Éléments de géométrie

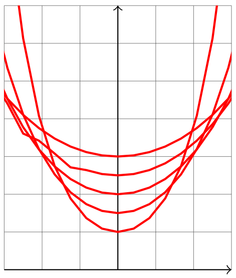
Arnaud Bodin, avril 2012

La chaînette

La *chaînette* est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités. Sans plus tarder voici l'équation d'une chaînette :

$$y(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Ici "ch" désigne le cosinus hyperbolique défini à partir de la fonction exponentielle : $y(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, nous y reviendrons.
Le paramètre a dépend de la chaînette : on peut écarter plus ou moins les mains. Et même si l'on garde les mains fixes, on peut prendre des cordes de différentes longueurs.
C'est donc une courbe que vous voyez tous les jours : la chaîne qui pend à votre cou ou le fil électrique entre deux pylônes. Mais on le retrouve dans des endroits plus surprenant : si vous souhaitez faire une arche qui s'appuie sur deux piles alors la forme la plus stable est une chaînette renversée. Gaudi a beaucoup utilisé cette forme dans les bâtiments qu'il a construit.
Sur un bateau, si une voile rectangulaire est maintenue par deux mats horizontaux et que le vent souffle perpendiculairement alors le profil de la voile est une chaînette. [[[dessin]]]
Pour finir vous pouvez voir des chaînettes avec des bulles de savon : trempez deux cercles métalliques parallèles dans de l'eau savonneuse. Il en sort une surface de révolution dont le profil est une chaînette.
Stop ! Place aux maths : nous allons expliquer comment calculer l'équation d'une chaînette.

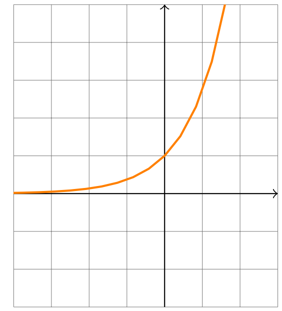


1 Le cosinus hyperbolique

1.1 Définition

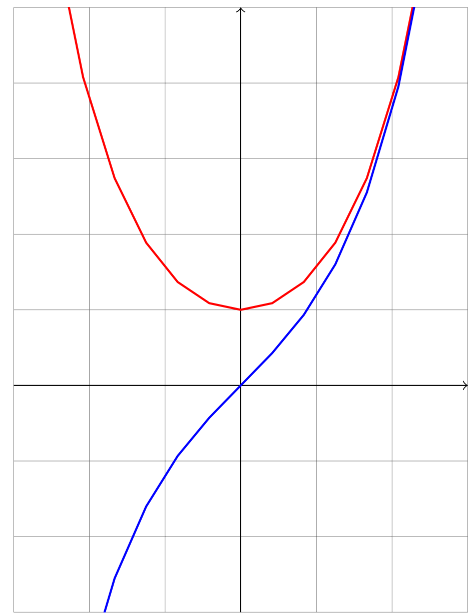
Le ***cosinus hyperbolique*** et le ***sinus hyperbolique*** sont la partie paire et impaire de l'exponentielle.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



Voici quelque propriétés dont nous aurons besoin :

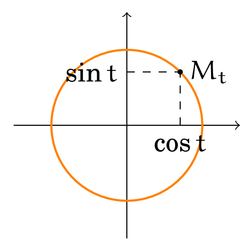
Proposition 1. – $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
– $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh}' x$ et $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch}' x$.



Remarque : le nom cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ne sont pas un hasard : souvenez-vous des formules d'Euler pour le cosinus et sinus classique (dits aussi "circulaire") :

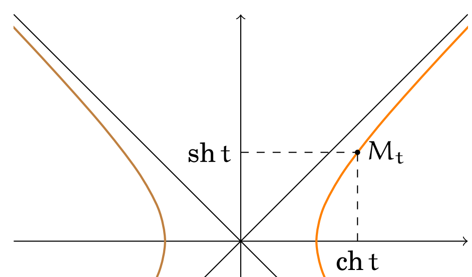
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

