

La relativité restreinte

Introduction

Ce document propose une introduction à la théorie de la relativité restreinte, un pilier de la physique moderne qui a radicalement transformé notre compréhension de l'espace, du temps et de la matière. Conçu pour être accessible tout en restant rigoureux, il s'adresse à toute personne désireuse de comprendre les fondements et les implications de cette théorie fascinante.

Plutôt que de se limiter à l'approche algébrique traditionnelle, ce cours offre une perspective complémentaire, résolument géométrique, pour en révéler la structure profonde. L'originalité de la démarche réside dans l'utilisation systématique de la **trigonométrie hyperbolique** comme outil unificateur.

Cette méthode est plus simple qu'elle n'y paraît. En pratique, les fonctions hyperboliques ($\cosh$, $\sinh$, $\tanh$) se manipulent avec la même facilité que leurs cousines circulaires ($\cos$, $\sin$, $\tan$), comme le rappellent les annexes de ce document. De plus, l'accès à des outils modernes comme le langage Python ou les intelligences artificielles rend aujourd'hui ces calculs hyperboliques quasi instantanés, levant toute difficulté pratique. L'avantage de cette méthode est qu'elle offre une clarté conceptuelle remarquable :

- Les **transformations de Lorentz** sont interprétées comme une véritable **rotation hyperbolique** des axes de l'espace-temps de Minkowski.
- La **composition des vitesses**, souvent peu intuitive, devient une simple **addition des angles hyperboliques**.
- La **dynamique relativiste** est entièrement intégrée à ce cadre, où les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion s'expriment naturellement avec les fonctions $\cosh(\theta)$ et $\sinh(\theta)$.

Le parcours proposé est progressif. Il débute par la célèbre expérience de pensée de **l'horloge à lumière** pour introduire la dilatation du temps, pour ensuite construire, étape par étape, l'ensemble de l'édifice théorique. Vous explorerez les **quadrivecteurs**, objets naturels de l'espace-temps, pour aboutir à la fameuse relation $E_0 = m_0 c^2$ et à ses applications dans le monde des collisions de particules.

En suivant ce fil conducteur géométrique, le lecteur est invité à porter un nouveau regard sur la nature de la réalité physique, où l'espace et le temps sont intimement liés en un seul et même **continuum**.

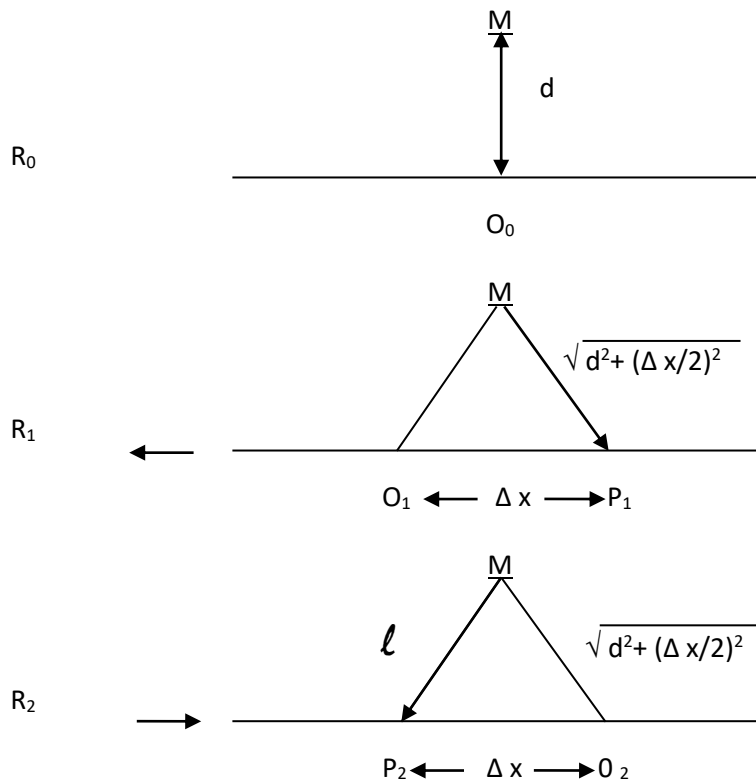
L'horloge à lumière

C'est un fait expérimental et c'est la base de la relativité restreinte, la vitesse de la lumière est constante. Que la mesure de la vitesse soit exécutée à partir d'un référentiel immobile par rapport à la source de lumière ou d'un référentiel en mouvement uniforme rectiligne par rapport à la source de lumière. C'est ce qu'on appelle l'invariance de la vitesse de la lumière. Ceci a été démontré, entre autres, par l'expérience de Michelson et Morley : https://fr.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_de_Michelson_et_Morley. Cette constance a un impact considérable sur les mesures des phénomènes physiques et ce qui en découle.

La mesure du temps et des longueurs est dépendante de la condition de déplacement relatif des référentiels.

La vitesse C est une vitesse limite que rien ne peut dépasser. Ce n'est pas une propriété de la lumière, mais une propriété de l'espace-temps.

Pour appréhender ces phénomènes, introduisons une « horloge-lumière » dans le référentiel R_0 . L'horloge-lumière est un dispositif formé de deux miroirs séparés d'une distance d et entre lesquels un signal lumineux effectue des allers-retours, générant une série de « tic » au point O_0 de période $T = 2d/c$.



Animation : <https://liensphysique.science.blog/introduction-a-la-relativite-restreinte-2/>

De la situation présentée, nous pouvons déduire diverses formules.

Pour un demi-battement d'horloge:

$$\tau = d/c$$

Vue du référentiel en mouvement, nous définissons:

$$\ell \equiv \sqrt{d^2 + (\Delta x_1/2)^2} \Rightarrow t = \ell/c$$

En prenant V comme vitesse de déplacement d'un référentiel, nous obtenons :

$$\ell^2 = d^2 + (\Delta x/2)^2$$

$$\ell^2 = d^2 + V^2 t^2$$

$$\ell^2 - V^2 t^2 = d^2$$

$$\ell^2/c^2 - V^2 t^2/c^2 = d^2/c^2$$

$$t^2 - V^2 t^2/c^2 = d^2/c^2$$

$$(1 - V^2/c^2) t^2 = d^2/c^2$$

$$(1 - V^2/c^2) t^2 = \tau^2$$

$$t = \tau / \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

En définissant $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ nous obtenons $t = \gamma \tau$

Le coefficient γ est appelé **facteur de Lorentz**. Comme $\gamma \geq 1$, on en déduit le phénomène de **dilatation du temps** : $t \geq \tau$.

Dans les transformations de Lorentz, une variable β est définie comme étant V/c . Nous y reviendrons.

$$\beta \equiv V/c$$

« Qu'est-ce que le temps ?

Le temps est une durée. Nous mesurons une durée par comparaison avec un système qui a des changements d'état cycliques stable. Ce système sert d'étalon de mesure, d'horloge. Cette horloge sert donc de référence pour suivre l'évolution d'un autre système. Le temps est la mesure de durée de l'évolution d'un système d'un état à un autre. Quand le temps ralentit, en fait, c'est l'évolution de tout système d'un état à un autre qui est ralentie (les horloges, les réactions chimiques, nucléaires, les battements de cœur...).»

