Existencia de Yang–Mills y del salto de masa

Oscar García-Prada
(CSIC)

1 de junio de 2011

Existencia de Yang–Mills y del salto de masa

Probar que para todo grupo de Lie compacto simple G, la teoría cuántica de Yang–Mills en $\mathbb{R}^4$ existe y tiene un salto de masa $\Delta > 0$.

Chen-Ning Yang (1922-) y Robert L. Mills (1927–1999)

- En 1954 Chen-Ning Yang y Robert L. Mills introdujeron una teoría para describir la interacción débil y la interacción fuerte

- En 1954 Chen-Ning Yang y Robert L. Mills introdujeron una teoría para describir la interacción débil y la interacción fuerte

- Teoría fundamental en el estudio de partículas elementales y física nuclear en los últimos casi sesenta años

- En 1954 Chen-Ning Yang y Robert L. Mills introdujeron una teoría para describir la interacción débil y la interacción fuerte
- Teoría fundamental en el estudio de partículas elementales y física nuclear en los últimos casi sesenta años
- La teoría de Yang–Mills emerge por un lado de la geometría diferencial y por otro lado de la física moderna, en particular de la mecánica cuántica

- Generalización de la teoría de Maxwell del electromagnetismo

- Generalización de la teoría de Maxwell del electromagnetismo
- Diferencia esencial entre las fuerzas nucleares y la fuerza electromagnética:

- Generalización de la teoría de Maxwell del electromagnetismo
- Diferencia esencial entre las fuerzas nucleares y la fuerza electromagnética:
  - la fuerza electromagnética se extiende a distancias muy largas
  - las fuerzas nucleares son de muy corto alcance

- Generalización de la teoría de Maxwell del electromagnetismo
- Diferencia esencial entre las fuerzas nucleares y la fuerza electromagnética:
  - la fuerza electromagnética se extiende a distancias muy largas
  - las fuerzas nucleares son de muy corto alcance
- Esto se traduce en que:
  - los campos responsables de las interacciones nucleares tienen que tener masa (en contraste con lo que sucede con los fotones responsables de la interacción electromagnética)
  - se dice en este caso que existe un **salto de masa**

- Problema:
  - en la teoría clásica de Yang–Mills las partículas no tienen masa
  - sin embargo todos los experimentos indican que en la teoría cuántica los campos de Yang–Mills que describen las interacciones nucleares tienen masa no nula

- Problema:
  - en la teoría clásica de Yang–Mills las partículas no tienen masa
  - sin embargo todos los experimentos indican que en la teoría cuántica los campos de Yang–Mills que describen las interacciones nucleares tienen masa no nula

Problema propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas

Demostrar de modo matemáticamente riguroso la existencia de la teoría de Yang–Mills cuántica y la existencia del salto de masa

Plan de las charlas:

- Parte I:
  - Interacción electromagnética
  - Principio de invarianza gauge

Plan de las charlas:

- Parte I:
  - Interacción electromagnética
  - Principio de invarianza gauge

- Parte II:
  - Fuerzas nucleares y teoría de Yang–Mills
  - Estructura geométrica de la teoría de Yang–Mills

Plan de las charlas:

- Parte I:
  - Interacción electromagnética
  - Principio de invarianza gauge

- Parte II:
  - Fuerzas nucleares y teoría de Yang–Mills
  - Estructura geométrica de la teoría de Yang–Mills

- Parte III:
  - Cuantización de las teorías de Yang–Mills
  - Problema de existencia de Yangs–Mills y salto de masa
  - Algunas estrategias para abordar el problema

- Interacción electromagnética: fenómenos eléctricos y magnéticos de la vida cotidiana

- Interacción electromagnética: fenómenos eléctricos y magnéticos de la vida cotidiana

- Postulamos: la materia tiene un atributo al que llamamos **carga eléctrica**

- Interacción electromagnética: fenómenos eléctricos y magnéticos de la vida cotidiana
- Postulamos: la materia tiene un atributo al que llamamos **carga eléctrica**

Charles A. Coulomb (1736–1806)

- Ley de Coulomb:
  Dos cargas estacionarias ejercen una fuerza mutua que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

- Ley de Coulomb:
  Dos cargas estacionarias ejercen una fuerza mutua que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

- Fuerza similar a la fuerza gravitatoria ejercida entre dos masas

- Ley de Coulomb:
  Dos cargas estacionarias ejercen una fuerza mutua que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

- Fuerza similar a la fuerza gravitatoria ejercida entre dos masas

- Diferencias:
  - La fuerza eléctrica es mucho más fuerte, con un factor de 10^{35}

- Ley de Coulomb:
  Dos cargas estacionarias ejercen una fuerza mutua que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

- Fuerza similar a la fuerza gravitatoria ejercida entre dos masas

- Diferencias:
  - La fuerza eléctrica es mucho más fuerte, con un factor de 10^{35}
  - La carga eléctrica puede ser positiva o negativa: dos cargas de distinto signo se atraen y de igual signo se repelen

- Una carga puntual q crea un campo eléctrico radial alejandose de ella misma, de una magnitud inversamente proporcional a la distancia al cuadrado de la carga —**campo de Coulomb**:

$$\text{Campo de Coulomb} = \frac{q}{r^2}$$

- Una carga puntual q crea un campo eléctrico radial alejandose de ella misma, de una magnitud inversamente proporcional a la distancia al cuadrado de la carga —**campo de Coulomb**:

$$\text{Campo de Coulomb} = \frac{q}{r^2}$$

- Visualización del campo eléctrico: "líneas de fuerza" tangentes a la direccion del campo en cada punto

- Una carga puntual q crea un campo eléctrico radial alejandose de ella misma, de una magnitud inversamente proporcional a la distancia al cuadrado de la carga —**campo de Coulomb**:

$$\text{Campo de Coulomb} = \frac{q}{r^2}$$

- Visualización del campo eléctrico: "líneas de fuerza" tangentes a la direccion del campo en cada punto

Flujo $= N^\circ$de líneas por unidad de área perpendicular a la dirección

- Una carga puntual q crea un campo eléctrico radial alejandose de ella misma, de una magnitud inversamente proporcional a la distancia al cuadrado de la carga —**campo de Coulomb**:

$$\text{Campo de Coulomb} = \frac{q}{r^2}$$

- Visualización del campo eléctrico: "líneas de fuerza" tangentes a la direccion del campo en cada punto

Flujo $= N^\circ$de líneas por unidad de área perpendicular a la dirección

- Consideremos una esfera de radio r al rededor de una carga eléctrica

- Una carga puntual q crea un campo eléctrico radial alejandose de ella misma, de una magnitud inversamente proporcional a la distancia al cuadrado de la carga —**campo de Coulomb**:

$$\text{Campo de Coulomb} = \frac{q}{r^2}$$

- Visualización del campo eléctrico: "líneas de fuerza" tangentes a la direccion del campo en cada punto

Flujo = N°de líneas por unidad de área perpendicular a la dirección

- Consideremos una esfera de radio r al rededor de una carga eléctrica

- Superficie de la esfera aumenta con r como r^2

- Como el campo eléctrico decrece como r^{-2}, el número de líneas de flujo que atraviesa la esfera es una constante que depende de la carga — **ley de Gauss**, equivalente a la ley de Coulomb

- Como el campo eléctrico decrece como r^{-2}, el número de líneas de flujo que atraviesa la esfera es una constante que depende de la carga — **ley de Gauss**, equivalente a la ley de Coulomb

- La interacción eléctrica no es algo que se hace más débil con el cuadrado de la distancia — es algo que se propaga

- Como el campo eléctrico decrece como r^{-2}, el número de líneas de flujo que atraviesa la esfera es una constante que depende de la carga — **ley de Gauss**, equivalente a la ley de Coulomb

- La interacción eléctrica no es algo que se hace más débil con el cuadrado de la distancia — es algo que se propaga

- Según nos alejamos el campo es menos intenso en un punto dado, pero la cantidad total de flujo al rededor de la esfera es la misma con la distancia

- Como el campo eléctrico decrece como r^{-2}, el número de líneas de flujo que atraviesa la esfera es una constante que depende de la carga — **ley de Gauss**, equivalente a la ley de Coulomb

- La interacción eléctrica no es algo que se hace más débil con el cuadrado de la distancia — es algo que se propaga

- Según nos alejamos el campo es menos intenso en un punto dado, pero la cantidad total de flujo al rededor de la esfera es la misma con la distancia

- La electricidad es una fuerza largo alcance

- **Potencial de Coulomb** o **potencial escalar** debido a una carga puntual q:

$$\text{Potencial de Coulomb} = \frac{q}{r}$$

- **Potencial de Coulomb** o **potencial escalar** debido a una carga puntual q:

$$\text{Potencial de Coulomb} = \frac{q}{r}$$

- Una colección de cargas define un potencial escalar ϕ que es la suma de los potenciales de Coulomb individuales

- **Potencial de Coulomb** o **potencial escalar** debido a una carga puntual q:

$$\text{Potencial de Coulomb} = \frac{q}{r}$$

- Una colección de cargas define un potencial escalar ϕ que es la suma de los potenciales de Coulomb individuales

- Campo eléctrico:

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\phi$$

Hans Christian Oersted (1777–1851)

- Hans Christian Oersted: una corriente eléctrica genera un campo magnético

- Hans Christian Oersted: una corriente eléctrica genera un campo magnético

- Puesto que no hay cargas magnéticas las líneas de fuerza del campo magnético $\vec{B}$ tienen que ser líneas cerradas

- Hans Christian Oersted: una corriente eléctrica genera un campo magnético

- Puesto que no hay cargas magnéticas las líneas de fuerza del campo magnético $\vec{B}$ tienen que ser líneas cerradas
  $\Longleftrightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Hans Christian Oersted: una corriente eléctrica genera un campo magnético

- Puesto que no hay cargas magnéticas las líneas de fuerza del campo magnético $\vec{B}$ tienen que ser líneas cerradas

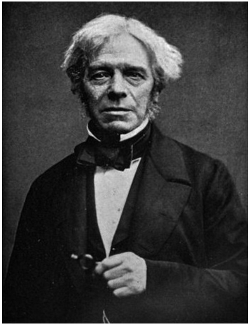
$\Longleftrightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

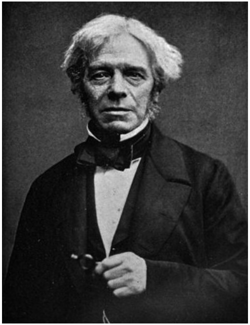
$\Longleftrightarrow$

- Existe un campo vectorial $\vec{A}$, denominado **potencial vectorial** tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

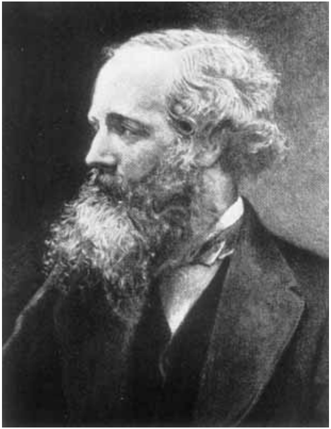


Michael Faraday (1791–1857)



Michael Faraday (1791–1857)

- Michael Faraday: Un campo magnético variable genera un campo eléctrico —**inducción electromagnética**



James Clerk Maxwell (1831–1879)

Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{\jmath} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E},$$

$\rho =$ densidad de carga
$\vec{\jmath} := \rho\vec{v} =$ densidad de corriente

- Una perturbación en en el campo electromagnético se propaga con velocidad constante c

- Una perturbación en en el campo electromagnético se propaga con velocidad constante c
- Maxwell: existencia de la radiación electromagnética (verificado por Hertz 30 años más tarde en el laboratorio: $c =$ velocidad de la luz)

Henrich R. Hertz (1857–1894)

- ¿"Éter": Medio de propagación de las ondas electromagnéticas?