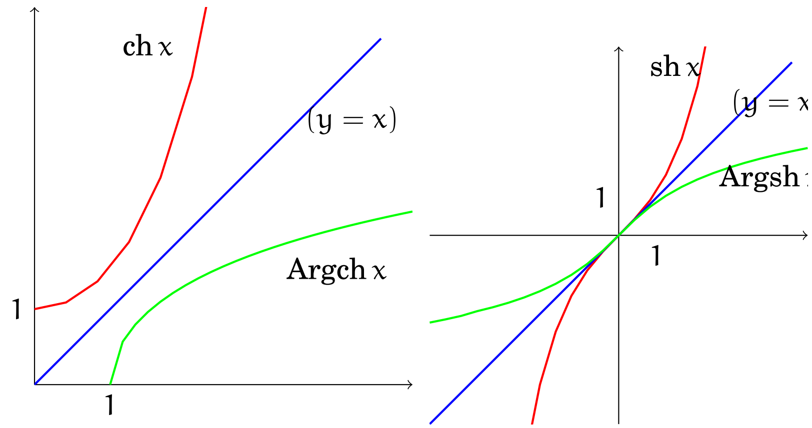
L'analogie avec la définition de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ justifie les termes "cosinus" et "sinus". Reste à justifier le terme "hyperbolique". Si nous dessinons une courbe paramétrées par $(x(t) = \cos t, y(t) = \sin t)$ alors $x(t)^2 + y(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Donc nous avons affaire à un cercle (d'où le terme "circulaire"). Par contre si on dessine une courbe paramétrée par $(x(t) = \operatorname{ch} t, y(t) = \operatorname{sh}(t))$. Alors $x(t)^2 - y(t)^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. C'est l'équation d'une branche d'hyperbole !



1.2 Fonctions réciproques

Proposition 2. – La fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est notée $\operatorname{Argch} x$.
– La fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\operatorname{Argsh} x$.





Pour résoudre une équation différentielle nous aurons besoin de la dérivée de $\operatorname{Argsh} x$.

Proposition 3. Les fonctions $x \mapsto \operatorname{Argch} x$ et $x \mapsto \operatorname{Argsh} x$ sont dérivables et

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.3 Expression logarithmique

En fait les fonctions hyperboliques inverses peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles :

Proposition 4.

$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad \text{pour } x > 1.$$

$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

1.4 Les preuves

À faire...

2 Dérivée des physiciens, dérivée des mathématiciens

Deux notations pour la dérivée s'affrontent : celle du mathématicien $f'(x)$ et celle du physicien $\frac{df}{dx}$. Comparons-les. La dérivée de f en x est par définition la limite (si elle existe) du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x},$$

lorsque h tend vers 0. Notons $h = dx$ et $df = f(x+h) - f(x) = f(x+dx) - f(x)$ alors le taux d'accroissement vaut $\frac{df}{dx}$ et comme dx est un nombre aussi petit que l'on veut (il est infinitésimal) on identifie ce quotient $\frac{df}{dx}$ avec la limite lorsque $dx \to 0$.
L'avantage de la notation des physiciens est que cela peut correspondre à un raisonnement physique. On peut raisonner sur des petits morceaux (de longueur dx petite mais pas nulle) et en déduire une relation avec des dérivées. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe 3.3.
Autre avantage de cette notation, il est facile de retenir la formule :

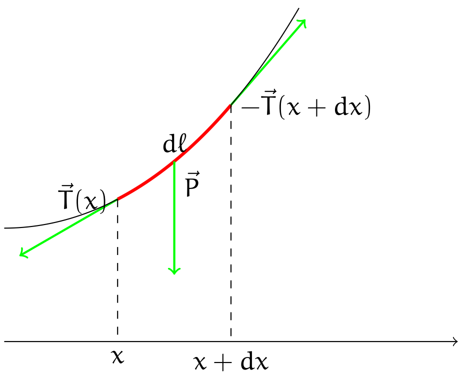
$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} \times \frac{df}{dy}.$$

Il s'agit juste de «simplifier» le numérateur avec le dénominateur.
Cette opération est justifiée car il s'agit de la dérivée de la composée $f\big(y(x)\big)$ qui est bien

$$\Big(f\big(y(x)\big)\Big)' = y'(x) \times f'\big(y(x)\big).$$

3 Équation de la chaînette

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct, $\vec{\jmath}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (c'est-à-dire opposé au champ de pesanteur).