Représentation de deux référentiels inertiels en mouvement rectiligne relatif un par rapport à l'autre

On considère deux référentiels R et R' , le deuxième référentiel R' étant animé de la vitesse constante v par rapport au référentiel R .

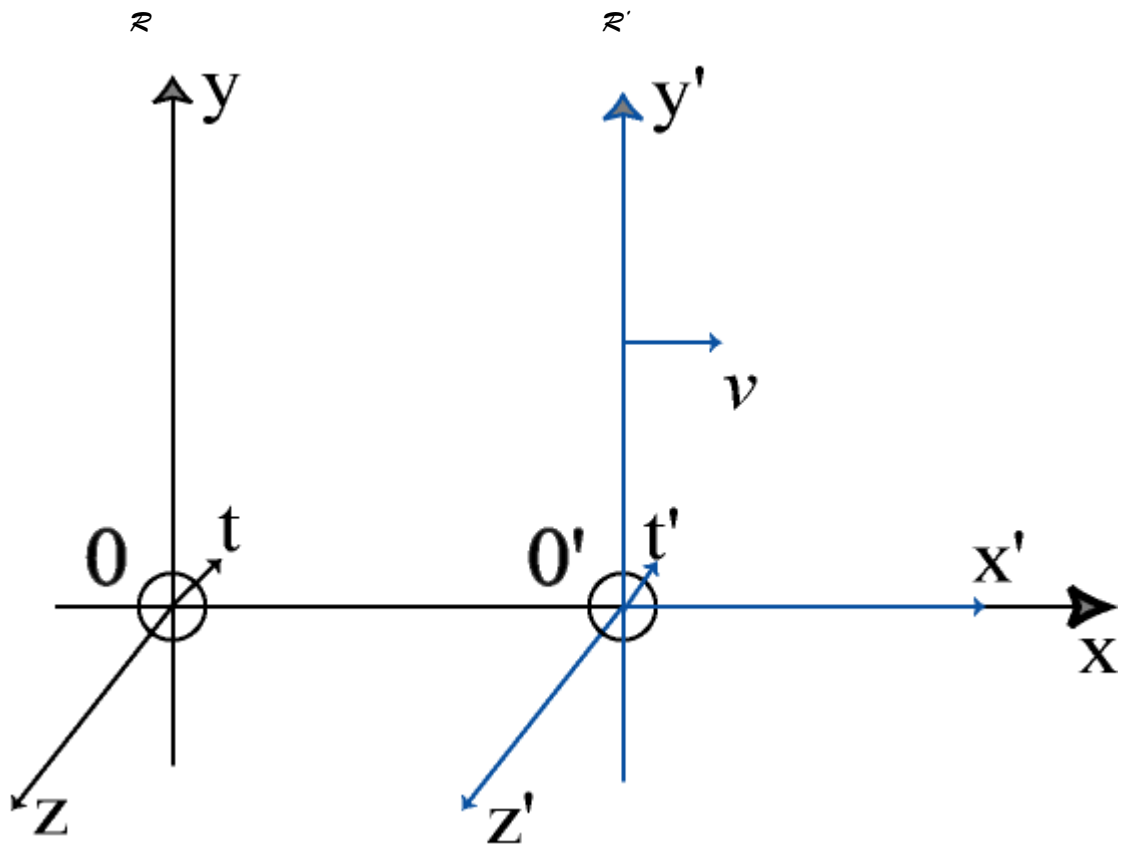
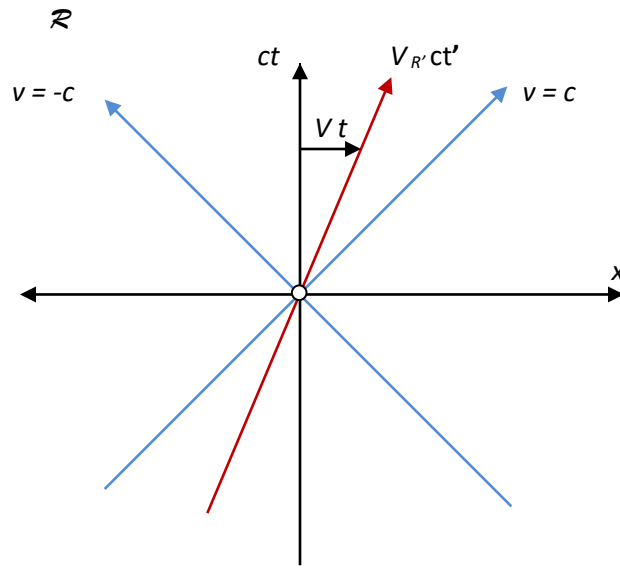


Image source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Relativité_restreinte#/media/Fichier:RR_referentiel1.png

Le continuum espace-temps n'est pas correctement rendu par cette représentation ; le diagramme d'espace-temps de Minkowski est mieux approprié.

Diagramme d'espace de Minkowski

On définit l'espace-temps comme un continuum à 4 dimensions formé par l'ensemble des événements. Pour les aspects graphiques, on se limitera à une seule dimension spatiale en x . En ordonnée, on retrouvera le temps multiplié par c , de sorte que l'on travaille avec des grandeurs de même dimension ($c \times \text{temps}$ équivalant à une distance).



Deux lignes à 45 degrés dessinent la trajectoire, dans le temps et dans l'espace, d'un flash lumineux émis à partir du point d'origine O . Le déplacement sur l'axe X est égal au déplacement sur l'axe Y . « Y » est le temps multiplié par c . X est V multiplié par le temps. Pour la lumière, $v = c$. Cette trajectoire est aussi appelée la ligne d'univers du photon. En tenant compte des 3 dimensions spatiales, la lumière forme un *cône de lumière*.

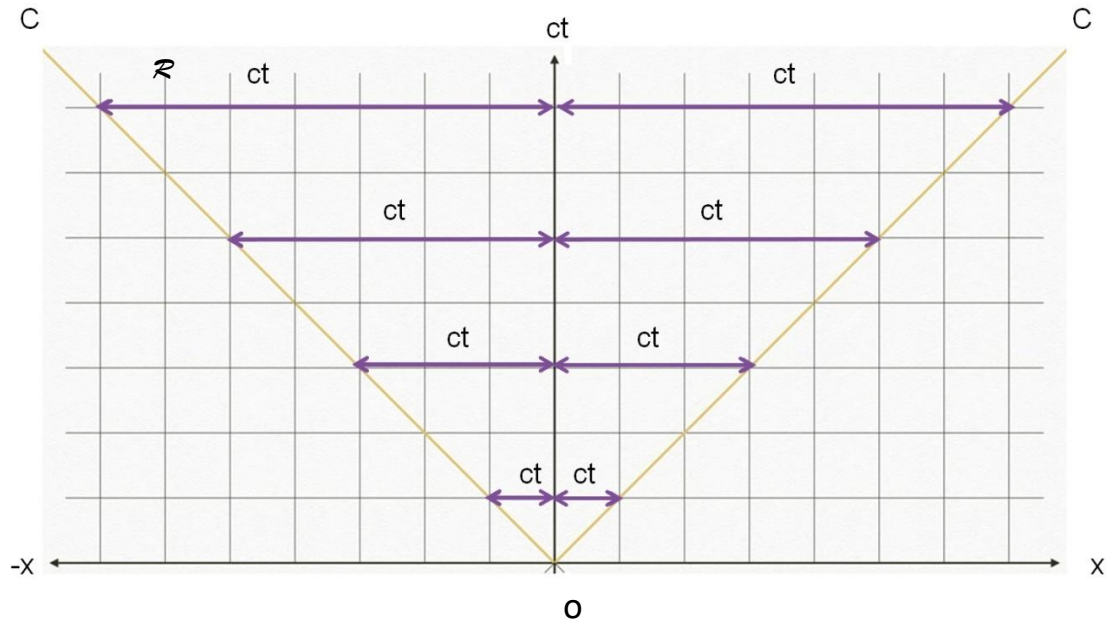
La ligne d'univers d'une particule en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ est une droite de pente V/c , ou V est la vitesse de la particule. $\mathcal{R}'$ est le référentiel immobile par rapport à la particule, qui suit la particule dans son mouvement. Il est aussi nommé son *référentiel propre*.