- ¿"Éter": Medio de propagación de las ondas electromagnéticas?
- Michelson y Morley: velocidad de la luz no depende de la dirección de emisión

Albert Einstein (1879–1955)

- Einstein: la luz se propaga con una velocidad constante para todos los observadores, y no hay ningún medio salvo el vacio

- Einstein: la luz se propaga con una velocidad constante para todos los observadores, y no hay ningún medio salvo el vacio

- Principio básico de la física: una ley física debe ser independiente del observador

- Einstein: la luz se propaga con una velocidad constante para todos los observadores, y no hay ningún medio salvo el vacio
- Principio básico de la física: una ley física debe ser independiente del observador

  Equivalente a:

- La ley debe ser expresada por una ecuación que tiene la misma forma en todos los sistemas de referencia

- Einstein: la luz se propaga con una velocidad constante para todos los observadores, y no hay ningún medio salvo el vacio

- Principio básico de la física: una ley física debe ser independiente del observador

  Equivalente a:

- La ley debe ser expresada por una ecuación que tiene la misma forma en todos los sistemas de referencia

- Se dice que ley física es **covariante** con respecto a las leyes de transformación entre un sistema de referencia y otro

- Consideremos dos observadores que se mueven a una velocidad relativa v

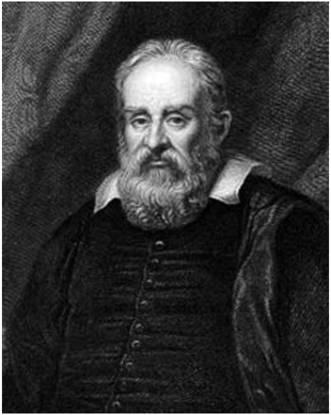
- Consideremos dos observadores que se mueven a una velocidad relativa v
- Tiempo $= t, t'$

- Consideremos dos observadores que se mueven a una velocidad relativa v
- Tiempo $= t, t'$
- Posición $= x, x'$

- Consideremos dos observadores que se mueven a una velocidad relativa v
- Tiempo $= t, t'$
- Posición $= x, x'$

- **Transformación galileana**:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt. \end{aligned}$$



Galileo Galilei (1564–1642)

Isaac Newton (1643–1727)

Isaac Newton (1643–1727)

- La ecuación de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ es covariante con respecto a la transformación galileana

- Las ecuaciones de Maxwell no son covariantes con respecto a las transformaciones galileanas —la velocidad de la luz debe ser constante en todos los sistemas de referencia de acuerdo a Einstein

- Las ecuaciones de Maxwell no son covariantes con respecto a las transformaciones galileanas —la velocidad de la luz debe ser constante en todos los sistemas de referencia de acuerdo a Einstein

- Encontrar la ley de transformación bajo las cuales las ecuaciones de Maxwell son covariantes

- Las ecuaciones de Maxwell no son covariantes con respecto a las transformaciones galileanas —la velocidad de la luz debe ser constante en todos los sistemas de referencia de acuerdo a Einstein

- Encontrar la ley de transformación bajo las cuales las ecuaciones de Maxwell son covariantes

- Corregir la ecuación de Newton de modo que la nueva ecuación sea covariante con respecto a la nueva ley de transformación

- Clave:
  - Combinar el tiempo con las tres coordenadas espaciales: espacio-tiempo de dimensión 4

- Clave:
  - Combinar el tiempo con las tres coordenadas espaciales: espacio-tiempo de dimensión 4
  - La cantidad que es independiente del observador es el intervalo espacio temporal definido por

$$I = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

- Clave:
  - Combinar el tiempo con las tres coordenadas espaciales: espacio-tiempo de dimensión 4
  - La cantidad que es independiente del observador es el intervalo espacio temporal definido por

$$I = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

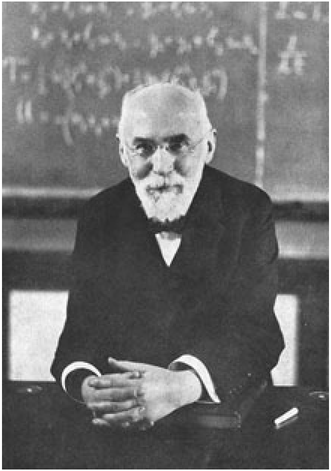
- "Métrica" en el espacio-tiempo — análogo a la distancia euclídea

- Clave:
  - Combinar el tiempo con las tres coordenadas espaciales: espacio-tiempo de dimensión 4
  - La cantidad que es independiente del observador es el intervalo espacio temporal definido por

$$I = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

- "Métrica" en el espacio-tiempo — análogo a la distancia euclídea

- Las transformaciones del espacio-tiempo deben preservar esta métrica



Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)

- **Transformaciones de Lorentz**:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

- **Transformaciones de Lorentz**:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$x' = \frac{x - vt/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

- Transformaciones galileanas: $v/c \to 0$

- Energía en mecánica clásica

$$\begin{aligned} E &= \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial} \\ &= \vec{p} \cdot \vec{p}/2m + V(x) \end{aligned}$$

$\vec{p} = m\vec{v} = \text{momento}$

- Energía en mecánica clásica

$$\begin{aligned} E &= \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial} \\ &= \vec{p} \cdot \vec{p}/2m + V(x) \end{aligned}$$

$\vec{p} = m\vec{v} = \text{momento}$

- Energía en relatividad

$$E^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}c^2 + m^2 c^4$$

- Energía en mecánica clásica

$$\begin{aligned} E &= \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial} \\ &= \vec{p} \cdot \vec{p}/2m + V(x) \end{aligned}$$

$\vec{p} = m\vec{v} = \text{momento}$

- Energía en relatividad

$$E^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}c^2 + m^2c^4$$

- Si $\vec{p} = 0$:

$$E = mc^2$$

- ¿Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell?

- ¿Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell?

- Coordenadas en el espacio-tiempo 4-dimensional:

$$\text{4-vector}: \quad x^{\mu} = (ct, x, y, z) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

- ¿Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell?
- Coordenadas en el espacio-tiempo 4-dimensional:

$$\text{4-vector}: \quad x^\mu = (ct, x, y, z) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

- Forma covariante de $x = x^\mu$:

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$$

- ¿Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell?
- Coordenadas en el espacio-tiempo 4-dimensional:

$$\text{4-vector}: \quad x^\mu = (ct, x, y, z) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

- Forma covariante de $x = x^\mu$:

$$x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$$

- Producto Lorentziano de dos 4-vectores x e y:

$$x.y = x^\mu y_\mu$$

(convención de Einstein: suma sobre índices repetidos)

- $\mathbb{R}^4$ con este producto se denomina **espacio-tiempo de Minkowski**

- $\mathbb{R}^4$ con este producto se denomina **espacio-tiempo de Minkowski**

Hermann Minkowski (1864–1909)

- **Potencial 4-vector**

$$A = (\phi, \vec{A})$$

- **Potencial 4-vector**

$$A = (\phi, \vec{A})$$

- **4-Vector de densidad de corriente**

$$j = (c\rho, \vec{j})$$

- **Potencial** 4**-vector**

$$A = (\phi, \vec{A})$$

- 4-**Vector de densidad de corriente**

$$j = (c\rho, \vec{j})$$

- Campos eléctrico y magnético son componentes de un campo tensorial antisimétrico:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$$

- Explícitamente:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Campo tensorial dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$: cambiando $\vec{E} \mapsto \vec{B}$ y $\vec{B} \mapsto -\vec{E}$

- Campo tensorial dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$: cambiando $\vec{E} \mapsto \vec{B}$ y $\vec{B} \mapsto -\vec{E}$

Forma covariante las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

- **Transformaciones gauge**
  χ: función en el espacio-tiempo

- **Transformaciones gauge**
  χ: función en el espacio-tiempo

$$A^{\mu} \mapsto A'^{\mu} := A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi$$

- **Transformaciones gauge**
  χ: función en el espacio-tiempo

$$A^{\mu} \mapsto A'^{\mu} := A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi$$

- A^{μ} y A'^{μ} determinan el mismo tensor $F^{\mu\nu}$

- **Transformaciones gauge**
  χ: función en el espacio-tiempo

$$A^\mu \mapsto A'^\mu := A^\mu + \partial^\mu \chi$$

- A^μ y A'^μ determinan el mismo tensor $F^{\mu\nu}$

- Propiedades físicas dependen solamente de los campos eléctrico y magnético — deben ser "invariantes del gauge"

- **Transformaciones gauge**
  χ: función en el espacio-tiempo

$$A^\mu \mapsto A'^\mu := A^\mu + \partial^\mu \chi$$

- A^μ y A'^μ determinan el mismo tensor $F^{\mu\nu}$
- Propiedades físicas dependen solamente de los campos eléctrico y magnético — deben ser "invariantes del gauge"
- A se denomina "potencial o campo gauge"

En términos del potencial gauge:

- $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ se satisface automáticamente

En términos del potencial gauge:

- $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ se satisface automáticamente
- $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$ es equivalente a:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 A = \frac{4\pi}{c} j$$

En términos del potencial gauge:

- $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ se satisface automáticamente

- $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$ es equivalente a:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 A = \frac{4\pi}{c} j$$

- la densidad de corriente es la fuente del campo gauge

En términos del potencial gauge:

- $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ se satisface automáticamente
- $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$ es equivalente a:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 A = \frac{4\pi}{c} j$$

- la densidad de corriente es la fuente del campo gauge
- el campo se propaga como una onda que viaja a velocidad constante c

En términos del potencial gauge:

- $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ se satisface automáticamente
- $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$ es equivalente a:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 A = \frac{4\pi}{c} j$$

- la densidad de corriente es la fuente del campo gauge
- el campo se propaga como una onda que viaja a velocidad constante c
- cualquier campo que satisfaga una ecuación de onda como ésta describe un fenómeno de largo alcance

- Fenómeno de corto alcance: ecuación como la anterior con un término extra

- Fenómeno de corto alcance: ecuación como la anterior con un término extra

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\vec{\nabla}^2 A = -\frac{1}{L^2}A$$

- Fenómeno de corto alcance: ecuación como la anterior con un término extra

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\vec{\nabla}^2 A = -\frac{1}{L^2}A$$

- Soluciones de baja energía localizadas en una distacia L:

$$A \sim \exp(r/L)$$

- Fenómeno de corto alcance: ecuación como la anterior con un término extra

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\vec{\nabla}^2 A = -\frac{1}{L^2}A$$

- Soluciones de baja energía localizadas en una distacia L:

$$A \sim \exp(r/L)$$

- Fuerza de corto alcance con escala de distancia L

Gauge de Weyl

Hermann Weyl (1885–1955)

- Intento de Hermann Weyl de unificar el electromagnetismo y la teoría de la gravitación de Einstein: Idea fundamental del principio de simetría gauge

- Intento de Hermann Weyl de unificar el electromagnetismo y la teoría de la gravitación de Einstein: Idea fundamental del principio de simetría gauge

- Relatividad general de Einstein: La fuerza gravitatoria es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo

- Intento de Hermann Weyl de unificar el electromagnetismo y la teoría de la gravitación de Einstein: Idea fundamental del principio de simetría gauge

- Relatividad general de Einstein: La fuerza gravitatoria es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo

- Un vector transportado de manera paralela a lo lago de una curva cerrada forma un ángulo con el vector original proporcional a la curvatura del espacio-tiempo

- Invarianza conforme de las ecuaciones de Maxwell

- Invarianza conforme de las ecuaciones de Maxwell

- Campo electromagnético: distorsión de la longitud relativista producida cuando un vector se mueve en transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada

- Invarianza conforme de las ecuaciones de Maxwell

- Campo electromagnético: distorsión de la longitud relativista producida cuando un vector se mueve en transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada

- Modificar el tensor métrico de Einstein con un factor de escala

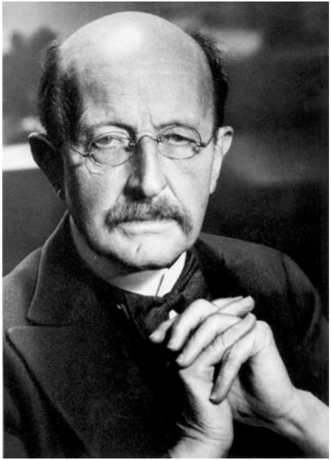
$$\exp \frac{q}{\gamma} \int A_\mu dx^\mu,$$

$A_\mu =$ potencial gauge, $q =$ carga y $\gamma =$ constante

- Einstein: La idea de Weyl es insostenible — si la longitud de nuestra regla de medir se acorta cada vez que damos una vuelta en un camino cerrado, entonces la idea de longitud (relativista) no tiene ningún sentido

- Einstein: La idea de Weyl es insostenible — si la longitud de nuestra regla de medir se acorta cada vez que damos una vuelta en un camino cerrado, entonces la idea de longitud (relativista) no tiene ningún sentido

- Idea de Weyl era casi correcta, pero en un contexto totalmente diferente: la mecánica cuántica



Max Planck (1858–1947)

- Max Planck (1900): La energía de la luz da saltos o está "cuantizada" en paquetes de valor

$$E = h\nu$$

$\nu =$ frecuencia
$h =$ constante de Planck $= 6{,}63 \times 10^{-27}$ ergios-segundo

- Max Planck (1900): La energía de la luz da saltos o está "cuantizada" en paquetes de valor

$$E = h\nu$$

$\nu =$ frecuencia
$h =$ constante de Planck $= 6{,}63 \times 10^{-27}$ ergios-segundo

- Idea utilizada por Niels Bohr para explicar los niveles de energía del átomo de hidrógeno

- Max Planck (1900): La energía de la luz da saltos o está "cuantizada" en paquetes de valor

$$E = h\nu$$

$\nu =$ frecuencia
$h =$ constante de Planck $= 6{,}63 \times 10^{-27}$ ergios-segundo

- Idea utilizada por Niels Bohr para explicar los niveles de energía del átomo de hidrógeno

- Las ondas se comportan en cierto modo como partículas

Louis De Broglie (1892–1987)

- De Broglie: Si las ondas se comportan como partículas ¿por qué no podemos considerar que las partículas se comportan como ondas?

- De Broglie: Si las ondas se comportan como partículas ¿por qué no podemos considerar que las partículas se comportan como ondas?

- Una partícula puede ser descrita como una onda: Energía relacionada con la frecuencia y momento está relacionado con la longitud de onda:

$$E = h\nu \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

- De Broglie: Si las ondas se comportan como partículas ¿por qué no podemos considerar que las partículas se comportan como ondas?

- Una partícula puede ser descrita como una onda: Energía relacionada con la frecuencia y momento está relacionado con la longitud de onda:

$$E = h\nu \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

- Todo son ondas y partículas al mismo tiempo (los dos puntos de vista son compatibles y dan información)

Niels Bohr (1885–1962)

Niels Bohr (1885–1962)

Cualquiera que no esté impactado con la teoría cuántica es que no la ha entendido

- ¿Si las partículas son ondas, cuál es la ecuación que gobierna a estas ondas?

- ¿Si las partículas son ondas, cuál es la ecuación que gobierna a estas ondas?

- Schrödinger: La ecuación involucra una función $\psi(x)$ que toma valores en los números complejos

- ¿Si las partículas son ondas, cuál es la ecuación que gobierna a estas ondas?
- Schrödinger: La ecuación involucra una función $\psi(x)$ que toma valores en los números complejos
  - $|\psi(x)|^2$ da una medida de la probabilidad de encontrar la partícula en el punto x

- ¿Si las partículas son ondas, cuál es la ecuación que gobierna a estas ondas?