3.1 Découpage infinitésimal de la chaînette

Nous découpons la chaînette en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x+dx$. Ici dx désigne donc un réel aussi petit que l'on veut. Nous noterons $d\ell$ la longueur de ce petit morceau.
Trois forces s'appliquent à notre mini-bout de chaînette :

– **Le poids $\vec{P}$.** C'est une force verticale, proportionnelle à la masse du morceau. Si μ est la masse linéique (c'est-à-dire la masse que ferait un mètre de chaîne, exprimée en kg/m), la masse de notre petit bout est $\mu \cdot d\ell$. Si g dénote la constante de gravitation alors le poids est $\vec{P} = -P\vec{\jmath} = -\mu \cdot d\ell \cdot g \cdot \vec{\jmath}$.
– **La tension à gauche $\vec{T}(x)$.** La tension à gauche, s'applique au point dont l'abscisse est x. Par un principe physique, les forces de tension de notre morceau à l'équilibre sont des forces tangente à la chaînette.
– **La tension à droite $-\vec{T}(x+dx)$.** La tension à droite s'applique au point d'abscisse $x+dx$. Comme notre morceau est en équilibre elle s'oppose à la tension à gauche du morceau

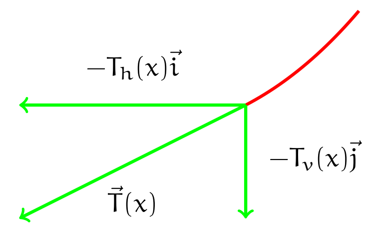
suivant compris entre $x + dx$ et $x + 2dx$. La tension à droite de notre morceau est donc l'opposée de la tension à gauche du morceau suivant, cette force est donc $-\vec{T}(x + dx)$.

Une remarque : pour cette modélisation nous supposons que dx est le même pour tous les morceaux de chaîne. Par contre x varie, mais aussi la longueur du morceaux de chaîne entre les abscisses x et $x + dx$ devrait être plutôt notée $d\ell(x)$ au lieu de $d\ell$. Le poids d'un morceaux de chaîne dépend donc aussi de x et devrait plutôt être noté $P(x)$.

3.2 Principe fondamental de la mécanique

Le principe fondamental de la mécanique nous dit que, à l'équilibre, la somme des forces est nulle, donc :

$$\vec{P} + \vec{T}(x) - \vec{T}(x + dx) = \vec{0}. \tag{1}$$



Décomposons chaque force de tension en un tension horizontale et une tension verticale :

$$\vec{T}(x) = -T_h(x)\vec{i} - T_v(x)\vec{j}.$$

La convention pour le choix des signes permet d'avoir des valeurs $T_h(x)$ et $T_v(x)$ positives. Alors le principe fondamental de la mécanique devient :

$$-P\vec{j} - T_h(x)\vec{i} - T_v(x)\vec{j} - \Big(-T_h(x + dx)\vec{i} - T_v(x + dx)\Big)\vec{j}.$$

Comme $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base nous reformulons le principe fondamental de la mécanique en deux équations :

$$\begin{cases} T_h(x + dx) - T_h(x) & = 0 \\ T_v(x + dx) - T_v(x) - P & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

3.3 Tension horizontale

La première équation du système (2) nous permet de montrer que la tension horizontale est constante.