L'axe V est aussi l'axe ct de la particule, nous le notons ct' . Comme la particule a une vitesse nulle dans le référentiel $\mathcal{R}'$, son déplacement s'effectue que sur l'axe ct' dans ce référentiel.

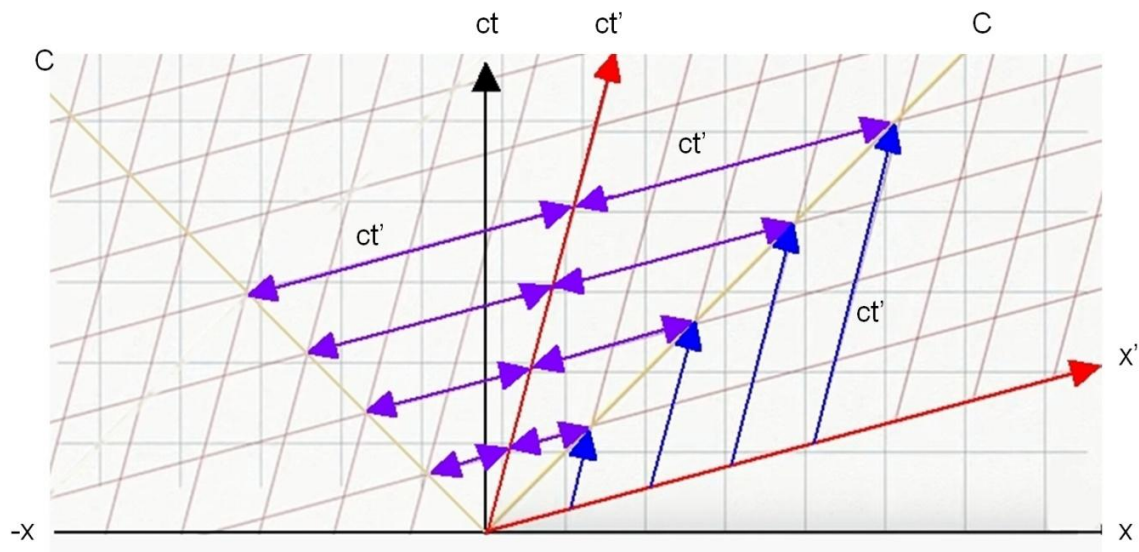
Le référentiel $\mathcal{R}'$ est tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Ce pourrait être un train, un avion, une fusée, etc. par rapport au sol. Ou l'inverse, par exemple, la terre par rapport à une fusée. Pour l'astronaute immobile dans le référentiel de la fusée, c'est la terre qui se déplace et le *référentiel propre* de la terre devient le référentiel $\mathcal{R}'$.

Rotation hyperbolique des axes de référence

Dans un système au repos les axes ct et x sont perpendiculaires. La trajectoire du flash lumineux émis à partir du point d'origine O est toujours à égale distance sur l'axe x et $-x$.



Dans un référentiel $\mathcal{R}'$ qui se déplace par rapport à $\mathcal{R}$, les axes du référentiel $\mathcal{R}'$, vue à partir du référentiel $\mathcal{R}$, sont repliés. On compense la rotation de l'axe temporel ct' par la rotation inverse de l'axe spatial x' .

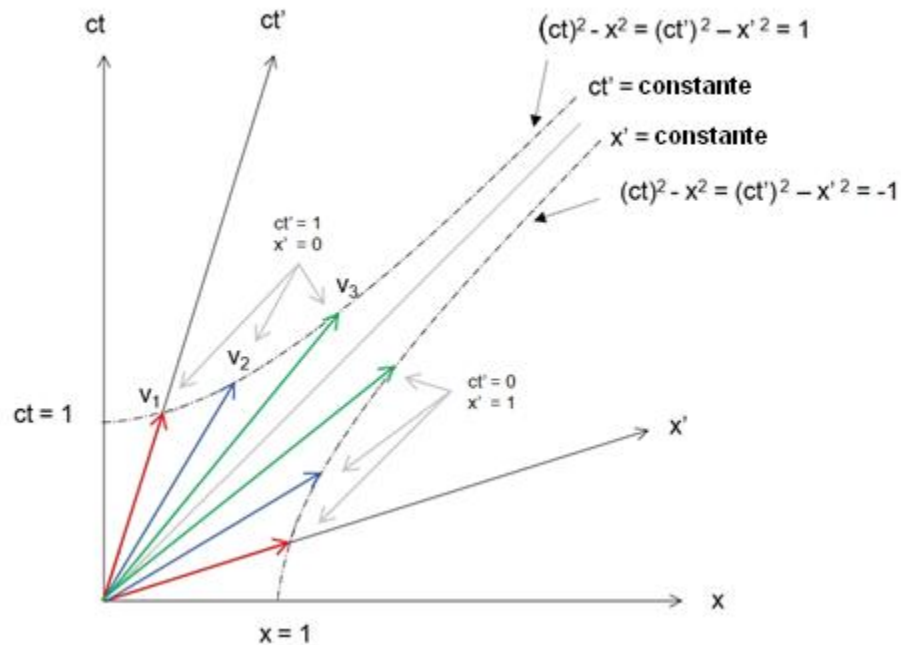


En appliquant la rotation, l'axe ct' est à égale distance du trajet de la lumière selon $-x'$ et x' . Malgré le déplacement du référentiel $\mathcal{R}'$, la lumière a conservé sa vitesse c pour ce référentiel. Plus la vitesse de $\mathcal{R}'$ est grande, plus les axes se replient vers la trajectoire c .

Voir l'animation : Relativité restreinte : l'espace qui fabrique du temps, de Sciencesilencieuse
https://www.youtube.com/watch?v=jSy3EsPW1iY&list=PLrfG_Hi1Epg6F-O9ugl6lmZ47iSKAN2EI

Rotation hyperbolique

La formule « $c^2 \Delta t^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \text{constante}$ » est de type hyperbolique du genre « $a^2 - b^2 = c^2$ ».