- Schrödinger: La ecuación involucra una función $\psi(x)$ que toma valores en los números complejos
  - $|\psi(x)|^2$ da una medida de la probabilidad de encontrar la partícula en el punto x
  - La fase de $\psi(x)$ da lugar a fenómenos de interferencia característicos de las ondas

- ¿Si las partículas son ondas, cuál es la ecuación que gobierna a estas ondas?

- Schrödinger: La ecuación involucra una función $\psi(x)$ que toma valores en los números complejos
  - $|\psi(x)|^2$ da una medida de la probabilidad de encontrar la partícula en el punto x
  - La fase de $\psi(x)$ da lugar a fenómenos de interferencia característicos de las ondas

- Ecuación para ψ a partir de la ecuación para la energía y el momento:
  $E \rightsquigarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} \rightsquigarrow -i\hbar\vec{\nabla}$
  $\hbar = h/2\pi$

- De la ecuación no relativista $E = \vec{p} \cdot \vec{p}/2m + V(x)$ obtenemos la **ecuación de Schrödinger**:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi + V(x)\psi$$

- De la ecuación no relativista $E = \vec{p} \cdot \vec{p}/2m + V(x)$ obtenemos la **ecuación de Schrödinger**:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi + V(x)\psi$$

- De la ecuación relativista $E^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} c^2 + m^2 c^4$: obtenemos la **ecuación de Klein–Gordon**:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 \psi + m^2 c^4 \psi$$

- Dividiendo por $-\hbar^2 c^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= \vec{\nabla}^2\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \\ &= \vec{\nabla}^2\psi - \frac{1}{L^2}\psi \end{aligned}$$

$L = \hbar/mc =$ "longitud de onda de Compton"

- Dividiendo por $-\hbar^2 c^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= \vec{\nabla}^2\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \\ &= \vec{\nabla}^2\psi - \frac{1}{L^2}\psi \end{aligned}$$

$L = \hbar/mc =$ "longitud de onda de Compton"

- Ecuación que mencionamos anteriormente para describir un fenómeno cuya propagación decrece rápidamente

- Dividiendo por $-\hbar^2 c^2$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = \vec{\nabla}^2\psi - \frac{1}{L^2}\psi$$

$L = \hbar/mc =$ "longitud de onda de Compton"

- Ecuación que mencionamos anteriormente para describir un fenómeno cuya propagación decrece rápidamente

- la razón con la que disminuye la propagación tiene que ver con la masa — si la partícula tiene masa $m \neq 0$ tenemos un fenómeno de corto alcance de longitud típica $1/m$ (**salto de masa!**)

- Transformación gauge en mecánica cuántica:

$$A \mapsto A + \partial\alpha, \qquad \psi \mapsto U\psi$$

- ψ: función de onda de una partícula cargada con carga q
- α: función
- U: factor de fase

$$U = \exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\alpha\right)$$

- Transformación gauge en mecánica cuántica:

$$A \mapsto A + \partial\alpha, \qquad \psi \mapsto U\psi$$

- ψ: función de onda de una partícula cargada con carga q
- α: función
- U: factor de fase

$$U = \exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\alpha\right)$$

- Invarianza de ecuación de Schrödinger por transformaciones gauge:

$$\partial \rightsquigarrow D = \partial + \frac{iq}{\hbar c}A$$

- Transformación gauge en mecánica cuántica:

$$A \mapsto A + \partial\alpha, \qquad \psi \mapsto U\psi$$

- ψ: función de onda de una partícula cargada con carga q
- α: función
- U: factor de fase

$$U = \exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\alpha\right)$$

- Invarianza de ecuación de Schrödinger por transformaciones gauge:

$$\partial \rightsquigarrow D = \partial + \frac{iq}{\hbar c}A$$

- $D =$ derivada covariante — $U(1)$-conexión

Principio de invarianza gauge

- Invarianza por una transformación gauge global ($\alpha =$ constante)

Principio de invarianza gauge

- Invarianza por una transformación gauge global ($\alpha =$ constante)
- Para invarianza gauge local ($\alpha =$ función):

$$\partial \rightsquigarrow D$$

Principio de invarianza gauge

- Invarianza por una transformación gauge global ($\alpha =$ constante)
- Para invarianza gauge local ($\alpha =$ función):

$$\partial \rightsquigarrow D$$

- Invarianza gauge local $\Longleftrightarrow$ acoplamiento al campo gauge

Principio de invarianza gauge

- Invarianza por una transformación gauge global ($\alpha =$ constante)
- Para invarianza gauge local ($\alpha =$ función):

$$\partial \rightsquigarrow D$$

- Invarianza gauge local $\Longleftrightarrow$ acoplamiento al campo gauge
- El nombre de "gauge" (que siginifica "escala" o "calibre") se ha mantenido al referirse al cambio de fase

Principio de invarianza gauge

- Invarianza por una transformación gauge global ($\alpha =$ constante)
- Para invarianza gauge local ($\alpha =$ función):

$$\partial \rightsquigarrow D$$

- Invarianza gauge local $\Longleftrightarrow$ acoplamiento al campo gauge
- El nombre de "gauge" (que siginifica "escala" o "calibre") se ha mantenido al referirse al cambio de fase

Fin de la Primera Parte!

Chen-Ning Yang (1922–) y Robert L. Mills (1927–1999)

- Yang y Mills generalizaron el principio de simetría gauge al grupo $SU(2)$ de matrices complejas 2×2 unitarias ($M\bar{M}^t = I$) con determinante unidad

- Yang y Mills generalizaron el principio de simetría gauge al grupo $SU(2)$ de matrices complejas 2×2 unitarias $(M\bar{M}^t = I)$ con determinante unidad

- Generalización de las ecuaciones de Maxwell que describe todas las interacciones fundamentales entre partículas elementales

- Yang y Mills generalizaron el principio de simetría gauge al grupo $SU(2)$ de matrices complejas 2×2 unitarias ($M\bar{M}^t = I$) con determinante unidad

- Generalización de las ecuaciones de Maxwell que describe todas las interacciones fundamentales entre partículas elementales

Neils Henrik Abel (1802–1829) Marius Sophus Lie (1841–1899)

- Física nuclear años 1950: neutrones, protones y mesones π

- Física nuclear años 1950: neutrones, protones y mesones π
- Tres tipos de mesones π según su carga sea neutra, positiva o negativa: π^0,π^+, π^-

- Física nuclear años 1950: neutrones, protones y mesones π
- Tres tipos de mesones π según su carga sea neutra, positiva o negativa: π^0,π^+, π^-
- Procesos:

$$p \longleftrightarrow n + \pi^+$$

$$n \longleftrightarrow p + \pi^-$$

- Física nuclear años 1950: neutrones, protones y mesones π
- Tres tipos de mesones π según su carga sea neutra, positiva o negativa: π^0,π^+, π^-
- Procesos:

$$p \longleftrightarrow n + \pi^+$$

$$n \longleftrightarrow p + \pi^-$$

- Conservación del *isoespín* (atributo similar al espín)

- Protón y el neutrón se comportan básicamente del mismo modo: dos estados distintos de una misma partícula a la que llamamos *nucleón* con isoespín $1/2$

- Protón y el neutrón se comportan básicamente del mismo modo: dos estados distintos de una misma partícula a la que llamamos *nucleón* con isoespín 1/2

- Descripción del nucleón con una función de ondas con dos componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

- Protón y el neutrón se comportan básicamente del mismo modo: dos estados distintos de una misma partícula a la que llamamos *nucleón* con isoespín $1/2$

- Descripción del nucleón con una función de ondas con dos componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

- Representación de los mesones como matrices 2×2:

$$\pi^+ \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi^- \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi^0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Conservación del isoespín $\Longleftrightarrow$ invarianza bajo la acción de $SU(2)$ (una simetría gauge global con grupo $SU(2)$)

- Conservación del isoespín $\Longleftrightarrow$ invarianza bajo la acción de $SU(2)$ (una simetría gauge global con grupo $SU(2)$)
- Gran idea de Yang–Mills: Principio gauge de Weyl del electromagnetismo pero con matrices!

- Conservación del isoespín $\Longleftrightarrow$ invarianza bajo la acción de $SU(2)$ (una simetría gauge global con grupo $SU(2)$)

- Gran idea de Yang–Mills: Principio gauge de Weyl del electromagnetismo pero con matrices!

- Invarianza gauge local $\Longleftrightarrow$ derivadas covariantes

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

A_μ son matrices 2×2 antihermíticas de traza nula: elementos del álgebra de Lie de $SU(2)$

- Campo tensorial F y ecuaciones similares a las de Maxwell

- Campo tensorial F y ecuaciones similares a las de Maxwell
- Gran diferencia:
  $SU(2)$ no abeliano $\Longleftrightarrow$ F tiene términos cuadráticos en A
  $\Longrightarrow$ ecuaciones diferenciales no lineales
  $\Longleftrightarrow$ los campos de fuerza (mesones π) actúan sobre si mismos

- Campo tensorial F y ecuaciones similares a las de Maxwell
- Gran diferencia:
  $SU(2)$ no abeliano $\Longleftrightarrow$ F tiene términos cuadráticos en A
  $\Longrightarrow$ ecuaciones diferenciales no lineales
  $\Longleftrightarrow$ los campos de fuerza (mesones π) actúan sobre si mismos
- Problema con esta teoría: Los protones y los neutrones no son partículas elementales. Estos están formados por *quarks*

Murray Gell-Mann (1929–)

James Joyce

Finnegan's Wake:

Three quarks for Master Mark

- Dos estados para un quark: u y d ("up" y "down" en inglés respectivamente)

- Dos estados para un quark: u y d ("up" y "down" en inglés respectivamente)
- Nucleón = tres quarks, mesón = combinación de un quark y un antiquark:

$$p = \{uud\}, \quad n = \{udd\}$$
$$\pi^+ = \{u\bar{d}\} \quad \pi^- = \{d\bar{u}\}$$
$$\pi^0 = \text{combinación de } u\bar{u} \text{ y } d\bar{d}$$

- Dos estados para un quark: u y d (“up” y “down” en inglés respectivamente)

- Nucleón = tres quarks, mesón = combinación de un quark y un antiquark:

$$p = \{uud\}, \quad n = \{udd\}$$
$$\pi^{+} = \{u\bar{d}\} \quad \pi^{-} = \{d\bar{u}\}$$
$$\pi^{0} = \text{combinación de } u\bar{u} \text{ y } d\bar{d}$$

- $$\psi_{\text{quark}} = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}$$

- Dos estados para un quark: u y d ("up" y "down" en inglés respectivamente)
- Nucleón = tres quarks, mesón = combinación de un quark y un antiquark:

$$p = \{uud\}, \quad n = \{udd\}$$
$$\pi^+ = \{u\bar{d}\} \quad \pi^- = \{d\bar{u}\}$$
$$\pi^0 = \text{combinación de } u\bar{u} \text{ y } d\bar{d}$$

- $$\psi_{\text{quark}} = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}$$
- Aplicar ideas de Yang y Mills: $SU(2)$ mezcla ψ_u and ψ_d

- Los quarks tienen una simetría extra denominada *color*: Existen tres colores (rojo, azul, amarillo, digamos)

- Los quarks tienen una simetría extra denominada *color*: Existen tres colores (rojo, azul, amarillo, digamos)

$$\psi_u = \begin{pmatrix} \psi_{u,\mathrm{rojo}} \\ \psi_{u,\mathrm{azul}} \\ \psi_{u,\mathrm{amarillo}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

y análogamente para ψ_d

- Los quarks tienen una simetría extra denominada *color*: Existen tres colores (rojo, azul, amarillo, digamos)

$$\psi_u = \begin{pmatrix} \psi_{u,\text{rojo}} \\ \psi_{u,\text{azul}} \\ \psi_{u,\text{amarillo}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

y análogamente para ψ_d

- Conservación del color $\Longleftrightarrow$ invarianza bajo la acción de $SU(3)$ (simetría gauge global con grupo $SU(3)$)

- Los quarks tienen una simetría extra denominada *color*: Existen tres colores (rojo, azul, amarillo, digamos)

$$\psi_u = \begin{pmatrix} \psi_{u,\mathrm{rojo}} \\ \psi_{u,\mathrm{azul}} \\ \psi_{u,\mathrm{amarillo}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

  y análogamente para ψ_d

- Conservación del color $\Longleftrightarrow$ invarianza bajo la acción de $SU(3)$ (simetría gauge global con grupo $SU(3)$)

- Como todas las funciones son complejas, podemos multiplicar por una fase en $U(1)$

- **Modelo estándar**: Grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ — interacciones electromagnética, débil y fuerte

- **Modelo estándar**: Grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ — interacciones electromagnética, débil y fuerte
- $SU(3)$: ocho tipos de campos denominados *gluones*

- **Modelo estándar**: Grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ — interacciones electromagnética, débil y fuerte

- $SU(3)$: ocho tipos de campos denominados *gluones*
  - Transportan la interacción fuerte

- **Modelo estándar**: Grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ — interacciones electromagnética, débil y fuerte

- $SU(3)$: ocho tipos de campos denominados *gluones*
  - Transportan la interacción fuerte
  - Responsables de que los constituyentes de un protón o de un neutrón esten juntos formando una sola unidad

- **Modelo estándar**: Grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ — interacciones electromagnética, débil y fuerte

- $SU(3)$: ocho tipos de campos denominados *gluones*
  - Transportan la interacción fuerte
  - Responsables de que los constituyentes de un protón o de un neutrón esten juntos formando una sola unidad

- Los tres campos de $SU(2)$ y el único campo de $U(1)$ se combinan: campos W^+, W^- y Z de la interacción débil y el fotón del electromagnetismo