Lemme 1. La tension horizontale est indépendante de x :

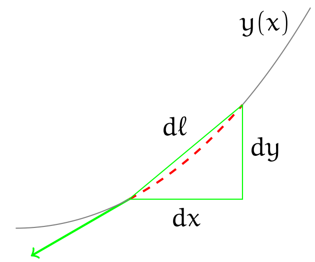
$$T_h(x) = T_h.$$

Démonstration. En effet fixons x, nous savons $T_h(x+dx) - T_h(x) = 0$, donc le rapport

$$\frac{T_h(x+dx) - T_h(x)}{x+dx-x} = 0$$

Ceci est vrai quelque soit l'élément infinitésimal dx. Ce taux d'accroissement étant toujours nul, la limite lorsque dx tend vers 0 est nulle. Mais la limite est -par définition- la dérivée $T_h'(x)$. Bilan : $T_h'(x) = 0$. La fonction $T_h(x)$ est donc une fonction constante comme nous l'avions annoncé. □

3.4 Tension verticale et poids



Nous noterons $y(x)$ l'équation de la chaînette. Nous considérons que chaque morceau infinitésimal de la chaîne est rectiligne, nous pouvons alors appliquer le théorème de Pythagore :

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2.$$

Cela conduit à :

$$\left(\frac{d\ell}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

D'où

$$\frac{d\ell}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Nous allons maintenant nous concentrer sur la deuxième équation du principe fondamental (2), le poids étant $P = \mu g d\ell$:

$$T_v(x+dx) - T_v(x) = \mu g d\ell.$$

Cela donne en divisant par dx :

$$\frac{T_v(x+dx) - T_v(x)}{dx} = \mu g \frac{d\ell}{dx} = \mu g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

En terme de dérivée $\frac{dy}{dx}$ vaut à la limite $y'(x)$ et $\frac{T_v(x+dx)-T_v(x)}{dx}$ vaut à la limite $T_v'(x)$.
Nous avons donc montré :

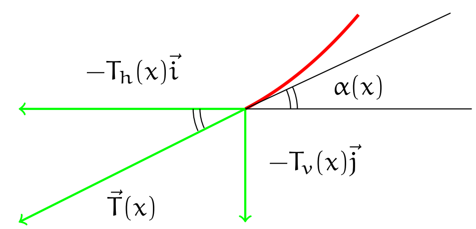
$$T_v'(x) = \mu g \sqrt{1 + y'(x)^2}. \tag{3}$$

3.5 Calcul de l'équation

Théorème 1. Une équation de la chaînette est

$$y(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right),$$

où a est une constante qui vaut $a = \frac{T_h}{\mu g}$.



Démonstration. Tout d'abord nous lions la tension horizontale T_h et la tension verticale T_v en fonction de l'angle que forme la chaînette avec l'horizontale. T dénote la norme de $\vec{T}$. En considérant que le la portion infinitésimale forme un triangle nous obtenons :

$$T_h(x) = T(x)\cos\alpha(x), \quad T_v(x) = T(x)\sin\alpha(x).$$

Ce qui conduit à $T_v(x) = T_h(x)\tan\alpha(x)$.
Maintenant, dans le triangle infinitésimal, nous avons aussi que $\tan\alpha(x) = \frac{dy}{dx} = y'(x)$. Ce qui nous mène à la relation :

$$T_v(x) = T_h(x) \cdot y'(x).$$

Nous savons que la tension horizontale est constante (lemme 1), donc en dérivant cette égalité nous avons

$$T_v'(x) = T_h \cdot y''(x).$$

Avec l'équation (3) nous écrivons

$$\mu g\sqrt{1 + y'(x)^2} = T_h \cdot y''(x).$$

C'est une équation différentielle du second d'ordre :

$$y''(x) = \frac{\mu g}{T_h}\sqrt{1 + y'(x)^2}. \tag{4}$$

Soit a la constante $a = \frac{T_h}{\mu g}$. Posons $z(x) = y'(x)$. Cela nous conduit à une équation différentielle du premier ordre $z'(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1 + z(x)^2}$ ou encore :

$$\frac{z'(x)}{\sqrt{1 + z(x)^2}} = \frac{1}{a}.$$

Une primitive de $\frac{z'(x)}{\sqrt{1+z(x)^2}}$ est $\operatorname{Argsh} z(x)$, donc

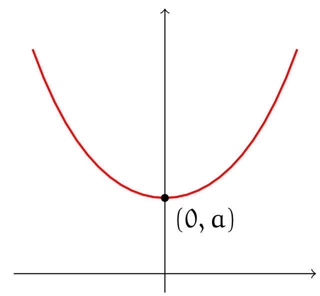
$$\operatorname{Argsh} z(x) = \frac{x}{a} + \alpha$$

où α est une constante. En composant des deux côtés par le sinus hyperbolique :

$$y'(x) = z(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + \alpha\right).$$