Graphique de l'évolution de ct et de x selon la vitesse relative des référentiels

On trace les courbes de l'évolution de ct et de x selon la vitesse relative des référentiels

Évolution de ct : $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = 1$ en prenant $ct' = 1$ et $x' = 0$, point $\mathcal{R}' = (1,0)$

$$(ct)^2 - x^2 = 1$$

$$(ct)^2 = 1 + x^2$$

$$ct = \sqrt{1 + x^2}$$

Les lignes rouges, bleues et vertes ont numériquement la même valeur.

Évolution de x : $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = -1$ en prenant $ct' = 0$ et $x' = 1$, point $\mathcal{R}' = (0,1)$

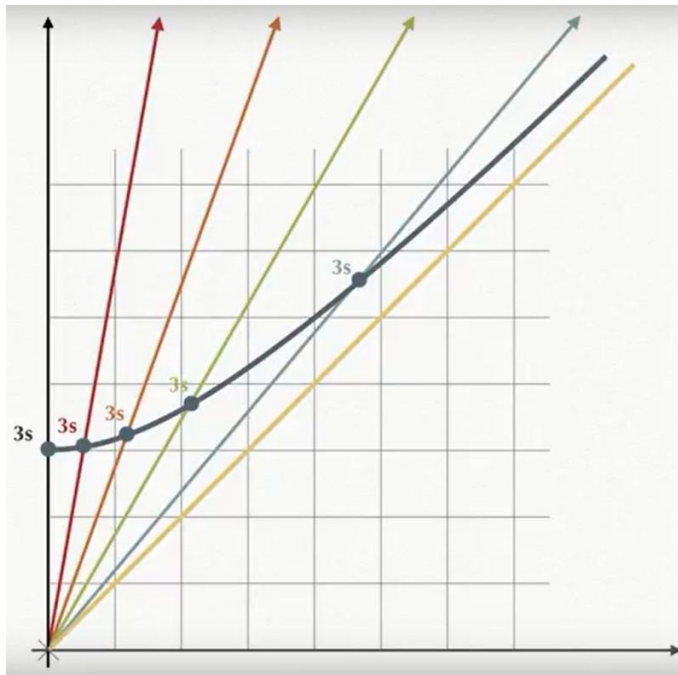
$$(ct)^2 - x^2 = -1$$

$$(ct)^2 + 1 = x^2$$

$$x^2 = (ct)^2 + 1$$

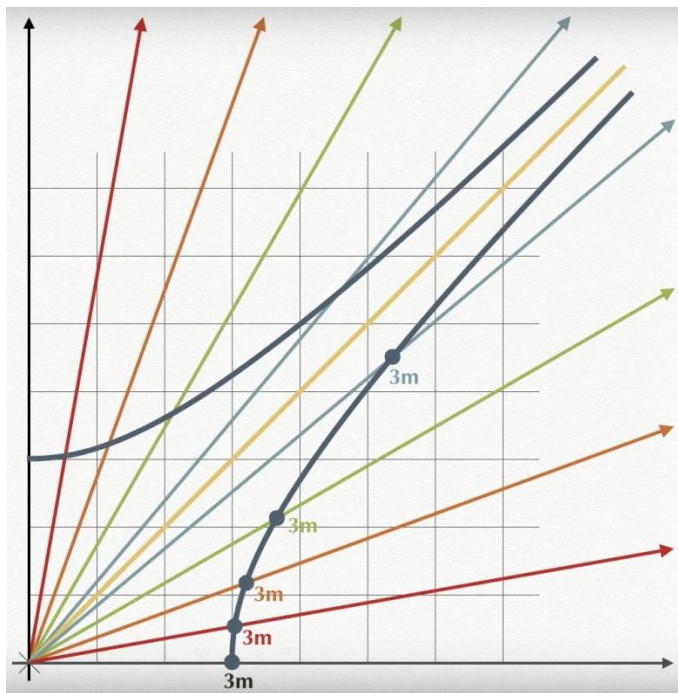
$$x = \sqrt{(ct)^2 + 1}$$

En résumé



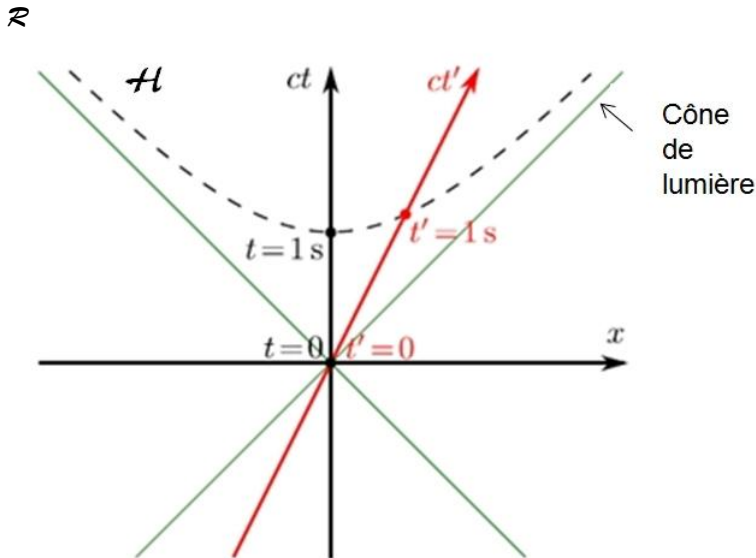
Des observateurs aux vitesses différentes passent tous à l'origine au même instant, pris comme temps 0. Au bout de 3 secondes (à leur montre), ils notent l'événement sur leur ligne d'univers. Ces événements, reliés entre eux, dessinent une courbe : une hyperbole.

Pour une rotation hyperbolique, l'hyperbole est l'équivalent du cercle dans une rotation circulaire. Un point du cercle est toujours à la même distance du centre, soit r le rayon. Dans une rotation hyperbolique, un point de l'hyperbole est toujours à la même distance de l'origine pour chaque observateur.



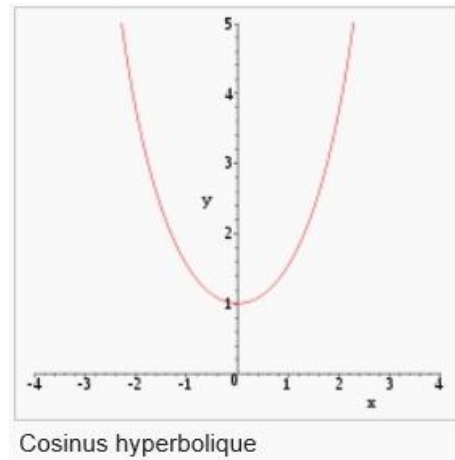
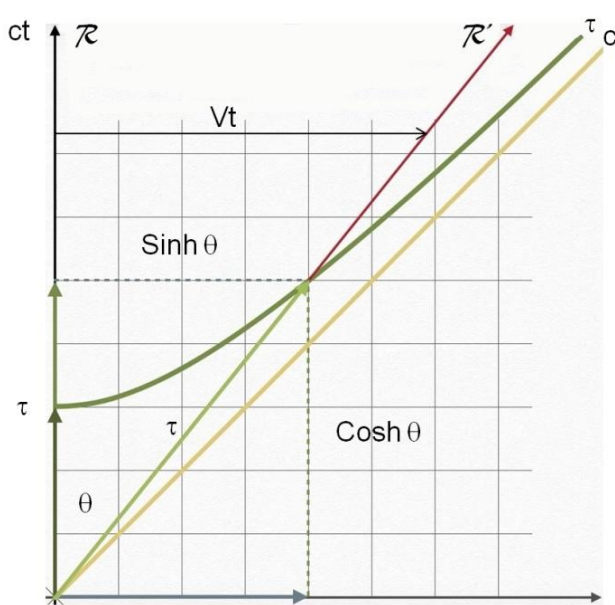
On peut aussi demander à ces observateurs de marquer, à l'instant zéro sur leur ligne d'univers, une distance à l'origine de 3m. On obtient à nouveau une hyperbole.