- **Modelo estándar**: Grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ — interacciones electromagnética, débil y fuerte
- $SU(3)$: ocho tipos de campos denominados *gluones*
  - Transportan la interacción fuerte
  - Responsables de que los constituyentes de un protón o de un neutrón esten juntos formando una sola unidad
- Los tres campos de $SU(2)$ y el único campo de $U(1)$ se combinan: campos W^+, W^- y Z de la interacción débil y el fotón del electromagnetismo
  - el campo gauge del electromagnetismo combina el factor $U(1)$ con $SU(2)$: unificación de las interacciones electromagnética y débil de Glashow, Salam y Weinberg (interacción *electrodébil*)

Principio de simetría gauge

- Sistema físico es invariante bajo la acción de un grupo de Lie G rígido (independiente del espacio-tiempo)

Principio de simetría gauge

- Sistema físico es invariante bajo la acción de un grupo de Lie G rígido (independiente del espacio-tiempo)
- Invariante cuando G se hace local, es decir se remplaza por $G(x)$, $x = x_\mu =$ punto del espacio tiempo

$\Longleftrightarrow$

$\partial_\mu \rightsquigarrow D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x)$ — derivada covariante
$A_\mu(x)$ campos vectoriales con valores en el álgebra de Lie de G

Principio de simetría gauge

- Sistema físico es invariante bajo la acción de un grupo de Lie G rígido (independiente del espacio-tiempo)
- Invariante cuando G se hace local, es decir se remplaza por $G(x)$, $x = x_\mu =$ punto del espacio tiempo

  $\iff$

  $\partial_\mu \rightsquigarrow D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x)$ — derivada covariante
  $A_\mu(x)$ campos vectoriales con valores en el álgebra de Lie de G
- Invarianza local $\iff$ campos $A_\mu(x)$ e interacción con la materia

- Significado geométrico de A_μ: conexión en G-fibrado
  $G(x) =$ sección del fibrado

- Significado geométrico de A_μ: conexión en G-fibrado $G(x) =$ sección del fibrado

- Gravitación de Einstein $\rightsquigarrow$ significado geométrico de la invarianza gauge

- Significado geométrico de A_μ: conexión en G-fibrado $G(x) =$ sección del fibrado
- Gravitación de Einstein $\rightsquigarrow$ significado geométrico de la invarianza gauge
- Gravitación $=$ Geometría del espacio tiempo

- Significado geométrico de A_μ: conexión en G-fibrado $G(x) =$ sección del fibrado
- Gravitación de Einstein $\rightsquigarrow$ significado geométrico de la invarianza gauge
- Gravitación $=$ Geometría del espacio tiempo
- Métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo — inspirado en geometría riemanniana

- Significado geométrico de A_μ: conexión en G-fibrado $G(x) =$ sección del fibrado
- Gravitación de Einstein $\rightsquigarrow$ significado geométrico de la invarianza gauge
- Gravitación $=$ Geometría del espacio tiempo
- Métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo — inspirado en geometría riemanniana
- Levi-Civita: Transporte paralelo

Tullio Levi-Civita (1873–1941)

- Levi-Civita: covarianza de las derivadas y del tensor de curvatura de Riemann, que se expresan en términos de la conexión de Christoffel

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

  se deben a las propiedades de transformación de la conexión de Christoffel bajo cambios de coordenadas, y no al hecho de que ésta se derivase de la métrica $g_{\mu\nu}$ de la variedad riemanniana o espacio-tiempo

- Levi-Civita: covarianza de las derivadas y del tensor de curvatura de Riemann, que se expresan en términos de la conexión de Christoffel

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

se deben a las propiedades de transformación de la conexión de Christoffel bajo cambios de coordenadas, y no al hecho de que ésta se derivase de la métrica $g_{\mu\nu}$ de la variedad riemanniana o espacio-tiempo

- Paso siguiente: noción de conexión en la variedad como algo independiente de la métrica
- Conexión: conjunto de funciones $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ que se transforman como la conexión de Christoffel

- Transporte paralelo de un vector $v(x)$: incremento infinitesimal

$$\delta v = (\nabla_\mu v) dx^\mu,$$

∇_μ es la derivada covariante definida por la conexion $(\nabla = \partial + \Gamma)$

- Transporte paralelo de un vector $v(x)$: incremento infinitesimal

$$\delta v = (\nabla_\mu v) dx^\mu,$$

∇_μ es la derivada covariante definida por la conexion $(\nabla = \partial + \Gamma)$

- Teoría fue desarrollada por el mismo Levi-Civita, Cartan, Weyl, de Rham, Ehresman, Hodge, Chern y otros

- Transporte paralelo de un vector $v(x)$: incremento infinitesimal

$$\delta v = (\nabla_\mu v) dx^\mu,$$

  ∇_μ es la derivada covariante definida por la conexion $(\nabla = \partial + \Gamma)$

- Teoría fue desarrollada por el mismo Levi-Civita, Cartan, Weyl, de Rham, Ehresman, Hodge, Chern y otros

- Culminación: construcción de la teoría de fibrados y conexiones a principios de los años 1950

Élie Cartan (1869–1951)

Georges de Rham (1903–1990)

William Hodge (1903–1975)

Charles Ehresman (1905–1979)

Shiing-Shen Chern (1911–2004)

G-fibrado principal

- G: Grupo de Lie

G-fibrado principal

- G: Grupo de Lie
- Variedad diferenciable P con una acción lisa del grupo G

G-fibrado principal

- G: Grupo de Lie
- Variedad diferenciable P con una acción lisa del grupo G
- Espacio de orbitas $P/G = X$: Variedad diferenciable

G-fibrado principal

- G: Grupo de Lie
- Variedad diferenciable P con una acción lisa del grupo G
- Espacio de orbitas $P/G = X$: Variedad diferenciable
- Localmente equivalente a la acción obvia de G en $U \times G$, $U =$ un abierto de X

G-fibrado principal

- G: Grupo de Lie
- Variedad diferenciable P con una acción lisa del grupo G
- Espacio de orbitas $P/G = X$: Variedad diferenciable
- Localmente equivalente a la acción obvia de G en $U \times G$, $U =$ un abierto de X
- Fibración $\pi : P \to X$

G-fibrado principal

- G: Grupo de Lie
- Variedad diferenciable P con una acción lisa del grupo G
- Espacio de orbitas $P/G = X$: Variedad diferenciable
- Localmente equivalente a la acción obvia de G en $U \times G$, $U =$ un abierto de X
- Fibración $\pi : P \to X$
- P tiene grupo de estructura G

Tres maneras de definir una *conexión* en un fibrado principal:

Tres maneras de definir una *conexión* en un fibrado principal:

- - campo (preservado por la acción de G) de "subespacios horizontales" $H \subset TP$ transverso a las fibras de π: para $p \in P$

$$TP_p = H_p \oplus T(\pi^{-1}(x))$$

$\pi(p) = x$

Tres maneras de definir una *conexión* en un fibrado principal:

- - campo (preservado por la acción de G) de "subespacios horizontales" $H \subset TP$ transverso a las fibras de π: para $p \in P$

$$TP_p = H_p \oplus T(\pi^{-1}(x))$$

$\pi(p) = x$

- Una 1-forma A en P con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G

Tres maneras de definir una *conexión* en un fibrado principal:

- - campo (preservado por la acción de G) de "subespacios horizontales" $H \subset TP$ transverso a las fibras de π: para $p \in P$

$$TP_p = H_p \oplus T(\pi^{-1}(x))$$

$\pi(p) = x$

- Una 1-forma A en P con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G
  - invariante por la acción del grupo G

Tres maneras de definir una *conexión* en un fibrado principal:

- - campo (preservado por la acción de G) de "subespacios horizontales" $H \subset TP$ transverso a las fibras de π: para $p \in P$

$$TP_p = H_p \oplus T(\pi^{-1}(x))$$

  $\pi(p) = x$

- Una 1-forma A en P con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G
  - invariante por la acción del grupo G
  -Restición de A a las fibras $=$ forma canónica invariante

Tres maneras de definir una *conexión* en un fibrado principal:

- - campo (preservado por la acción de G) de "subespacios horizontales" $H \subset TP$ transverso a las fibras de π: para $p \in P$

  $$TP_p = H_p \oplus T(\pi^{-1}(x))$$

  $\pi(p) = x$

- Una 1-forma A en P con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G
  - invariante por la acción del grupo G
  -Restición de A a las fibras $=$ forma canónica invariante

- Derivada covariante

- ρ: Representación de G en $V = \mathbb{C}^n$, o $V = \mathbb{R}^n$

- ρ: Representación de G en $V = \mathbb{C}^n$, o $V = \mathbb{R}^n$
- Fibrado vectorial E sobre X: $E := P \times_\rho V$

- ρ: Representación de G en $V = \mathbb{C}^n$, o $V = \mathbb{R}^n$
- Fibrado vectorial E sobre X: $E := P \times_\rho V$
- Localmente: E la forma $U \times V$, donde U es un abierto de X

- ρ: Representación de G en $V = \mathbb{C}^n$, o $V = \mathbb{R}^n$
- Fibrado vectorial E sobre X: $E := P \times_\rho V$
- Localmente: E la forma $U \times V$, donde U es un abierto de X
- Fibras de E: copias del espacio vectorial V

- Recíprocamente: fibrado vectorial $E \rightsquigarrow$ fibrado principal

- Recíprocamente: fibrado vectorial $E \rightsquigarrow$ fibrado principal
- E fibrado vectorial complejo de rango n $(n = \dim V) \rightsquigarrow$ $GL(n, \mathbb{C})$-fibrado principal

- Recíprocamente: fibrado vectorial $E \rightsquigarrow$ fibrado principal
- E fibrado vectorial complejo de rango n ($n = \dim V$) $\rightsquigarrow$ $GL(n, \mathbb{C})$-fibrado principal
- Estructura algebraica adicional en $E \rightsquigarrow$ fibrado principal con un grupo de estructura más pequeño

- Recíprocamente: fibrado vectorial $E \rightsquigarrow$ fibrado principal
- E fibrado vectorial complejo de rango n ($n = \dim V$) $\rightsquigarrow$ $GL(n, \mathbb{C})$-fibrado principal
- Estructura algebraica adicional en $E \rightsquigarrow$ fibrado principal con un grupo de estructura más pequeño
- E fibrado vectorial complejo con una métrica hermítica $\rightsquigarrow$ $U(n)$-fibrado principal

- Recíprocamente: fibrado vectorial $E \rightsquigarrow$ fibrado principal
- E fibrado vectorial complejo de rango n ($n = \dim V$) $\rightsquigarrow$ $GL(n, \mathbb{C})$-fibrado principal
- Estructura algebraica adicional en $E \rightsquigarrow$ fibrado principal con un grupo de estructura más pequeño
- E fibrado vectorial complejo con una métrica hermítica $\rightsquigarrow$ $U(n)$-fibrado principal
- Si ademas tenemos forma de volumen en cada fibra $\rightsquigarrow$ $SU(n)$-fibrado
- Para los grupos clásicos fibrado principal $\Longleftrightarrow$ fibrado vectorial

Derivada covariante

- E: fibrado vectorial

Derivada covariante

- E: fibrado vectorial
- Aplicación lineal:

$$\nabla_A : \Omega^0_X(E) \longrightarrow \Omega^1_X(E)$$

$\Omega^p_X(E) =$ espacio de secciones lisas de $\Lambda^p T^*X \otimes E$
—p-formas con valores en E

Derivada covariante

- E: fibrado vectorial
- Aplicación lineal:

$$\nabla_A : \Omega^0_X(E) \longrightarrow \Omega^1_X(E)$$

$\Omega^p_X(E) =$ espacio de secciones lisas de $\Lambda^p T^*X \otimes E$
—p-formas con valores en E

- Regla de Leibniz:

$$\nabla_A(f.s) = f\nabla_A s + df.s$$

Derivada covariante

- E: fibrado vectorial
- Aplicación lineal:

$$\nabla_A : \Omega^0_X(E) \longrightarrow \Omega^1_X(E)$$

  $\Omega^p_X(E) =$ espacio de secciones lisas de $\Lambda^p T^*X \otimes E$
  —p-formas con valores en E

- Regla de Leibnitz:

$$\nabla_A(f.s) = f\nabla_A s + df.s$$

- Si E tiene una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$d\langle s, t\rangle = \langle \nabla_A s, t\rangle + \langle s, \nabla_A t\rangle$$

- ad E = fibrado de álgebras de Lie asociado a la representacion adjunta

- ad E = fibrado de álgebras de Lie asociado a la representacion adjunta

- ad E es un subfibrado (real) de End $E = E \otimes E^*$
  - Grupo de estructura $= U(n)$: ad E = fibrado de endomorfismos antisimétricos del fibrado E
  -Grupo $= SU(n)$: además traza nula.

- ad E = fibrado de álgebras de Lie asociado a la representacion adjunta
- ad E es un subfibrado (real) de End $E = E \otimes E^*$
  - Grupo de estructura $= U(n)$: ad E = fibrado de endomorfismos antisimétricos del fibrado E
  -Grupo $= SU(n)$: además traza nula.
- Si A es una conexión en E y $a \in \Omega^1_X(\mathrm{ad}\, E) \iff \nabla_A + a$ es una derivada covariante

- ad E = fibrado de álgebras de Lie asociado a la representacion adjunta
- ad E es un subfibrado (real) de End $E = E \otimes E^*$
  - Grupo de estructura $= U(n)$: ad E = fibrado de endomorfismos antisimétricos del fibrado E
  -Grupo $= SU(n)$: además traza nula.
- Si A es una conexión en E y $a \in \Omega^1_X(\mathrm{ad}\, E) \Longleftrightarrow \nabla_A + a$ es una derivada covariante
- Recíprocamente: La diferencia de dos conexiones es un elemento $a \in \Omega^1_X(\mathrm{ad}\, E)$

- $\mathrm{ad}\, E$ = fibrado de álgebras de Lie asociado a la representacion adjunta

- $\mathrm{ad}\, E$ es un subfibrado (real) de $\mathrm{End}\, E = E \otimes E^*$
  - Grupo de estructura $= U(n)$: $\mathrm{ad}\, E$ = fibrado de endomorfismos antisimétricos del fibrado E
  -Grupo $= SU(n)$: además traza nula.