Une primitive de $\operatorname{sh} x$ étant $\operatorname{ch} x$, il ne reste plus qu'à intégrer :

$$y(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + \alpha\right) + \beta.$$



Si l'on suppose que le point le plus bas de la chaînette a pour coordonnées $(0, a)$ alors $y(0) = a$ et l'on peut choisir $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ pour les deux constantes.
L'équation est alors $y(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$. $\square$

3.6 Équation paramétrique

Proposition 5. Une équation paramétrique de la chaînette est :

$$\begin{cases} x(t) = a \ln t \\ y(t) = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$$

Démonstration. Nous connaissons l'équation cartésienne $y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$, qui est équivalente à $\operatorname{Argch}\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{x}{a}$. Utilisons la forme logarithmique de la fonction Argch : $\operatorname{Argch} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$ (pour $u \geq 1$).
Nous obtenons :

$$\ln\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) = \frac{x}{a}.$$

Nous cherchons maintenant une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la chaînette, posons $x(t) = a\ln(t)$. Alors l'équation précédente conduit à (après simplification des ln) :

$$\frac{y(t)}{a} + \sqrt{\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1} = t,$$

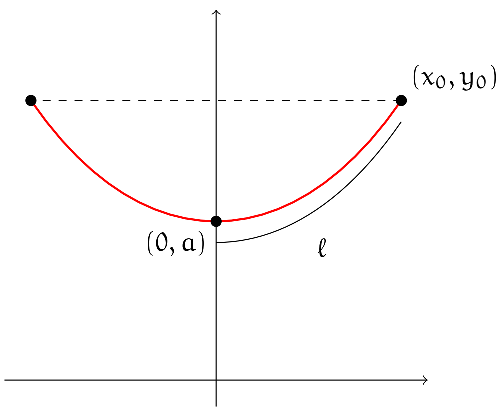
ou encore

$$\sqrt{\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1} = t - \frac{y(t)}{a}$$

ce qui implique en élevant au carré :

$$\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1 = t^2 + \left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 2t\frac{y(t)}{a}$$

d'où $\frac{y(t)}{a} = \frac{t+1}{2t}$, et donc $y(t) = a\left(t + \frac{1}{t}\right)$. □



4 Longueur d'une chaînette

Proposition 6. La longueur de la portion de la chaînette de paramètre a entre le point le plus bas $(0, a)$ et le point d'abscisse x_0 est :

$$\ell = a \operatorname{sh} \frac{x_0}{a}.$$

Démonstration. Par définition la longueur vaut

$$\ell = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

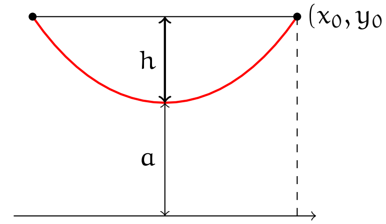
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx \quad \text{car } \operatorname{ch}' \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \operatorname{sh} \frac{x}{a} \\
&= \int_0^{x_0} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} dx \quad \text{car } 1 + \operatorname{sh}^2 u = \operatorname{ch}^2 u \\
&= \int_0^{x_0} \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \left[a \operatorname{sh} \frac{x}{a}\right]_0^{x_0} \\
&= a \operatorname{sh} \frac{x_0}{a}.
\end{aligned}$$

□

5 Calcul du paramètre

La chaînette ne dépend que du seul paramètre a. Ce paramètre a vaut $a = \frac{T_h}{\mu g}$ et est fonction de la masse μ du fil par unité de longueur, de la constante de gravitation g et de la tension horizontale T_h, qui elle dépend de l'écartement de deux points par lesquels passe la chaînette. Ce qui fait qu'il n'est pas facile de calculer a ainsi.
Fixons deux points, pour simplifier nous supposerons qu'ils sont à la même hauteur (même ordonnées). Prenons une chaînette de longueur 2ℓ fixée (et connue !) Nous allons calculer le paramètre a en fonction de la longueur 2ℓ et de la flèche h. La ***flèche*** est la hauteur entre les deux points d'accroche et le point le plus bas de la chaînette.



