2 \theta$$

La contrainte maxi est en C - la pression est:

$$p = \frac{3F}{4l.R} \cdot \cos^2 \theta \quad \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \cos^2 \theta = 1$$

$$\sigma_m = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{l \cdot d} \quad \begin{array}{l} \text{effort} \\ \text{portée} \quad \text{axe} \end{array}$$

d'où la formule couramment appliquée : $\sigma_m = \frac{F}{l \times \frac{2}{3} d}$

2- CALCUL DE LA CONTRAINTE TRANSVERSALE (Section C-D)

Ce chapitre n'est utile que si CD est faibles par rapport au diamètre

On écrit que la force totale résultant de l'action de la pression sur l'arc AC est égale à R_1 ($\equiv R_2$ par symétrie)

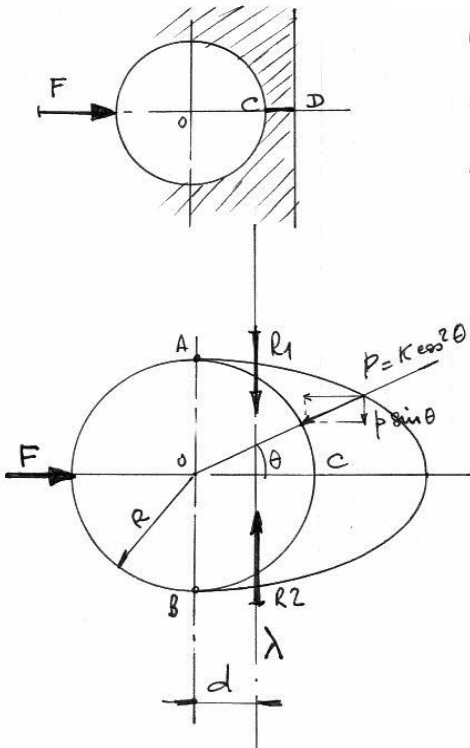
$$R_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cdot ds \cdot \sin \theta \quad p = k \cos^2 \theta \quad \rightarrow k = \frac{3F}{4l.R}$$

$$R_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3F}{4l.R} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot R d\theta \cdot l$$

$$R_1 = \frac{3F}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$R_1 = \frac{3F}{4} \left[\frac{1}{3} \sin^2 \theta \cdot \cos \theta + \frac{1}{3} \int \sin \theta \cos \theta d\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = -\cos \theta$$

$$R_1 = \frac{3F}{4} \left(\left(\frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} \sin^2 0 \cdot \cos 0 - \frac{1}{3} \cos 0 \right) \right)$$



$$R_1 = \frac{F}{4} \left(\cos \frac{\pi}{2} (\sin^2 \frac{\pi}{2} - 1) - \cos 0 (\sin^2 0 - 1) \right)$$

(3)

$$R_1 = \frac{F}{4}$$

Il faut maintenant calculer la distance d'application d :

$$d = \frac{1}{R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \sin \theta \cdot R \cdot \cos \theta \cdot ds$$

$$p = k \cos^2 \theta$$

$$L = \frac{3F}{4\ell R}$$

$$ds = R d\theta \cdot \ell$$

$$d = \frac{1}{R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3F}{4\ell R} \cos^2 \theta \sin \theta \cdot R \cos \theta \cdot R \cdot d\theta \cdot \ell$$

$$d = \frac{1}{R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3F \cdot R^2}{4\ell R} \cdot \cos^3 \theta \sin \theta d\theta$$

$$d = \frac{3FR}{4R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta$$

$$d = \frac{3FR}{4R_1} \cdot \left[\frac{1}{4} \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

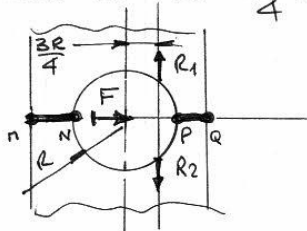
$$d = \frac{3FR}{16R_1} \left[\sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \cdot \frac{\cos^0 \theta}{=1} + 0 \right] \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$d = \frac{3FR}{16R_1} \left[\sin^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 0 \cos^2 0 + 2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 0 \right) \right]$$

$$d = \frac{3FR}{16R_1} \quad \text{avec } R_1 = \frac{F}{4} \text{ on obtient}$$

$$d = \frac{3}{4} R$$

Un effort F génère donc deux réactions $R_1 = R_2 = \frac{F}{4}$ situées à $d = \frac{3}{4} \cdot \text{Rayon}$