- Si A es una conexión en E y $a \in \Omega^1_X(\mathrm{ad}\, E) \Longleftrightarrow \nabla_A + a$ es una derivada covariante

- Recíprocamente: La diferencia de dos conexiones es un elemento $a \in \Omega^1_X(\mathrm{ad}\, E)$

- El conjunto $\mathscr{A}$ de todas las conexiones en E es un espacio afín de dimensión infinita modelado sobre $\Omega^1_X(\mathrm{ad}\, E)$

- $U =$ abierto de X
  Trivialización $E|_U \to U \times \mathbb{C}^n$
  Sobre U podemos escribir

$$\nabla_A = d + A$$

A: 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$ (una matriz de 1-formas sobre U)

- $U =$ abierto de X
  Trivialización $E|_U \to U \times \mathbb{C}^n$
  Sobre U podemos escribir

$$\nabla_A = d + A$$

  A: 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$ (una matriz de 1-formas sobre U)

- Eligiendo coordenadas en U: x_μ

$$\nabla_A = \sum \nabla_\mu dx_\mu$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

  A_μ: funciones matriciales

- U = abierto de X
  Trivialización $E|_U \to U \times \mathbb{C}^n$
  Sobre U podemos escribir

$$\nabla_A = d + A$$

A: 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$ (una matriz de 1-formas sobre U)

- Eligiendo coordenadas en U: x_μ

$$\nabla_A = \sum \nabla_\mu dx_\mu$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

A_μ: funciones matriciales
(Si $X = \mathbb{R}^4$ la descripción que acabamos de dar es global)

- Grupo gauge $\mathscr{G}$ de E: automorfismos

$$g : E \longrightarrow E$$

que respentan la estructura de las fibras e inducen la identidad en X

- Grupo gauge $\mathscr{G}$ de E: automorfismos

$$g : E \longrightarrow E$$

  que respentan la estructura de las fibras e inducen la identidad en X

- Si el fibrado E es trivial: $\mathscr{G} =$ conjunto de aplicaciones lisas de X a G

- Grupo gauge $\mathscr{G}$ de E: automorfismos

$$g : E \longrightarrow E$$

que respentan la estructura de las fibras e inducen la identidad en X

- Si el fibrado E es trivial: $\mathscr{G} =$ conjunto de aplicaciones lisas de X a G

Acción de $\mathscr{G}$ actúa sobre el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones:

$$\nabla_{g(A)} s = g \nabla_A (g^{-1} s)$$

- Grupo gauge $\mathscr{G}$ de E: automorfismos

$$g : E \longrightarrow E$$

que respentan la estructura de las fibras e inducen la identidad en X

- Si el fibrado E es trivial: $\mathscr{G} =$ conjunto de aplicaciones lisas de X a G

Acción de $\mathscr{G}$ actúa sobre el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones:

$$\nabla_{g(A)} s = g \nabla_A (g^{-1} s)$$

$\Longrightarrow$

$$g \nabla_A g^{-1} = \nabla_A - (\nabla_A g) g^{-1}$$

- Grupo gauge $\mathscr{G}$ de E: automorfismos

$$g : E \longrightarrow E$$

que respentan la estructura de las fibras e inducen la identidad en X

- Si el fibrado E es trivial: $\mathscr{G} =$ conjunto de aplicaciones lisas de X a G

Acción de $\mathscr{G}$ actúa sobre el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones:

$$\nabla_{g(A)} s = g \nabla_A (g^{-1} s)$$

$\Longrightarrow$

$$g \nabla_A g^{-1} = \nabla_A - (\nabla_A g) g^{-1}$$

- Extensión a derivadas exteriores:

$$d_A : \Omega_X^p(E) \longrightarrow \Omega_X^{p+1}(E)$$

- Extensión a derivadas exteriores:

$$d_A : \Omega_X^p(E) \longrightarrow \Omega_X^{p+1}(E)$$

definidas por las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} d_A &= \nabla_A \quad \text{en} \quad \Omega_X^0(E), \\ d_A(\alpha \wedge \varphi) &= (d\alpha) \wedge \varphi + (-1)^p \alpha \wedge d_A \varphi, \quad \alpha \in \Omega_X^p, \varphi \in \Omega_X^q(E) \end{aligned}$$

- Extensión a derivadas exteriores:

$$d_A : \Omega_X^p(E) \longrightarrow \Omega_X^{p+1}(E)$$

definidas por las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} d_A &= \nabla_A \quad \text{en} \quad \Omega_X^0(E), \\ d_A(\alpha \wedge \varphi) &= (d\alpha) \wedge \varphi + (-1)^p \alpha \wedge d_A \varphi, \quad \alpha \in \Omega_X^p, \varphi \in \Omega_X^q(E) \end{aligned}$$

- **Curvatura** de una conexión A:

$$F_A := d_A d_A \in \Omega^2(\mathrm{ad}\, E)$$

- En una trivialización local: Matriz de dos formas

$$F_A = dA + A \wedge A$$

- En una trivialización local: Matriz de dos formas

$$F_A = dA + A \wedge A$$

- Eligiendo coordenadas: $F_A = \sum F_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = [\frac{\partial}{\partial x_\mu} + A_\mu, \frac{\partial}{\partial x_\nu} + A_\nu]$$
$$= \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + [A_\mu, A_\nu]$$

- En una trivialización local: Matriz de dos formas

$$F_A = dA + A \wedge A$$

- Eligiendo coordenadas: $F_A = \sum F_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = [\frac{\partial}{\partial x_\mu} + A_\mu, \frac{\partial}{\partial x_\nu} + A_\nu]$$
$$= \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + [A_\mu, A_\nu]$$

- Bajo una transformación gauge $g \in \mathscr{G}$:

$$F_{g(A)} = gF_A g^{-1}$$

- En una trivialización local: Matriz de dos formas

$$F_A = dA + A \wedge A$$

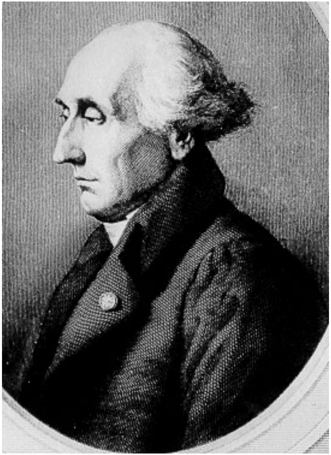
- Eligiendo coordenadas: $F_A = \sum F_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = [\frac{\partial}{\partial x_\mu} + A_\mu, \frac{\partial}{\partial x_\nu} + A_\nu] \\ &= \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + [A_\mu, A_\nu] \end{aligned}$$

- Bajo una transformación gauge $g \in \mathscr{G}$:

$$F_{g(A)} = gF_A g^{-1}$$

- **Identidad de Bianchi:** $d_A F_A = 0$



Joseph-Louis Lagrange (1732–1813)

- **Principio de minima acción** en mecánica clásica

- **Principio de minima acción** en mecánica clásica
- Lagrangiano

$$L = \text{Energía cinética} - \text{Energía potencial}$$

- **Principio de minima acción** en mecánica clásica
- Lagrangiano

$$L = \text{Energía cinética} - \text{Energía potencial}$$

- **Acción** $S(\gamma)$ a lo largo de un camino γ:

$$S(\gamma) = \int_\gamma L dt$$

- **Principio de minima acción** en mecánica clásica
- Lagrangiano

$$L = \text{Energía cinética} - \text{Energía potencial}$$

- **Acción** $S(\gamma)$ a lo largo de un camino γ:

$$S(\gamma) = \int_\gamma L dt$$

- Camino correcto $\Longleftrightarrow$ Mínima acción

- **Principio de minima acción** en mecánica clásica

- Lagrangiano

$$L = \text{Energía cinética} - \text{Energía potencial}$$

- **Acción** $S(\gamma)$ a lo largo de un camino γ:

$$S(\gamma) = \int_\gamma L dt$$

- Camino correcto $\Longleftrightarrow$ Mínima acción
  $\Longleftrightarrow$
  Ecuaciones de Euler–Lagrange

- **Principio de minima acción** en mecánica clásica

- Lagrangiano

$$L = \text{Energía cinética} - \text{Energía potencial}$$

- **Acción** $S(\gamma)$ a lo largo de un camino γ:

$$S(\gamma) = \int_\gamma L dt$$

- Camino correcto $\Longleftrightarrow$ Mínima acción
  $\Longleftrightarrow$
  Ecuaciones de Euler–Lagrange
  $\Longleftrightarrow$ Ecuaciónes de Newton

- **Acción de una conexión:**

$$S(A) = \int_X |F_A|^2 d\,\mathrm{vol}$$

X: variedad equipada de una métrica riemanniana o lorentziana
$d\,\mathrm{vol}$: forma de volumen riemanniana
$|F_A|^2$ se calcula usando la métrica en X y la forma de Killing en $\mathfrak{g}$

- **Acción de una conexión:**

$$S(A) = \int_X |F_A|^2 d\,\mathrm{vol}$$

  X: variedad equipada de una métrica riemanniana o lorentziana
  $d\,\mathrm{vol}$: forma de volumen riemanniana
  $|F_A|^2$ se calcula usando la métrica en X y la forma de Killing en $\mathfrak{g}$

- Dimensión de $X = 4$
  - Operador de Hodge $*$: 2-formas $\longrightarrow$ 2-formas

- **Acción de una conexión:**

$$S(A) = \int_X |F_A|^2 d\,\mathrm{vol}$$

X: variedad equipada de una métrica riemanniana o lorentziana
$d\,\mathrm{vol}$: forma de volumen riemanniana
$|F_A|^2$ se calcula usando la métrica en X y la forma de Killing en $\mathfrak{g}$

- Dimensión de $X = 4$
  - Operador de Hodge $*$: 2-formas $\longrightarrow$ 2-formas
  - Producto interno L^2 de dos formas α y β:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge *\beta$$

- **Acción de una conexión:**

$$S(A) = \int_X |F_A|^2 d\,\mathrm{vol}$$

X: variedad equipada de una métrica riemanniana o lorentziana
$d\,\mathrm{vol}$: forma de volumen riemanniana
$|F_A|^2$ se calcula usando la métrica en X y la forma de Killing en $\mathfrak{g}$

- Dimensión de $X = 4$
- Operador de Hodge $*$: 2-formas $\longrightarrow$ 2-formas
- Producto interno L^2 de dos formas α y β:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge *\beta$$

Ecuación de Yang-Mills

- Ecuación de Euler–Lagrange de $S(A)$:

$$d_A * F_A = 0$$

Ecuación de Yang-Mills

- Ecuación de Euler–Lagrange de $S(A)$:

$$d_A * F_A = 0$$

- Identidad de Bianchi: $d_A F_A = 0$

Ecuación de Yang-Mills

- Ecuación de Euler–Lagrange de $S(A)$:

$$d_A * F_A = 0$$

- Identidad de Bianchi: $d_A F_A = 0$
- En $\mathbb{R}^4$ equipado con la métrica euclidea o lorentziana:

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] = 0$$

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\sigma]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\sigma, \nabla_\mu]] + [\nabla_\sigma, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] = 0$$

- En dimensión 4: Invariancia conforme $g_{\mu\nu} \rightsquigarrow \rho(x) g_{\mu\nu}$

- En dimensión 4: Invariancia conforme $g_{\mu\nu} \rightsquigarrow \rho(x) g_{\mu\nu}$
- Teoría de Maxwell $=$ Teoría de Yang–Mills para el grupo $U(1)$:

- En dimensión 4: Invariancia conforme $g_{\mu\nu} \rightsquigarrow \rho(x) g_{\mu\nu}$
- Teoría de Maxwell = Teoría de Yang–Mills para el grupo $U(1)$:
  - Curvatura:

$$F_A = dA$$

- En dimensión 4: Invariancia conforme $g_{\mu\nu} \rightsquigarrow \rho(x) g_{\mu\nu}$
- Teoría de Maxwell = Teoría de Yang–Mills para el grupo $U(1)$:
  - Curvatura:

$$F_A = dA$$

  - Ecuaciones de Maxwell = Ecuaciones de Yang-Mills

$$dF_A = 0 \quad \text{Identidad de Bianchi} \;\; (d^2 = 0)$$

- En dimensión 4: Invariancia conforme $g_{\mu\nu} \rightsquigarrow \rho(x) g_{\mu\nu}$

- Teoría de Maxwell = Teoría de Yang–Mills para el grupo $U(1)$:
  - Curvatura:

$$F_A = dA$$

  - Ecuaciones de Maxwell = Ecuaciones de Yang-Mills

$$dF_A = 0 \quad \text{Identidad de Bianchi} \;\; (d^2 = 0)$$

$$d * F_A = 0$$

- Ecuación de Yang–Mills se cumple si F_A satisface una de las dos ecuaciones:

$$*F_A = F_A \qquad \text{(autodualidad)}$$
$$*F_A = -F_A \qquad \text{(antiautodualidad)}$$

(Ecuaciones de primer orden no lineales para la conexión A)

- Ecuación de Yang–Mills se cumple si F_A satisface una de las dos ecuaciones:

$$*F_A = F_A \qquad \text{(autodualidad)}$$
$$*F_A = -F_A \qquad \text{(antiautodualidad)}$$

(Ecuaciones de primer orden no lineales para la conexión A)

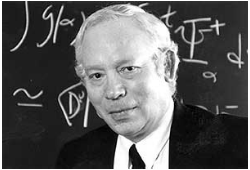
- En $\mathbb{R}^4$ con la métrica euclidea:

$$F_{12} + F_{34} = 0$$
$$F_{14} + F_{23} = 0$$
$$F_{13} + F_{42} = 0$$

A_μ: Matrices de la conexión $(\mu = 1, 2, 3, 4)$

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + [A_\mu, A_\nu]$$

Fin de la Segunda Parte!