Ref: Relativité restreinte 5 : hyperboles, de Sciencesilencieuse:
https://www.youtube.com/watch?v=omKgmrTK66s&list=PLrfG_Hi1Epg6F-O9ugl6lmZ47iSKAN2EI&index=5



La formule « $c^2 \Delta t^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \text{constante}$ » étant de type hyperbolique, nous pouvons appliquer la trigonométrie hyperbolique aux phénomènes de la relativité restreinte (voir l'annexe 1).

Ref : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_hyperbolique



La durée d'un événement qui a comme valeur « τ », aura toujours la valeur « τ » dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ qui se déplace à vitesse V par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Mais cette durée sera égale à « $\cosh(\theta) * \tau$ » vue du référentiel $\mathcal{R}$.

Prenons par exemple, une particule, le muon, qui a une demi-vie de $2,2 \mu\text{s}$ en laboratoire (immobile dans le référentiel du laboratoire, ou se déplaçant à faible vitesse par rapport à c , donc $\tau = 2,2 \mu\text{s}$). On mesurera une durée de demi-vie de $22,4806 \mu\text{s}$ pour les muons produits dans la haute atmosphère de la terre par les rayons cosmiques. Ces muons se déplacent à la vitesse de 298353454 m/s par rapport au sol.

La demi-vie des muons est donc égale à $\cosh(\theta) * \tau$

La formule du paramètre angulaire de vitesse relativiste θ est « $\theta = \operatorname{atanh}(V/c)$ ». Ce paramètre θ est appelé **paramètre de rapidité** ou **rapidité hyperbolique**. Voir annexe 1 : trigonométrie hyperbolique.

$$t = (\cosh(\operatorname{atanh}(298353454/299792458))) * 2,2 \mu\text{s} = 22,4806 \mu\text{s}$$

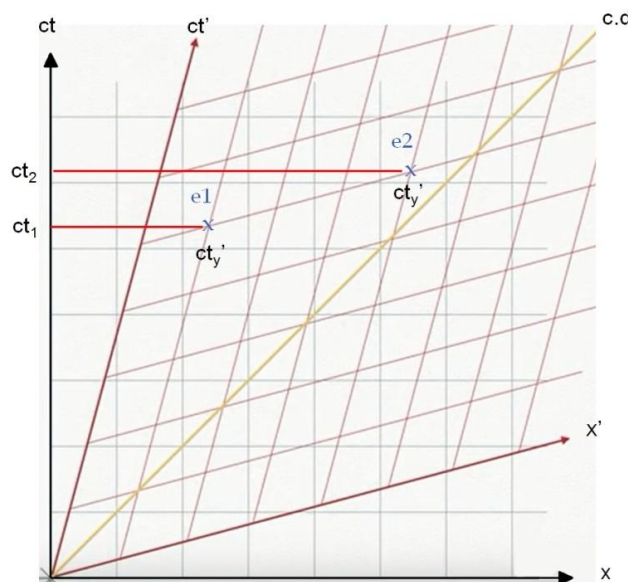
Si nous reprenons le calcul avec $t = \tau * 1/\sqrt{(1 - V^2/c^2)}$, nous obtenons $22,4806 \mu\text{s}$. $\cosh(\theta)$ est donc égale à γ .

$\cosh(\theta)$ vaut 1 pour lorsque $V = 0$ et tend vers l'infini quand V s'approche de c . Le temps, vu du référentiel $\mathcal{R}$, semble pratiquement s'arrêter pour une particule qui va presque à la vitesse c par rapport à $\mathcal{R}$. Cette vitesse est impossible à atteindre pour une particule ayant une masse, car elle demande une énergie infinie pour l'atteindre. Nous y reviendrons. Le photon n'a pas de masse, c'est pour cela qu'il peut atteindre la vitesse c . C'est sa vitesse dans le vide.

La distance parcourue du muon pour le référentiel terrestre est

$$22,4806 \mu\text{s} * 298353454 \text{ m/s} = 6707 \text{ m}$$

La simultanéité est non conservée dans un changement de référentiel.

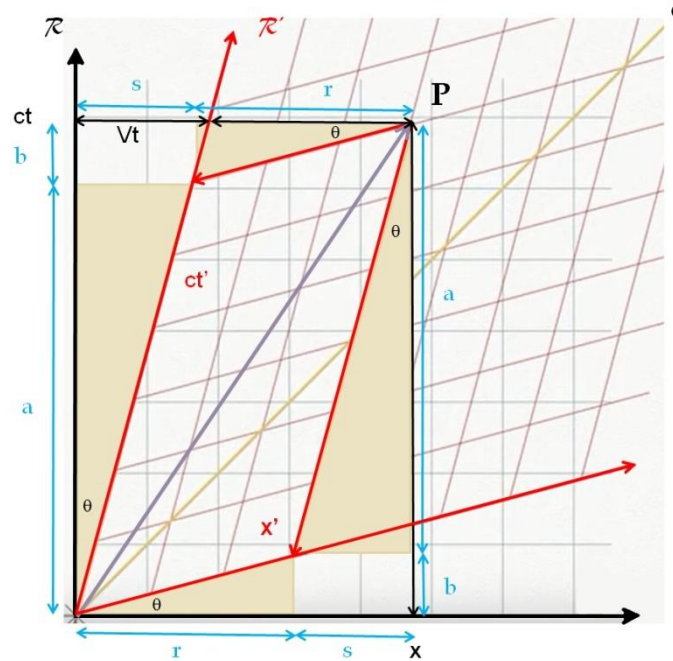


Deux événements $e1$ et $e2$ qui se produisent simultanément à 2 endroits sur l'axe x' ne sont pas simultanés dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Approche trigonométrique de la transformation de Lorentz

Formules de transformation des coordonnées du point P lors de changement de référentiel.

Les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en mouvement relatif uniforme un par rapport à l'autre.