Proposition 7. Pour une chaînette de longueur 2ℓ et de flèche h alors

$$a = \frac{\ell^2 - h^2}{2h}.$$

Démonstration. Soient $(\pm x_0, y_0)$ les coordonnées des points d'accroche. L'équation de la chaînette étant $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, alors $y_0 = a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a}$ qui vaut aussi $y_0 = a + h$.
Quant à la longueur elle vaut $2\ell = 2a \operatorname{sh}\left(\frac{x_0}{a}\right)$. Nous avons donc les équations :

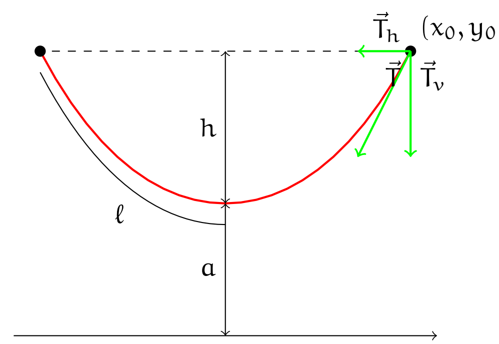
$$\begin{cases} \ell & = a \operatorname{sh} \frac{x_0}{a} \\ h & = a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} - a \end{cases}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \ell^2 - h^2 &= a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x_0}{a} - \left(a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} - a\right)^2 \\ &= a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x_0}{a} - a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x_0}{a} - a^2 + 2a^2 \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} \\ &= 2a\left(-a + a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a}\right) \qquad \text{car } \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \\ &= 2ah. \end{aligned}$$

Ainsi $a = \frac{\ell^2 - h^2}{2h}$. □

6 Calcul de la tension



Proposition 8. Nous pouvons calculer la tension en un point (x_0, y_0) de la chaînette. On note h la flèche correspondante et ℓ la longueur entre le point le plus bas et (x_0, y_0).

– La *tension horizontale* T_h est constante et vaut :

$$T_h = a\mu g = \frac{\ell^2 - h^2}{2h}\mu g.$$

– Le *tension verticale* est :

$$T_v = T_h \cdot \operatorname{ch}\frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{\ell}{a}.$$

– La *tension totale* est :

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = T_h \cdot \operatorname{ch}\frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{a+h}{a}.$$

La tension croît donc avec la hauteur du point

Démonstration. – La tension horizontale a été calculée lors du lemme 1, pour la dernière égalité on utilise la calcul de la longueur vu lors de la proposition 6.

– Par la preuve du théorème 1 : $T_v(x) = T_h \cdot y'(x) = T_h \cdot \operatorname{sh}\frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{\ell}{a}$.

– Le vecteur tension est $\vec{T}(x) = -T_h(x)\vec{\imath} - T_v(x)\vec{\jmath}$, donc la norme $T(x) = \|\vec{T}(x)\| = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = T_h\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x_0}{a}} = T_h \cdot \operatorname{ch}\frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{a+h}{a}$. La dernière égalité est juste le fait que $y_0 = a + h = a\operatorname{ch}\frac{x_0}{a}$.