Abdus Salam (1926–1996) y Steven Weinberg (1933–)

- Versión cuántica de la teoría de Maxwell (años 1950): Electrodinámica Cuántica — descripción extremadamente ajustada de las fuerzas eléctricas y magnéticas

- Versión cuántica de la teoría de Maxwell (años 1950): Electrodinámica Cuántica — descripción extremadamente ajustada de las fuerzas eléctricas y magnéticas
- ¿Teoría de Yang–Mills: Descripción la interacción débil y la interacción fuerte?

- Versión cuántica de la teoría de Maxwell (años 1950): Electrodinámica Cuántica — descripción extremadamente ajustada de las fuerzas eléctricas y magnéticas

- ¿Teoría de Yang–Mills: Descripción la interacción débil y la interacción fuerte?

- Serio obstáculo:
  - Los campos de Yang–Mills no tienen masa
  - Las interacciones fuerte y débil son interacciones de corto alcance y muchas de las partículas tienen masa

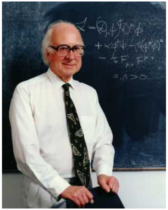
- Versión cuántica de la teoría de Maxwell (años 1950): Electrodinámica Cuántica — descripción extremadamente ajustada de las fuerzas eléctricas y magnéticas

- ¿Teoría de Yang–Mills: Descripción la interacción débil y la interacción fuerte?

- Serio obstáculo:
  - Los campos de Yang–Mills no tienen masa
  - Las interacciones fuerte y débil son interacciones de corto alcance y muchas de las partículas tienen masa

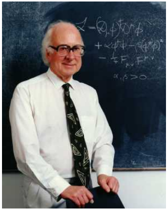
- Años 1960 y años 1970: Se superaron estos obstáculos en la interpretación física de la teoría gauge no abeliana

- Teoría electrodébil de Glashow–Salam–Weinberg: Grupo gauge $SU(2) \times U(1)$: "Campo de Higgs"



Peter Higgs (1929–)

- Teoría electrodébil de Glashow–Salam–Weinberg: Grupo gauge $SU(2) \times U(1)$: "Campo de Higgs"

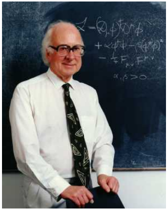


Peter Higgs (1929–)

$\rightsquigarrow$

"Ruptura espontánea de simetría": Reducción de $SU(2) \times U(1)$ a un subgrupo $U(1)$ embebido diagonalmente

- Teoría electrodébil de Glashow–Salam–Weinberg: Grupo gauge $SU(2) \times U(1)$: "Campo de Higgs"



Peter Higgs (1929–)

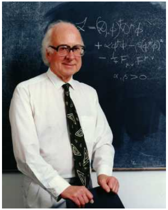
$\rightsquigarrow$

"Ruptura espontánea de simetría": Reducción de $SU(2) \times U(1)$ a un subgrupo $U(1)$ embebido diagonalmente

$\rightsquigarrow$

- Masa a las partículas gauge (W^+, W^-, Z)

- Teoría electrodébil de Glashow–Salam–Weinberg: Grupo gauge $SU(2) \times U(1)$: "Campo de Higgs"



Peter Higgs (1929–)

$\rightsquigarrow$

"Ruptura espontánea de simetría": Reducción de $SU(2) \times U(1)$ a un subgrupo $U(1)$ embebido diagonalmente

$\rightsquigarrow$

- Masa a las partículas gauge (W^+, W^-, Z)
- Campo de largo alcance: sólo el del electromagnetismo

- Solución para la interacción fuerte: Propiedad de la teoría cuántica de Yang–Mills: **Libertad asintótica**

- Solución para la interacción fuerte: Propiedad de la teoría cuántica de Yang–Mills: **Libertad asintótica**
  A cortas distancias el campo tiene un comportamiento cuántico muy similar al comportamiento clásico, sin embargo a distancias largas la teoría clásica no se corresponde con el comportamiento cuántico del campo

- Solución para la interacción fuerte: Propiedad de la teoría cuántica de Yang–Mills: **Libertad asintótica**
  A cortas distancias el campo tiene un comportamiento cuántico muy similar al comportamiento clásico, sin embargo a distancias largas la teoría clásica no se corresponde con el comportamiento cuántico del campo

- Libertad asintótica, junto con otros experimentos y descubrimientos teóricos en los años 1960 y años 1970 $\Longrightarrow$ Describir la interacción fuerte con una teoría gauge con grupo $SU(3)$

- Solución para la interacción fuerte: Propiedad de la teoría cuántica de Yang–Mills: **Libertad asintótica**
  A cortas distancias el campo tiene un comportamiento cuántico muy similar al comportamiento clásico, sin embargo a distancias largas la teoría clásica no se corresponde con el comportamiento cuántico del campo

- Libertad asintótica, junto con otros experimentos y descubrimientos teóricos en los años 1960 y años 1970 $\Longrightarrow$ Describir la interacción fuerte con una teoría gauge con grupo $SU(3)$
- Los campos adicionales describen quarks —objetos con espín $1/2$ que se transforman según la representación fundamental de $SU(3)$: **Cromodinámica Cuántica** (QCD)

- Para que la QCD describa las interacciones fuertes con éxito, a nivel cuántico tiene que tener al menos las siguientes dos propiedades:

- Para que la QCD describa las interacciones fuertes con éxito, a nivel cuántico tiene que tener al menos las siguientes dos propiedades:

  \- **Salto de masa:** Debe existir una constante $\Delta > 0$ tal que toda excitación del vacío tenga energía al menos Δ

- Para que la QCD describa las interacciones fuertes con éxito, a nivel cuántico tiene que tener al menos las siguientes dos propiedades:

  \- **Salto de masa:** Debe existir una constante $\Delta > 0$ tal que toda excitación del vacío tenga energía al menos Δ
  \- **Confinamiento de los quarks:** Los estados de las partículas físicas —como el protón, neutrón y pión— deben ser $SU(3)$-invariantes

- Para que la QCD describa las interacciones fuertes con éxito, a nivel cuántico tiene que tener al menos las siguientes dos propiedades:

  - **Salto de masa:** Debe existir una constante $\Delta > 0$ tal que toda excitación del vacío tenga energía al menos Δ
  - **Confinamiento de los quarks:** Los estados de las partículas físicas —como el protón, neutrón y pión— deben ser $SU(3)$-invariantes

- - Primer punto: Necesario para explicar porqué la interacción fuerte es fuerte pero de rango corto

- Para que la QCD describa las interacciones fuertes con éxito, a nivel cuántico tiene que tener al menos las siguientes dos propiedades:

  - **Salto de masa:** Debe existir una constante $\Delta > 0$ tal que toda excitación del vacío tenga energía al menos Δ
  - **Confinamiento de los quarks:** Los estados de las partículas físicas —como el protón, neutrón y pión— deben ser $SU(3)$-invariantes

- - Primer punto: Necesario para explicar porqué la interacción fuerte es fuerte pero de rango corto
  - Segundo punto: Necesario para explicar porqué no vemos nunca un quark individual

- Estas propiedades pueden verse en cálculos teóricos realizados en varios modelos muy simplificados (como las teorías gauge en retículos).

- Estas propiedades pueden verse en cálculos teóricos realizados en varios modelos muy simplificados (como las teorías gauge en retículos).
- No existe en estos momentos una explicación teórica, y mucho menos matemáticamente completa, que demuestre alguna de estas propiedades

- Estas propiedades pueden verse en cálculos teóricos realizados en varios modelos muy simplificados (como las teorías gauge en retículos).
- No existe en estos momentos una explicación teórica, y mucho menos matemáticamente completa, que demuestre alguna de estas propiedades
- ¿Cómo incorporar la teoría cuántica de campos en la teoría de Yang–Mills de modo matemáticamente riguroso?

- Estas propiedades pueden verse en cálculos teóricos realizados en varios modelos muy simplificados (como las teorías gauge en retículos).

- No existe en estos momentos una explicación teórica, y mucho menos matemáticamente completa, que demuestre alguna de estas propiedades

- ¿Cómo incorporar la teoría cuántica de campos en la teoría de Yang–Mills de modo matemáticamente riguroso?

- Mecánica cuántica es matemáticamente rigurosa pero es incompleta ya que no puede describir procesos de creación y aniquilación de partículas (ejemplo: procesos descritos anteriormente en la interacción entre mesones y nucleones)

- Mecánica cuántica es matemáticamente rigurosa pero es incompleta ya que no puede describir procesos de creación y aniquilación de partículas (ejemplo: procesos descritos anteriormente en la interacción entre mesones y nucleones)

- Esto si que se puede hacer con la teoría cuántica de campos

- Mecánica cuántica es matemáticamente rigurosa pero es incompleta ya que no puede describir procesos de creación y aniquilación de partículas (ejemplo: procesos descritos anteriormente en la interacción entre mesones y nucleones)
- Esto si que se puede hacer con la teoría cuántica de campos
- Aparecen otras dificultades: Al hacer cálculos aparecen cantidades infinitas — existencia de partículas con momento muy grande

- Mecánica cuántica es matemáticamente rigurosa pero es incompleta ya que no puede describir procesos de creación y aniquilación de partículas (ejemplo: procesos descritos anteriormente en la interacción entre mesones y nucleones)

- Esto si que se puede hacer con la teoría cuántica de campos

- Aparecen otras dificultades: Al hacer cálculos aparecen cantidades infinitas — existencia de partículas con momento muy grande

- **Renormalización:** Se aproxima la teoría utilizando retículos, para impedir que los valores del momento sean muy altos
  - En cada proceso de aproximación hay que reajustar los parámetros y tomar límites

- Mecánica cuántica es matemáticamente rigurosa pero es incompleta ya que no puede describir procesos de creación y aniquilación de partículas (ejemplo: procesos descritos anteriormente en la interacción entre mesones y nucleones)

- Esto si que se puede hacer con la teoría cuántica de campos

- Aparecen otras dificultades: Al hacer cálculos aparecen cantidades infinitas — existencia de partículas con momento muy grande

- **Renormalización:** Se aproxima la teoría utilizando retículos, para impedir que los valores del momento sean muy altos
  - En cada proceso de aproximación hay que reajustar los parámetros y tomar límites

William Rowan Hamilton (1805–1865)

- Formulación de Hamilton de la mecánica clásica:

$$\textbf{Hamiltoniano} = \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial}$$

- Formulación de Hamilton de la mecánica clásica:

Hamiltoniano = Energía cinética + Energía potencial

- Leyes de Newton $\Longleftrightarrow$ *ecuaciones canónicas* de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p} H(p, x)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H(p, x)$$

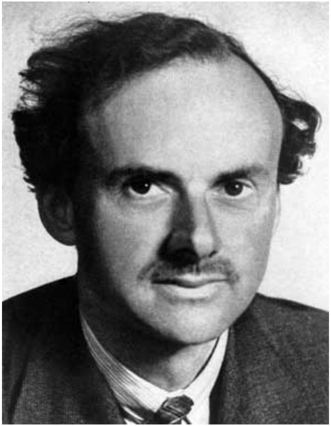
- Formulación de Hamilton de la mecánica clásica:

$$\textbf{Hamiltoniano} = \text{Energía cinética} + \text{Energía potencial}$$

- Leyes de Newton $\Longleftrightarrow$ *ecuaciones canónicas* de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p} H(p, x)$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H(p, x)$$

- Puntos de vista lagrangiano y hamiltoniano son equivalentes



Paul Dirac (1902–1984)

Dirac formuló la mecánica cuántica como una teoría consistente, y demostró que los puntos de vista de Heisenberg y Schrödinger eran equivalentes

Erwin Schrödinger (1887–1961)

Werner Heisenberg (1907–1972)

Mecánica Cuántica

- Estado de un sistema $\longleftrightarrow$ vector de un **espacio de Hilbert**

Mecánica Cuántica

- Estado de un sistema $\longleftrightarrow$ vector de un **espacio de Hilbert** - los vectores ψ y $\lambda\psi$ ($\lambda =$ número complejo) describen el mismo estado

Mecánica Cuántica

- Estado de un sistema $\longleftrightarrow$ vector de un **espacio de Hilbert** - los vectores ψ y $\lambda\psi$ ($\lambda =$ número complejo) describen el mismo estado
- Observable (el momento, por ejemplo) $\longleftrightarrow$ operador que actúa sobre el espacio de Hilbert

Mecánica Cuántica

- Estado de un sistema $\longleftrightarrow$ vector de un **espacio de Hilbert**
  - los vectores ψ y $\lambda\psi$ ($\lambda =$ número complejo) describen el mismo estado

- Observable (el momento, por ejemplo) $\longleftrightarrow$ operador que actúa sobre el espacio de Hilbert
  - Valor del observable en un estado propio $\rightsquigarrow$ valor propio

Mecánica Cuántica

- Estado de un sistema $\longleftrightarrow$ vector de un **espacio de Hilbert**
  - los vectores ψ y $\lambda\psi$ ($\lambda =$ número complejo) describen el mismo estado

- Observable (el momento, por ejemplo) $\longleftrightarrow$ operador que actúa sobre el espacio de Hilbert
  - Valor del observable en un estado propio $\rightsquigarrow$ valor propio - Autovalores reales $\Longleftrightarrow$ Operadores autoadjuntos