Comme la rotation des axes découle d'une fonction hyperbolique, la trigonométrie hyperbolique s'applique aux équations de transformation.

$$\tanh(\theta) = Vt/ct = V/c \quad (\theta) = \operatorname{atanh}(V/c)$$

$\mathcal{R} \mathcal{R}' \rightarrow V$

$$ct = a + b \quad a = \cosh(\theta) ct' \quad b = \sinh(\theta) x'$$

$$ct = \cosh(\theta) ct' + \sinh(\theta) x'$$

$$x = s + r \quad s = \sinh(\theta) ct' \quad r = \cosh(\theta) x'$$

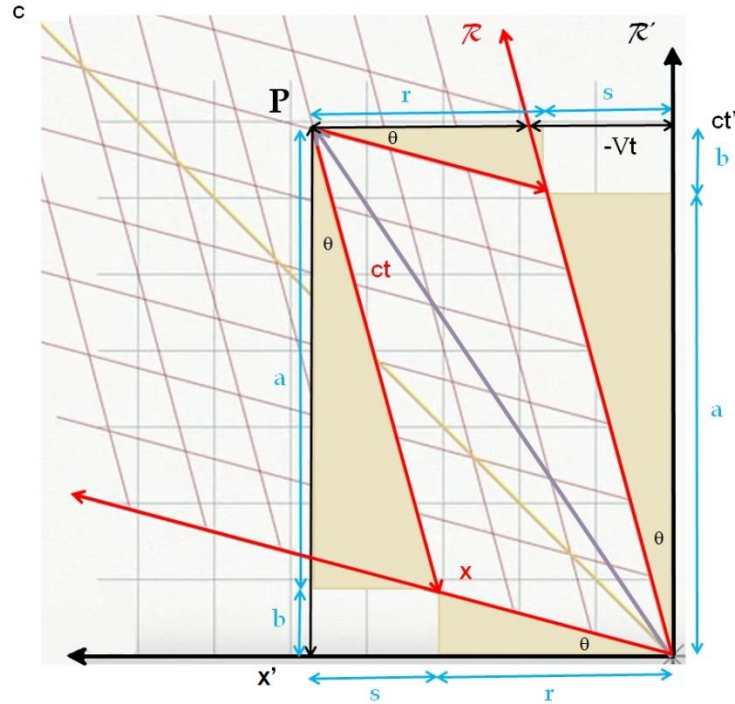
$$x = \sinh(\theta) ct' + \cosh(\theta) x'$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

Comme le référentiel $\mathcal{R}$ bouge par rapport à $\mathcal{R}'$, sa perception de l'espace-temps est différente. Chacun a un point de vue différent sur un même phénomène. L'espace-temps étant un continuum, une différence dans le temps implique une différence dans l'espace et vice versa. Le tout est reflété dans les formules ci-contre.

ct est la somme de la composante de ct' et de x' projetée sur l'axe ct . x est la somme de la composante de ct' et de x' projetée sur l'axe x .

En relativité, il n'y a pas de repères absolus, tout est relatif. On peut considérer le référentiel $\mathcal{R}'$ comme immobile, le référentiel $\mathcal{R}$ se déplaçant dans la direction inverse à la vitesse $-v$, ou un déplacement dans la direction des $-x$.



$$\tanh(\theta) = -Vt/ct = -V/c \quad (\theta) = \operatorname{atanh}(-V/c) = -\operatorname{atanh}(V/c)$$

$-V \leftarrow \mathcal{R} \mathcal{R}'$ (inversion de la matrice)

$$ct' = a + b \quad a = \cosh(\theta) ct \quad b = -\sinh(\theta) x$$

$$ct' = \cosh(\theta) ct - \sinh(\theta) x$$

$$x' = s + r \quad s = -\sinh(\theta) ct \quad r = \cosh(\theta) x$$

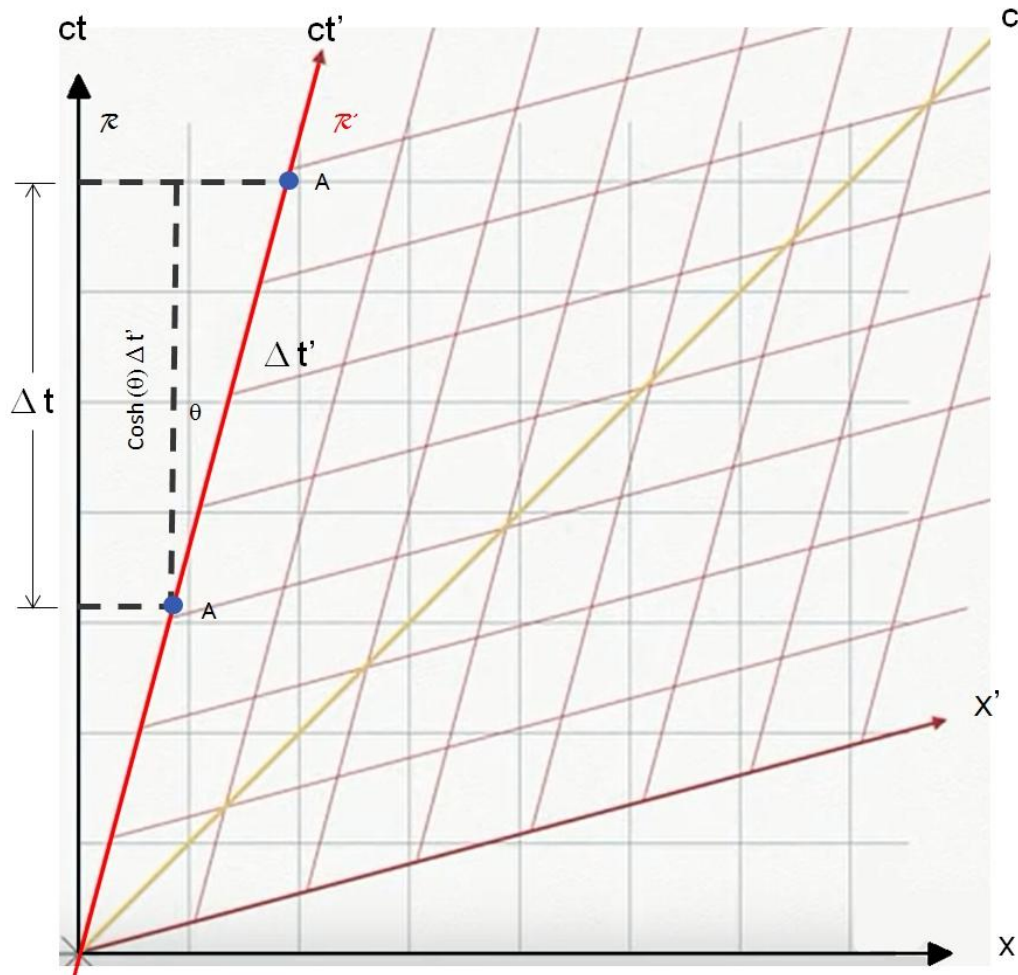
$$x' = -\sinh(\theta) ct + \cosh(\theta) x$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Voir l'annexe 2 pour les correspondances des formules de la transformation de Lorentz avec γ et β .

Dilatation du temps

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement relatif uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Un événement se produit au point A. Il a une durée de $\Delta t'$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Pour ce référentiel, le point A ne bouge pas dans l'espace.