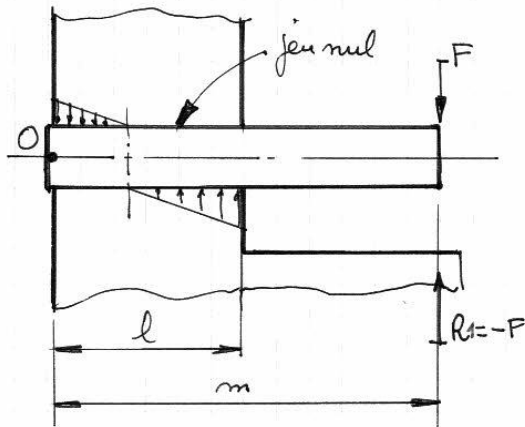


R_1 et R_2 s'appliquent sur MN et PQ

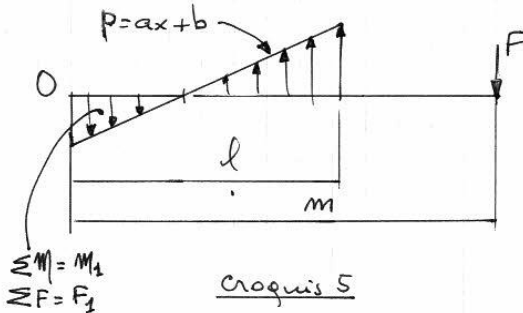
3 - REPARTITION LONGITUDINALE DE LA PRESSION (F non centrée)

(4)

(l'axe est considéré comme rigide sur sa fibre neutre) $\rightarrow p = ax + b$
 linéaire



croquis 4



croquis 5

On écrit que la somme des moments est nulle : (croquis 5)

$$M_1 = \int_0^l p x \cdot dx \quad \text{avec } p = ax + b.$$

$$M_1 = \int_0^l (ax + b) x \cdot dx = \int_0^l (ax^2 + bx) dx$$

$$M_1 = \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 \right]_0^l = \left(\frac{al^3}{3} + \frac{bl^2}{2} \right) - (0 + 0)$$

$$M_1 = \frac{al^3}{3} + \frac{bl^2}{2}$$

comme $M_2 = -F \cdot m$ et $M_1 + M_2 = 0$

$$-F \cdot m + \frac{al^3}{3} + \frac{bl^2}{2} = 0 \quad (1)$$

On écrit que la somme des forces est nulle :

$$F_1 = \int_0^l (ax + b) dx = \left[\frac{ax^2}{2} + bx \right]_0^l$$

$$F_1 = \left(\frac{al^2}{2} + bl \right) - (0 + 0) = \frac{al^2}{2} + bl$$

$$-F + \frac{al^2}{2} + bl = 0 \quad (2)$$

et comme $F_1 + F = 0$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad a &= \left(F \cdot m - \frac{bl^2}{2} \right) \cdot \frac{3}{l^3} \\ (2) \quad a &= \left(F - bl \right) \cdot \frac{2}{l^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{3F \cdot m}{l^3} - \frac{3bl^2}{2l^3} = \frac{2F}{l^2} - \frac{2bl}{l^2}$$

$$\frac{3bl^2}{2l^3} - \frac{2bl}{l^2} = \frac{3F \cdot m}{l^3} - \frac{2F}{l^2}$$

$$b \left(\frac{3}{2l} - \frac{2}{l} \right) = \frac{F}{l^2} \left(\frac{3m}{l} - 2 \right)$$

$$b = \frac{F}{l^2} \left[\frac{\left(\frac{3m}{l} - 2 \right)}{\left(-\frac{2}{2l} + \frac{3}{2l} \right)} \right] = \frac{F}{l^2} \left[\frac{\frac{3m}{l} - 2}{-\frac{1}{2l}} \right]$$

$$b = \frac{F}{l^2} \cdot 2l \left(\frac{3m}{l} - 2 \right)$$

$$\boxed{b = -\frac{2F}{l} \left(\frac{3m}{l} - 2 \right)}$$

$$a = \left[F - \left[2F \left(\frac{3m}{l} - 2 \right) \right] \right] \cdot \frac{2}{l^2} = \frac{2F}{l^2} \left[1 + 2 \left(\frac{3m}{l} - 2 \right) \right] \quad (5)$$