Mecánica Cuántica

- **Cuantización canónica** de una teoría clásica: Hamiltoniano $H(p,x)$ clásico $\rightsquigarrow$ Operador
  - usando regla de commutación $[p,x] = -i\hbar$
  - x y p: Operadores correspondientes a la posición y al momento Este procedimiento se conoce como

Mecánica Cuántica

- **Cuantización canónica** de una teoría clásica: Hamiltoniano $H(p, x)$ clásico $\rightsquigarrow$ Operador
  - usando regla de commutación $[p, x] = -i\hbar$
  - x y p: Operadores correspondientes a la posición y al momento Este procedimiento se conoce como

- El hamiltoniano cuántico es un generador de la evolución temporal $\Longleftrightarrow$ **Ecuación de Schrödinger:**

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Método alternativo de cuantización: **Integral de caminos**

Método alternativo de cuantización: **Integral de caminos**

Richard P. Feynman (1918–1988)

Método basado en dos postulados:

Método basado en dos postulados:

- $$P(b,a) = |K(b,a)|^2$$

  \- $P(b,a)$: Probabilidad de que una partícula se mueva de un punto a a otro punto b
  \- $K(b,a)$: Función compleja denominada **amplitud de transición**

Método basado en dos postulados:

- $$P(b,a) = |K(b,a)|^2$$

  - $P(b,a)$: Probabilidad de que una partícula se mueva de un punto a a otro punto b
  - $K(b,a)$: Función compleja denominada **amplitud de transición**

- $$K(b,a) = \sum_{\text{caminos } \gamma} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right)$$

  - $S(\gamma) = \int_\gamma L dt$: acción a lo largo de un camino γ entre a y b

Método basado en dos postulados:

- $$P(b,a) = |K(b,a)|^2$$

  - $P(b,a)$: Probabilidad de que una partícula se mueva de un punto a a otro punto b
  - $K(b,a)$: Función compleja denominada **amplitud de transición**

- $$K(b,a) = \sum_{\text{caminos } \gamma} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right)$$

  - $S(\gamma) = \int_\gamma L dt$: acción a lo largo de un camino γ entre a y b
  - Los caminos forman un conjunto continuo $\rightsquigarrow$ suma es realmente una integral: **Integral de caminos de Feynman**

Método basado en dos postulados:

- $$P(b,a) = |K(b,a)|^2$$

  - $P(b,a)$: Probabilidad de que una partícula se mueva de un punto a a otro punto b
  - $K(b,a)$: Función compleja denominada **amplitud de transición**

- $$K(b,a) = \sum_{\text{caminos } \gamma} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\gamma)\right)$$

  - $S(\gamma) = \int_\gamma L dt$: acción a lo largo de un camino γ entre a y b
  - Los caminos forman un conjunto continuo $\rightsquigarrow$ suma es realmente una integral: **Integral de caminos de Feynman**

- En una teoría clásica de campos (teoría de Yang–Mills) los campos son funciones $\varphi(x,t)$ del espacio-tiempo (vectores, tensores, conexiones, etc.), como — ejemplo: los campos gauge $A_\mu(x,t)$

- En una teoría clásica de campos (teoría de Yang–Mills) los campos son funciones $\varphi(x, t)$ del espacio-tiempo (vectores, tensores, conexiones, etc.), como — ejemplo: los campos gauge $A_\mu(x, t)$

- En teoría cuántica de campos:
  - Los campos $\varphi(x, t)$ se convierten en operadores que dependen del espacio-tiempo

- En una teoría clásica de campos (teoría de Yang–Mills) los campos son funciones $\varphi(x, t)$ del espacio-tiempo (vectores, tensores, conexiones, etc.), como — ejemplo: los campos gauge $A_\mu(x, t)$

- En teoría cuántica de campos:
  - Los campos $\varphi(x, t)$ se convierten en operadores que dependen del espacio-tiempo
  - La posición x y el tiempo t son números que determinan un punto en el espacio-tiempo —no son operadores

- En una teoría clásica de campos (teoría de Yang–Mills) los campos son funciones $\varphi(x, t)$ del espacio-tiempo (vectores, tensores, conexiones, etc.), como — ejemplo: los campos gauge $A_\mu(x, t)$

- En teoría cuántica de campos:
  - Los campos $\varphi(x, t)$ se convierten en operadores que dependen del espacio-tiempo
  - La posición x y el tiempo t son números que determinan un punto en el espacio-tiempo —no son operadores
  - El momento y la energía son operadores H y P

- Campos cuánticos deben satisfacer una serie de axiomas — Gårding y Wightman dan axiomas matemáticos precisos para una teoría cuántica en $\mathbb{R}^4$ con signatura lorentziana:

- Campos cuánticos deben satisfacer una serie de axiomas — Gårding y Wightman dan axiomas matemáticos precisos para una teoría cuántica en $\mathbb{R}^4$ con signatura lorentziana:

- Espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre: espacio de representación del grupo de Poincaré (producto semidirecto del grupo de transformaciones de Lorentz por las translaciones en el espacio-tiempo)

- Campos cuánticos deben satisfacer una serie de axiomas — Gårding y Wightman dan axiomas matemáticos precisos para una teoría cuántica en $\mathbb{R}^4$ con signatura lorentziana:
- Espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre: espacio de representación del grupo de Poincaré (producto semidirecto del grupo de transformaciones de Lorentz por las translaciones en el espacio-tiempo)
- El Hamiltoniano H y el momento P: operadores autoadjuntos correspondientes a los elementos del álgebra de Lie del grupo de Poincaré que generan translaciones en el tiempo y en el espacio, respectivamente

- Energía positiva $\Longleftrightarrow H \geq 0$

- Energía positiva $\Longleftrightarrow H \geq 0$

- **Vector del vacío**: elemento de $\mathcal{H}$ invariante bajo la representación del grupo de Poincaré — único salvo multiplicación por una fase

- Energía positiva $\Longleftrightarrow H \geq 0$

- **Vector del vacío**: elemento de $\mathcal{H}$ invariante bajo la representación del grupo de Poincaré — único salvo multiplicación por una fase

- Transformaciones gauge se representan linealmente en $\mathcal{H}$ y se transforman covariantemente bajo la acción del grupo de Poincaré

- Energía positiva $\iff H \geq 0$

- **Vector del vacío**: elemento de $\mathcal{H}$ invariante bajo la representación del grupo de Poincaré — único salvo multiplicación por una fase

- Transformaciones gauge se representan linealmente en $\mathcal{H}$ y se transforman covariantemente bajo la acción del grupo de Poincaré

- Campos cuánticos en regiones del espacio-tiempo no conectadas por una señal luminosa deben ser independientes $\iff$ operadores correspondientes conmutan (o anticonmutan para campos fermiónicos)

Arthur Wightman (1922–)

Gran logro de la teoría cuántica de campos axiomática (Wightman): **Rotación de Wick**

Teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo euclídeo invariante bajo el grupo euclídeo

$\leftrightsquigarrow$

Teoría cuántica de campos invariante bajo el grupo de Lorentz en el espacio-tiempo de Minkowski

Existencia de una teoría gauge cuántica con grupo de Lie G:

- Teoría cuántica de campos satisfaciendo axiomas descritos
- Campos cuánticos $\longleftrightarrow$ polinomios locales en la curvatura F y sus derivadas covariantes invariantes gauge
  Ejemplo: $\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau}(x)$

Existencia de una teoría gauge cuántica con grupo de Lie G:

- Teoría cuántica de campos satisfaciendo axiomas descritos
- Campos cuánticos $\longleftrightarrow$ polinomios locales en la curvatura F y sus derivadas covariantes invariantes gauge
  Ejemplo: $\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau}(x)$
- Funciones de correlación de los campos cuánticos deben coincidir a distancias cortas con las predicciones de la libertad asintótica y la teoría de renormalización perturbativa

Existencia de una teoría gauge cuántica con grupo de Lie G:

- Teoría cuántica de campos satisfaciendo axiomas descritos
- Campos cuánticos $\longleftrightarrow$ polinomios locales en la curvatura F y sus derivadas covariantes invariantes gauge
  Ejemplo: $\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau}(x)$
- Funciones de correlación de los campos cuánticos deben coincidir a distancias cortas con las predicciones de la libertad asintótica y la teoría de renormalización perturbativa
- Invariancia del vector del vacío Ω por el grupo de Poincaré $\Longleftrightarrow$ Ω vector propio con energía nula $\Longleftrightarrow$ $H\Omega = 0$

- **Axioma de energía positiva:** En cualquier teoría cuántica de campos, el espectro de H está contenido en el intervalo $[0, \infty)$

- **Axioma de energía positiva:** En cualquier teoría cuántica de campos, el espectro de H está contenido en el intervalo $[0, \infty)$
- Una teoría cuántica tiene un **salto de masa** Δ si H no tiene valores propios en el intervalo $(0, \Delta)$ para algún $\Delta > 0$. El supremo de un tal Δ es la masa m, y se requiere que $m < \infty$

- **Axioma de energía positiva:** En cualquier teoría cuántica de campos, el espectro de H está contenido en el intervalo $[0, \infty)$
- Una teoría cuántica tiene un **salto de masa** Δ si H no tiene valores propios en el intervalo $(0, \Delta)$ para algún $\Delta > 0$. El supremo de un tal Δ es la masa m, y se requiere que $m < \infty$

Existencia de Yang–Mills y del salto de masa

Probar que para todo grupo de Lie compacto simple G, la teoría cuántica de Yang–Mills en $\mathbb{R}^4$ existe y tiene un salto de masa $\Delta > 0$. La existencia incluye el establecer propiedades axiomáticas al menos tan fuertes como las citadas en [5,7]

- Procedimiento más apropiado para cuantizar la teoría de Yang–Mills clásica: método de la integral de caminos de Feynman

- Procedimiento más apropiado para cuantizar la teoría de Yang–Mills clásica: método de la integral de caminos de Feynman

- Acción de Yang–Mills con grupo de estructura $G = U(n)$ o $G = SU(n)$:

$$S(A) = \frac{1}{4g^2} \int_X \mathrm{Tr}(F_A \wedge *F_A)$$

- Aquí consideramos un factor que involucra la constante de acoplamiento g

- Procedimiento más apropiado para cuantizar la teoría de Yang–Mills clásica: método de la integral de caminos de Feynman

- Acción de Yang–Mills con grupo de estructura $G = U(n)$ o $G = SU(n)$:

$$S(A) = \frac{1}{4g^2} \int_X \mathrm{Tr}(F_A \wedge *F_A)$$

- Aquí consideramos un factor que involucra la constante de acoplamiento g
- Grupo simple G arbitrario se usa la forma de Killing en el álgebra de Lie de G

- Integral de caminos de Feynman sobre el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones — **Función de partición**:

$$Z = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{G})} \int_{\mathscr{A}} DA \exp(-S(A))$$

- Integral de caminos de Feynman sobre el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones — **Función de partición**:

$$Z = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{G})} \int_{\mathscr{A}} DA \exp(-S(A))$$

- $\mathscr{A}$ es un espacio afín: Formalmente tiene una medida DA invariante por traslaciones (única salvo factor constante)

- Integral de caminos de Feynman sobre el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones — **Función de partición**:

$$Z = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{G})} \int_{\mathscr{A}} DA \exp(-S(A))$$

- $\mathscr{A}$ es un espacio afín: Formalmente tiene una medida DA invariante por traslaciones (única salvo factor constante)
- La integral de Feynman para teorías gauge se formula normalmente sobre el espacio $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ ($\mathscr{G}$: grupo de transformaciones gauge). En lugar de hacer esto, aquí hemos dividido por el volumen de $\mathscr{G}$

- Integral de caminos de Feynman sobre el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones — **Función de partición**:

$$Z = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{G})} \int_{\mathscr{A}} DA \exp(-S(A))$$

- $\mathscr{A}$ es un espacio afín: Formalmente tiene una medida DA invariante por traslaciones (única salvo factor constante)
- La integral de Feynman para teorías gauge se formula normalmente sobre el espacio $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ ($\mathscr{G}$: grupo de transformaciones gauge). En lugar de hacer esto, aquí hemos dividido por el volumen de $\mathscr{G}$

- Nombre de "función de partición" viene de la física estadística (donde la integral es las suma las amplitudes de probabilidad de todos los estados microscópicos del sistema)

- Elegimos puntos $x_i \in X$ y "operadores locales" $\mathcal{O}_i(x_i)$ que sean polinomios en la curvatura y sus derivadas covariantes, invariantes por transformaciones gauge, en los puntos x_i

- Elegimos puntos $x_i \in X$ y "operadores locales" $\mathcal{O}_i(x_i)$ que sean polinomios en la curvatura y sus derivadas covariantes, invariantes por transformaciones gauge, en los puntos x_i
- Definimos:

$$Z_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{G})} \int_{\mathscr{A}} DA \exp(-S(A)) \prod_i \mathcal{O}_i(x_i)$$

- Elegimos puntos $x_i \in X$ y “operadores locales” $\mathcal{O}_i(x_i)$ que sean polinomios en la curvatura y sus derivadas covariantes, invariantes por transformaciones gauge, en los puntos x_i

- Definimos:

$$Z_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathscr{G})} \int_{\mathscr{A}} DA \exp(-S(A)) \prod_i \mathcal{O}_i(x_i)$$

- **Valores esperados** o **funciones de correlación**:

$$\langle \prod_i \mathcal{O}_i(x_i) \rangle = Z_{\mathcal{O}}/Z$$

- Demostrar la existencia de la teoría de Yangs–Mills cuántica

$\Longleftrightarrow$

- Dar sentido riguroso a la función de partición y a las funciones de correlación

- Demostrar la existencia de la teoría de Yangs–Mills cuántica

  $\Longleftrightarrow$

  - Dar sentido riguroso a la función de partición y a las funciones de correlación
  - Mostrar que se satisfacen los axiomas anteriormente mencionados