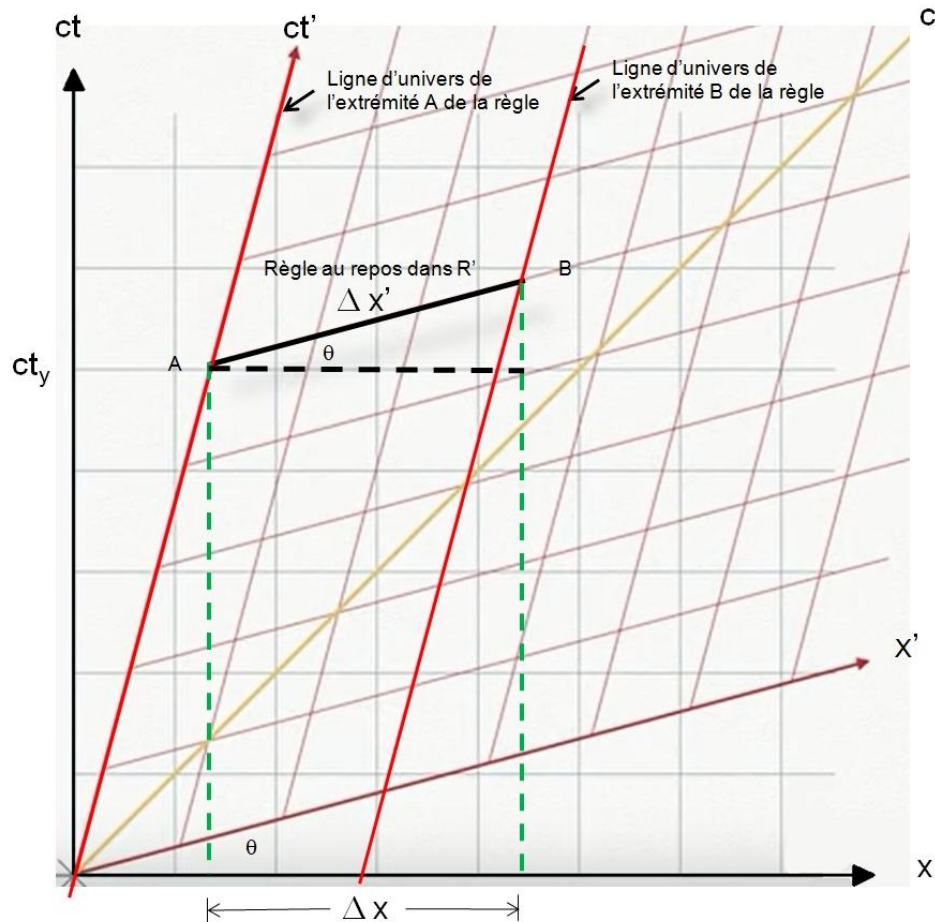


En appliquant la transformation hyperbolique nous obtenons que le temps est dilaté dans le référentiel $\mathcal{R}$ par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

$c\Delta t = \cosh(\theta) c\Delta t' + \sinh(\theta) \Delta x'$		$\Delta x' = 0$ (point A fixe dans $\mathcal{R}'$)
$c\Delta t = \cosh(\theta) c\Delta t'$	$c\Delta t \geq c\Delta t'$	Quand $\Delta x' = 0$
$t = \cosh(\theta) t'$	$t \geq t'$	$t = \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} * t'$

Contraction des longueurs

Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement relatif uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Une règle est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$.



Les lignes d'univers des extrémités de la règle indiquent la position de la règle dans le temps et dans l'espace. Dans $\mathcal{R}$, la règle se déplace dans le temps, mais est immobile dans l'espace.

Pour mesurer la longueur de la règle dans le référentiel $\mathcal{R}$, l'observateur relève la position des extrémités de celle-ci simultanément. Pour lui, la règle est en mouvement, disons qu'il prend une photo instantanée au moment ct_y . Δx sera plus petit que $\Delta x'$, d'autant plus petit que la vitesse relative des référentiels est grande.

En appliquant la transformation hyperbolique, nous obtenons qu'une distance se contracte dans le sens du déplacement pour le référentiel *impropre*. L' est la longueur propre (règle au repos).

$\Delta x' = -\sinh(\theta) c\Delta t + \cosh(\theta) \Delta x$		$c\Delta t = 0$ (simultanéité)
$\Delta x' = \cosh(\theta) \Delta x$		Quand $c\Delta t = 0$
$L' = \cosh(\theta) L$	$L' \geq L$	$L' = \frac{1}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} * L$
$L = L' / \cosh(\theta)$	$L \leq L'$	$L = L' * \sqrt{1 - (V^2/c^2)}$

Revenons à l'exemple du muon

Attribuons au référentiel *propre* du muon le nom $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ suit alors le muon dans son déplacement. Donc le muon est fixe dans ce référentiel, $\mathcal{R}'$ va à la vitesse du muon par rapport à la terre.

Cherchons le temps de demi-vie dans le référentiel de la terre et la distance parcourue par le muon pour ce référentiel.

$c\Delta t = \cosh(\theta) c\Delta t' + \sinh(\theta) \Delta x'$	$\Delta x' = 0$ (muon fixe dans $\mathcal{R}'$)
$\Delta x = \sinh(\theta) c\Delta t' + \cosh(\theta) \Delta x'$	
$t = \cosh(\theta) t'$	

$\Delta t'$	$c\Delta t'$	$\Delta x'$	V	c
2,2E-06 s	659,5 m	0	298353454 m/s	299792458 m/s

V/c	$\theta = \operatorname{atanh}(V/c)$	$\cosh(\operatorname{atanh}(V/c))$	$\sinh(\operatorname{atanh}(V/c))$
0,995199999	3,014941758	10,21847609	10,16942739

$t = \cosh(\theta) t'$
$t = (\cosh(3,014941758)) * (2,2E-6)$
$t = 2,2480647382E-05$ s

$\Delta x = \sinh(\theta) c\Delta t' + \cosh(\theta) \Delta x' = \sinh(\theta) c\Delta t'$
$\Delta x = (\sinh(3,014941758)) * (299792458) * (2,2E-6)$
$\Delta x = 6707,2$ m

Mesurer du référentiel terrestre : $t = 22,4806 \mu\text{s}$ et la distance parcourue 6707,2 m

Pour le muon, la terre s'approche de lui à la vitesse de 298353454 m/s, que vaut pour lui la distance **6707,2 m** du référentiel de la terre ?

Le référentiel du muon est $\mathcal{R}$, celui de la terre est $\mathcal{R}'$. On applique la contraction des longueurs :

$L = L' / \cosh(\theta)$
$L = 6707,2 / (\cosh(3,014941758))$
$L = 656,4$ m

Si on vérifie : $\tau_{\text{muon}} * v_{\text{muon}} : 2,2 \mu\text{s} * 298353454 \text{ m/s} = 656,4 \text{ m}$

En résumé :