$$a = \frac{2F}{l^2} \left(1 + \frac{6m}{l} - 4 \right) = \frac{2F}{l^2} \left(-3 + \frac{6m}{l} \right) = \frac{6F}{l^3} (-l + 2m)$$

$$a = \frac{6F}{l^3} (2m - l)$$

La répartition est donc : (répartition linéaire)

$$p_{\text{lin}} = \left(\frac{6F}{l^3} (2m - l) \right) x - \frac{2F}{l^2} (3m - 2l)$$

ou $p_{\text{lin}} = \frac{2F}{l^2} \left(3 \left(\frac{2m}{l} - 1 \right) x - 3m + 2l \right)$

$$p_{\text{linéaire}} = \frac{6F}{l^2} \left[\left(\frac{2m}{l} - 1 \right) x - m + \frac{2}{3} l \right] \quad (3)$$

Vérif : si $m = \frac{l}{2}$ on retrouve $p = \frac{F}{l}$ (pression linéaire)

En reprenant la répartition transversale :

(cf page 2) $\rightarrow p = k \cos^2 \theta$ avec $k = \frac{3F}{4lR}$ $p = \frac{3}{4R} \cdot \frac{F}{l} \cdot \cos^2 \theta$ où $\frac{F}{l} = \text{pression linéaire}$

on remplace cette pression $\frac{F}{l}$ par (3) :

$$p_{\text{lin}} = \frac{3 \cos^2 \theta}{4R} \cdot \left(\frac{6F}{l^2} \left[\left(\frac{2m}{l} - 1 \right) x - m + \frac{2}{3} l \right] \right)$$

$$p_{\text{linéaire}} = \frac{9F \cos^2 \theta}{2R l^2} \left[\left(\frac{2m}{l} - 1 \right) x - m + \frac{2}{3} l \right] \quad (4)$$

C'est l'expression de la pression $p = f(\theta, x)$

Vérif : en faisant $m = \frac{l}{2}$, F est au milieu de l et l'on retrouve : $p = \frac{3F}{4 \cdot l \cdot R} \cdot \cos^2 \theta$

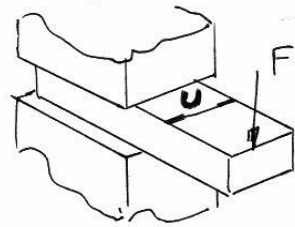
Cas d'une pièce prismatique

Pour ex ci-dessous

$$p = \frac{6F}{l^2} \dots (3) \dots$$

Si $m = \frac{l}{2}$ on retrouve

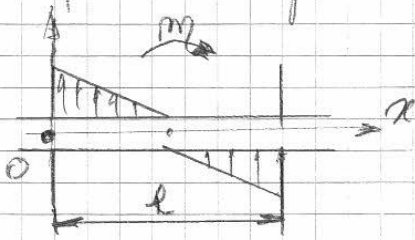
$$p = \frac{F}{l \cdot u} = \frac{F}{S}$$



(6)

4 - REPARTITION LONGITUDINALE DE LA PRESSION

AVEC UN COUPLE AU LIEU DU MOMENT F.m PRECEDENT

Répartition toujours selon $p = ax + b$ mais $F.m = M$ et $F = 0$ 

1) dérivé $M + \frac{al^3}{3} + \frac{bl^2}{2} = 0$ (1a)

2) dérivé $\frac{al^2}{2} + bl = 0$ (2a)

On tire a de 1a) et 2a)

$$a = \left(-\frac{bl^2}{2} - M \right) \cdot \frac{3}{l^3}$$

$$a = -bl \cdot \frac{2}{l^2}$$

$$-\frac{3bl^2}{2l^3} - \frac{6M}{2l^3} + \frac{4bl^2}{2l^3} = 0$$

$$b \left(\frac{l^2}{2l^3} \right) - \frac{6M}{2l^3} = 0 \quad b = \frac{6M}{2l^3} \cdot \frac{2l^3}{l^2} \quad b = \frac{6M}{l^2}$$

$$a = -\frac{2b}{l}$$

$$a = -\frac{12M}{l^3}$$

$$p = ax + b$$

$$p_{\text{linéaire}} = -\frac{12M}{l^3} x + \frac{6M}{l^2}$$

Si appuyé sur face largeur u (voir encadré page 5)

$$p = \frac{p_{\text{linéaire}}}{u}$$

$$p = \frac{6 \cdot M}{u \cdot l^2} \left(-\frac{2x}{l} + 1 \right)$$

NOTA: à $x = \frac{l}{2}$ pression nulle