- Demostrar la existencia de la teoría de Yangs–Mills cuántica

  $\Longleftrightarrow$

  - Dar sentido riguroso a la función de partición y a las funciones de correlación
  - Mostrar que se satisfacen los axiomas anteriormente mencionados

- Una manera de abordar el problema (utilizada en simulaciones numéricas) y dar sentido a la integral de caminos: Aproximar el espacio $\mathscr{A}$ de conexiones por un espacio de dimensión k y luego tomar el límite $k \to \infty$

Teoría cuántica de Yang–Mills en retículos

- Grafo Γ:
  - Vértices
  - Lados
  - "Plaquetas" (lazo $=$ camino cerrado) en Γ

Teoría cuántica de Yang–Mills en retículos

- Grafo Γ:
  - Vértices
  - Lados
  - "Plaquetas" (lazo $=$ camino cerrado) en Γ
- Ejemplo:
  - Vértices: los puntos enteros $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$

Teoría cuántica de Yang–Mills en retículos

- Grafo Γ:
  - Vértices
  - Lados
  - "Plaquetas" (lazo = camino cerrado) en Γ
- Ejemplo:
  - Vértices: los puntos enteros $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$
  - Lados: líneas rectas que unen dos puntos con distancia unidad

Teoría cuántica de Yang–Mills en retículos

- Grafo Γ:
  - Vértices
  - Lados
  - "Plaquetas" (lazo $=$ camino cerrado) en Γ
- Ejemplo:
  - Vértices: los puntos enteros $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$
  - Lados: líneas rectas que unen dos puntos con distancia unidad
  - Plaquetas: Lazos de longitud cuatro

Teoría cuántica de Yang–Mills en retículos

- Grafo Γ:
  - Vértices
  - Lados
  - "Plaquetas" (lazo = camino cerrado) en Γ
- Ejemplo:
  - Vértices: los puntos enteros $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$
  - Lados: líneas rectas que unen dos puntos con distancia unidad
  - Plaquetas: Lazos de longitud cuatro
- - G-Conexión sobre Γ: Aplicación de los lados a G

Teoría cuántica de Yang–Mills en retículos

- Grafo Γ:
  - Vértices
  - Lados
  - "Plaquetas" (lazo $=$ camino cerrado) en Γ
- Ejemplo:
  - Vértices: los puntos enteros $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$
  - Lados: líneas rectas que unen dos puntos con distancia unidad
  - Plaquetas: Lazos de longitud cuatro
- - *G*-Conexión sobre Γ: Aplicación de los lados a G
  - Curvatura de la conexión en una plaqueta concreta: menos la traza de la holonomía alrededor del lazo menos la matriz identidad

- Acción de Yang–Mills: Suma del cuadrado de las curvaturas

- Acción de Yang–Mills: Suma del cuadrado de las curvaturas

- Integral de caminos de Feynman:

$$Z[\gamma, g^2, G] = \int \prod \exp(-S) dU_i$$

- γ: subgrafo de Γ
- Integral sobre todas las holonomías en γ —- aplicaciones de los lados en G
- Medida: Producto de la medida de Haar para la holonomía
- S: acción de Yang–Mills

- Acción de Yang–Mills: Suma del cuadrado de las curvaturas

- Integral de caminos de Feynman:

$$Z[\gamma, g^2, G] = \int \prod \exp(-S) dU_i$$

  - γ: subgrafo de Γ
  - Integral sobre todas las holonomías en γ —- aplicaciones de los lados en G
  - Medida: Producto de la medida de Haar para la holonomía
  - S: acción de Yang–Mills

- Otras cantidades físicas de interés son valores esperados obtenidos utilizando esta medida.

- Exsistencia de teoría cuántica de Yang–Mills $\Longleftrightarrow$ Existencia del límite de $Z[\gamma, g^2, G]$ sobre subbgrafos γ de Γ cada vez más grandes para definir la integral de Feynman en Γ

- Exsistencia de teoría cuántica de Yang–Mills $\Longleftrightarrow$ Existencia del límite de $Z[\gamma, g^2, G]$ sobre subbgrafos γ de Γ cada vez más grandes para definir la integral de Feynman en Γ

- Tomar este límite involucrará claramente el método de renormalización

- Exsistencia de teoría cuántica de Yang–Mills $\Longleftrightarrow$ Existencia del límite de $Z[\gamma, g^2, G]$ sobre subbgrafos γ de Γ cada vez más grandes para definir la integral de Feynman en Γ

- Tomar este límite involucrará claramente el método de renormalización

- Kenneth Wilson: Motivación original para estudiar el denominado *grupo de renormalización*

- Se sabe bastante de las propiedades esparadas de este límite utilizando una gran variedad de argumentos físicos: libertad asintótica, etc.

- Se sabe bastante de las propiedades esparadas de este límite utilizando una gran variedad de argumentos físicos: libertad asintótica, etc.

- En el limite $g^2 \to 0$ y γ grande:
  - Elección específica de Γ que aproxima a $\mathbb{R}^4$ no es importante

- Se sabe bastante de las propiedades esparadas de este límite utilizando una gran variedad de argumentos físicos: libertad asintótica, etc.

- En el limite $g^2 \to 0$ y γ grande:
  - Elección específica de Γ que aproxima a $\mathbb{R}^4$ no es importante
  - Valores esperados convergerán a las funciones de correlación en la teoría cuántica de campos continua

- Se sabe bastante de las propiedades esparadas de este límite utilizando una gran variedad de argumentos físicos: libertad asintótica, etc.

- En el limite $g^2 \to 0$ y γ grande:
  - Elección específica de Γ que aproxima a $\mathbb{R}^4$ no es importante
  - Valores esperados convergerán a las funciones de correlación en la teoría cuántica de campos continua
  - Invarianza por el grupo de Poincaré

- Se sabe bastante de las propiedades esparadas de este límite utilizando una gran variedad de argumentos físicos: libertad asintótica, etc.

- En el limite $g^2 \to 0$ y γ grande:
  - Elección específica de Γ que aproxima a $\mathbb{R}^4$ no es importante
  - Valores esperados convergerán a las funciones de correlación en la teoría cuántica de campos continua
  - Invarianza por el grupo de Poincaré
  - Axiomas formalizados por Osterwalder–Schrader

- Existencia de la teoría $\longleftrightarrow$ Establecer estos axiomas

- Existencia de la teoría $\longleftrightarrow$ Establecer estos axiomas
- Salto de masa $\leftrightsquigarrow$ decaimiento de las funciones de correlación con la distancia

- Existencia de la teoría $\longleftrightarrow$ Establecer estos axiomas

- Salto de masa $\leftsquigarrow\!\!\rightsquigarrow$ decaimiento de las funciones de correlación con la distancia

- **Otras formas de abrodar el problema:**

- Existencia de la teoría $\longleftrightarrow$ Establecer estos axiomas

- Salto de masa $\leftrightsquigarrow$ decaimiento de las funciones de correlación con la distancia

- **Otras formas de abrodar el problema:**

  - Teorías gauge en retículos no esencial — existen otros modos de aproximar la integral funcional de Feynman

- Existencia de la teoría $\longleftrightarrow$ Establecer estos axiomas

- Salto de masa $\leftrightsquigarrow$ decaimiento de las funciones de correlación con la distancia

- **Otras formas de abrodar el problema:**

  - Teorías gauge en retículos no esencial — existen otros modos de aproximar la integral funcional de Feynman
  - Lo importante es poder definir el límite a la teoría continua de campos

- Existencia de la teoría $\longleftrightarrow$ Establecer estos axiomas
- Salto de masa $\leftrightsquigarrow$ decaimiento de las funciones de correlación con la distancia
- **Otras formas de abordar el problema:**

  \- Teorías gauge en retículos no esencial — existen otros modos de aproximar la integral funcional de Feynman
  \- Lo importante es poder definir el límite a la teoría continua de campos
  \- También en principio posible abordar el problema sin tomar límites

- Hay dos clases de teorías cuánticas muy similares a la teoría de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Hay dos clases de teorías cuánticas muy similares a la teoría de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Modelo sigma no lineal en dimensión dos

- Hay dos clases de teorías cuánticas muy similares a la teoría de Yang–Mills en dimensión cuatro:
- Modelo sigma no lineal en dimensión dos
- Teorías supersimétricas de Yang–Mills en dimensión cuatro

- Hay dos clases de teorías cuánticas muy similares a la teoría de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Modelo sigma no lineal en dimensión dos

- Teorías supersimétricas de Yang–Mills en dimensión cuatro

Modelo sigma no lineal en dimensión dos:

- Campos: aplicaciones de un espacio-tiempo de dimensión dos en un espacio simétrico riemanniano con curvatura positiva

Modelo sigma no lineal en dimensión dos:

- Campos: aplicaciones de un espacio-tiempo de dimensión dos en un espacio simétrico riemanniano con curvatura positiva
- No hay una construcción matemática rigurosa

Modelo sigma no lineal en dimensión dos:

- Campos: aplicaciones de un espacio-tiempo de dimensión dos en un espacio simétrico riemanniano con curvatura positiva
- No hay una construcción matemática rigurosa
- Existe salto de masa en una cierta versión del modelo sigma para el grupo $O(n)$

Teorías supersimétricas de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Modificaciones de la teoría de Yang–Mills

Teorías supersimétricas de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Modificaciones de la teoría de Yang–Mills
- Además de conexiones involucran otros campos, en particular campos **fermiónicos** (las conexiones son campos **bosónicos**)

Teorías supersimétricas de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Modificaciones de la teoría de Yang–Mills
- Además de conexiones involucran otros campos, en particular campos **fermiónicos** (las conexiones son campos **bosónicos**)
- La supersimetría intercambia bosones y fermiones

Teorías supersimétricas de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Modificaciones de la teoría de Yang–Mills
- Además de conexiones involucran otros campos, en particular campos **fermiónicos** (las conexiones son campos **bosónicos**)
- La supersimetría intercambia bosones y fermiones
- Existencia de aíz cuadrada del operador Hamiltoniano: "supercarga".

Teorías supersimétricas de Yang–Mills en dimensión cuatro:

- Modificaciones de la teoría de Yang–Mills
- Además de conexiones involucran otros campos, en particular campos **fermiónicos** (las conexiones son campos **bosónicos**)
- La supersimetría intercambia bosones y fermiones
- Existencia de aíz cuadrada del operador Hamiltoniano: "supercarga".
- Renormalización es más abordable

Progresos importantes:

- Teoría de Seiberg–Witten de 1994: salto de masa $\rightsquigarrow$ Simplicidad de los invariantes de Seiberg–Witten comparados con los invariantes de Donaldson

Progresos importantes:

- Teoría de Seiberg–Witten de 1994: salto de masa $\rightsquigarrow$ Simplicidad de los invariantes de Seiberg–Witten comparados con los invariantes de Donaldson
- Teoría supersimétrica de Yang–Mills con $N = 4$

Progresos importantes:

- Teoría de Seiberg–Witten de 1994: salto de masa $\rightsquigarrow$ Simplicidad de los invariantes de Seiberg–Witten comparados con los invariantes de Donaldson

- Teoría supersimétrica de Yang–Mills con $N = 4$
  - N hace referencia al número de cargas supersimétricas

Progresos importantes:

- Teoría de Seiberg–Witten de 1994: salto de masa $\rightsquigarrow$ Simplicidad de los invariantes de Seiberg–Witten comparados con los invariantes de Donaldson

- Teoría supersimétrica de Yang–Mills con $N = 4$
  - N hace referencia al número de cargas supersimétricas
  - La teoría de Seiberg–Witten tiene $N = 2$)
  - El punto de partida de esta teoría es la "correspondencia AdS/CFT" de Maldacena:
  Teoría supersimétrica de Yang–Mills con $N = 4$
  $\longleftrightarrow$
  Teoría de cuerdas en el espacio de anti de Sitter (AdS)
  - Para $SU(n)$, cuando n se hace muy grande esta teoría es resoluble, como el modelo sigma mencionado anteriormente

En cualquier caso, parece claro que el problema de Yang–Mills propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas resulta muy duro por ahora y parece aconsejable abordar por el momento problemas más fáciles (para irse entrenando) que minimicen en lo posible las dificultades técnicas y optimicen el interés geométrico

En cualquier caso, parece claro que el problema de Yang–Mills propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas resulta muy duro por ahora y parece aconsejable abordar por el momento problemas más fáciles (para irse entrenando) que minimicen en lo posible las dificultades técnicas y optimicen el interés geométrico

- Dimensión 2: Atiyah–Bott,...

En cualquier caso, parece claro que el problema de Yang–Mills propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas resulta muy duro por ahora y parece aconsejable abordar por el momento problemas más fáciles (para irse entrenando) que minimicen en lo posible las dificultades técnicas y optimicen el interés geométrico

- Dimensión 2: Atiyah–Bott,...
- Dimensión 3: Chern–Simons,... (Salto de masa: Balaban)

En cualquier caso, parece claro que el problema de Yang–Mills propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas resulta muy duro por ahora y parece aconsejable abordar por el momento problemas más fáciles (para irse entrenando) que minimicen en lo posible las dificultades técnicas y optimicen el interés geométrico

- Dimensión 2: Atiyah–Bott,...
- Dimensión 3: Chern–Simons,... (Salto de masa: Balaban)

Y para quien intente resolver el problema...

En cualquier caso, parece claro que el problema de Yang–Mills propuesto por el Instituto Clay de Matemáticas resulta muy duro por ahora y parece aconsejable abordar por el momento problemas más fáciles (para irse entrenando) que minimicen en lo posible las dificultades técnicas y optimicen el interés geométrico

- Dimensión 2: Atiyah–Bott,...
- Dimensión 3: Chern–Simons,... (Salto de masa: Balaban)

Y para quien intente resolver el problema...

Buena suerte!