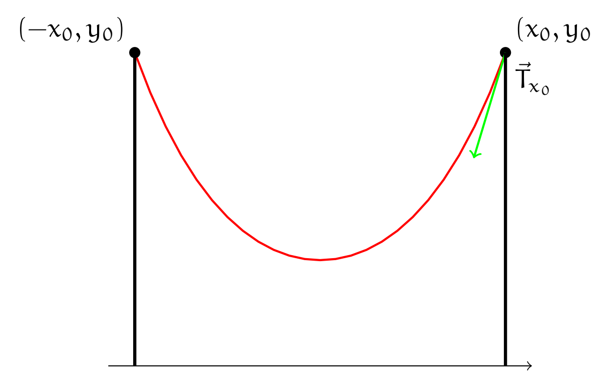
□

7 Exercices

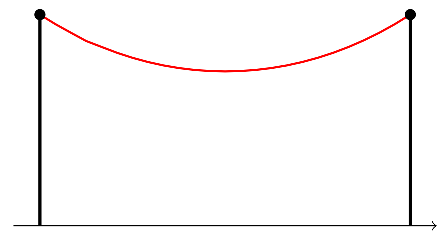
Exercice 1 (Tension minimale)
On se donne deux poteaux distants d'une longueur $2x_0$ fixée et d'une hauteur suffisante. Parmi toutes les chaînettes passant par les sommets de ces poteaux, on cherche celle qui a les forces de tensions minimales.
Nous savons que la tension totale (voir la proposition 8) vaut

$$T_x(a) = a\mu g \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Pour une chaînette donnée la tension est donc maximale au point d'accroche (en $x = x_0$) car le cosinus hyperbolique est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$. Pour un a fixé la tension maximale est donc $T_{x_0}(a)$. Notre problème, x_0 étant fixé, est de trouver le a qui minimise $T_{x_0}(a)$.

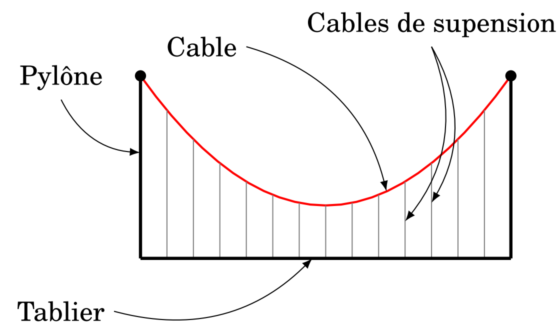


1. Considérations physiques : Que vaut la tension si la chaînette est rectiligne (le longueur de la chaînette est celle de l'écartement) ? Que vaut la tension si la longueur de la chaînette est infinie ?
2. Montrer que l'équation $\operatorname{ch} t = t \operatorname{sh} t$ est équivalente à l'équation $(t-1)e^{2t} = t+1$. Montrer que, sur $[0, +\infty[$, cette équation a une unique solution τ. Une valeur approchée de τ est $\tau = 1,19968\ldots$
3. Montrer que la tension $T_{x_0}(a)$ est minimale en $a = \frac{x_0}{\tau}$.
4. Calculer la longueur correspondante, ainsi que la flèche.



[[[corrigé dans les commentaires du fichier source]]]

Exercice 2 (Pont suspendu)
Nous allons calculer que la courbe du cable d'un pont suspendu est une parabole.
Soit le tablier d'un pont de longueur L et de masse totale M. Un gros cable est accroché entre deux pylônes. À ce cable sont accrochés un grand nombre de petits cables de suspension verticaux reliant le gros cable au tablier.
Nous allons calculer l'équation $y(x)$ du cable. On s'inspirera pour les premières questions des calculs sur la chaînette.



1. Quelle sont les forces qui s'appliquent à une portion de cable dont l'abscisse est entre x et $x + dx$.
2. Écrire l'équation du principe fondamental de la mécanique appliqué à cette portion.
3. Montrer que la tension horizontale est indépendante de x.
4. Montrer que la tension verticale vérifie l'équation différentielle : $T_v'(x) = -T_h \cdot y''(x)$.
5. Dans toutes la suite nous supposerons que la masse du cable est négligeable devant celle du tablier. Cela revient à supposer que le poids $P(x)$ du cable est négligeable devant la charge $C(x)$ du tablier. Nous posons donc $P(x) = 0$. Montrer que le principe fondamental de la mécanique s'écrit alors :

$$T_h \cdot y''(x) = \frac{M}{L} g.$$

6. Quelle est l'équation $y(x)$ du cable ?
7. Calculer une équation du cable du *Golden Bridge* (San Fransisco). Le tablier mesure 1280 mètres de long, les pylônes ont une hauteur de 160 mètres (au-dessus du tablier) et le cable descend jusqu'au tablier (au milieu du pont).

[[[corrigé dans les commentaires du fichier source]]]