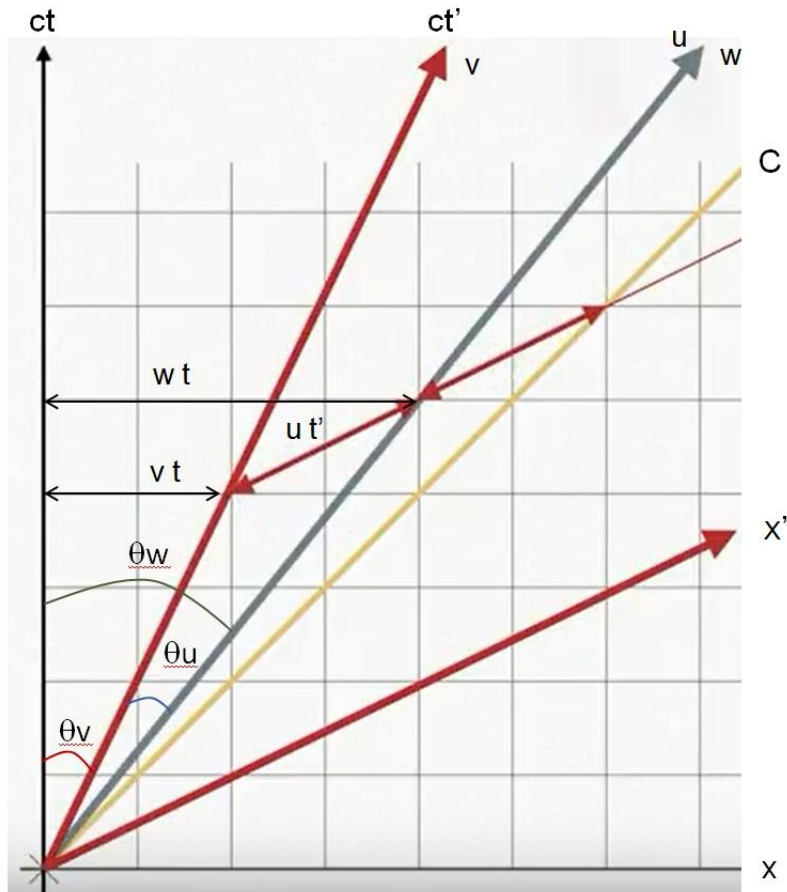
Pour un muon se déplaçant à la vitesse de 298353454 m/s par rapport au sol.

Vue de la terre, la demi-vie du muon est 22,5 μs , la distance parcourue est de 6707,2 m

Pour le muon, sa demi-vie est 2,2 μs et la distance parcourue est 656,4 m

La composition des vitesses

Une fusée se déplace à la vitesse $v = 0,5c$ par rapport à la terre. Un missile passe à côté de la fusée à la vitesse $u = 0,5c$ mesurée à partir de la fusée. Quelle est la vitesse w du missile mesurée à partir du sol ?



$$\theta_w = \theta_v + \theta_u$$

$\tanh(\theta_w) = w/c$	$\tanh(\theta_v) = v/c$	$\tanh(\theta_u) = u/c$
$\theta_w = \operatorname{atanh}(w/c)$	$\theta_v = \operatorname{atanh}(v/c)$	$\theta_u = \operatorname{atanh}(u/c)$
$w/c = \tanh(\theta_w)$		
$w = c [\tanh(\theta_w)]$		
$w = c [\tanh(\theta_v + \theta_u)]$		
$w = c [\tanh(\operatorname{atanh}(v/c) + \operatorname{atanh}(u/c))]$	=	$w = (u + v)/(1 + uv/c^2)$

$w = c [\tanh(\operatorname{atanh}(0,5) + \operatorname{atanh}(0,5))]$	Si $u = c$ alors $w = c$ ($\operatorname{atanh}(+1) = +\infty$, $\tanh(+\infty) = +1$) Même vitesse, c'est la constance de la vitesse de la lumière
$w = c [\tanh(0,549306 + 0,549306)]$	
$w = c [\tanh(1,098612)]$	
$w = 0,8c$	

Les quadrivecteurs

Dans les systèmes en trois dimensions, la grandeur, orientation et sens d'une entité physique sont modélisés sous forme d'un vecteur. Exemple : la force possède une grandeur, elle s'applique dans une direction, selon un certain sens. Dans la relativité, l'équivalent est nommé « quadrivecteur ». Il représente un événement dans l'espace-temps.

Les coordonnées du quadrivecteur « position-temps » s'écrivent sous ces formes

$$\underline{r} = (ct; \vec{r}) = (ct; x; y; z) \text{ ou}$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou

$$\underline{r} = (x^0; x^1; x^2; x^3) \text{ où la dimension } x^0 = ct$$

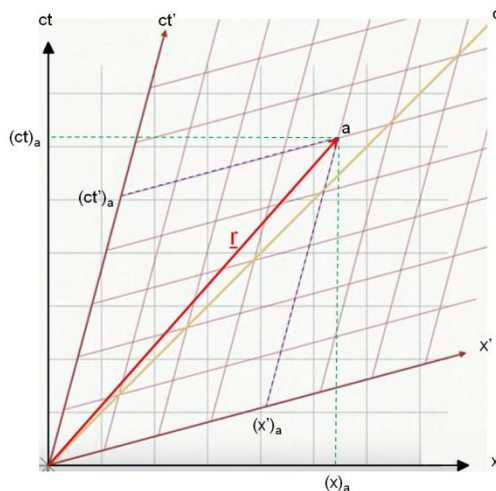
La « grandeur » du quadrivecteur est

$$\|\underline{r}\| = \sqrt{c^2t^2 - \vec{r}^2} = \sqrt{c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\|\underline{r}\|^2 = (ct)^2 - \vec{r}^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

Cette valeur est l'invariant relativiste. « $\|\underline{r}\|$ » a la même valeur dans tous les référentiels au repos ou en mouvement de translation rectiligne uniforme (référentiel inertiel, aussi nommé galiléen). Les coordonnées de $\underline{r}$ changent d'un référentiel à l'autre, mais sa grandeur ne change pas.

La grandeur du quadrivecteur est appelée « pseudo-norme ».

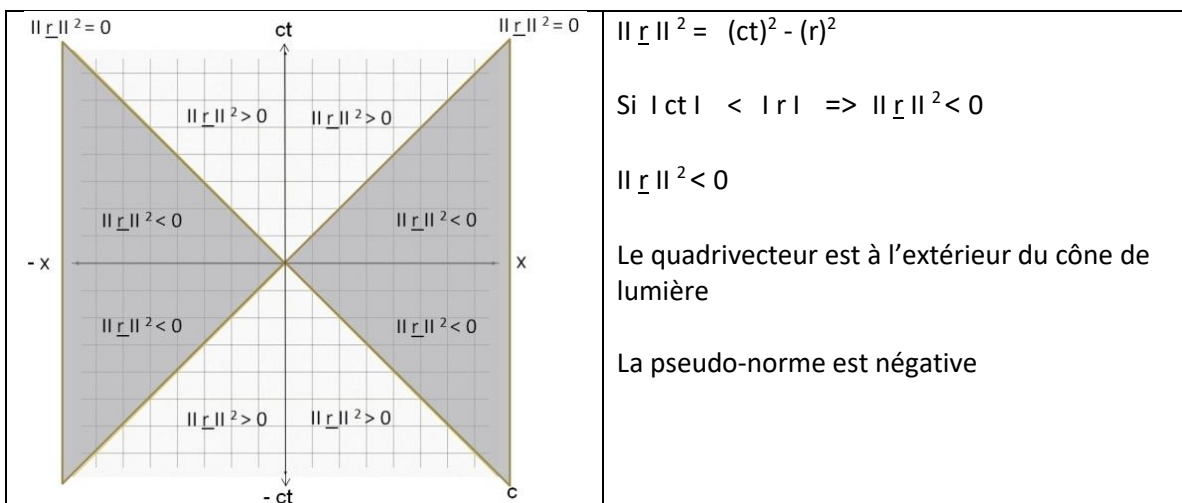
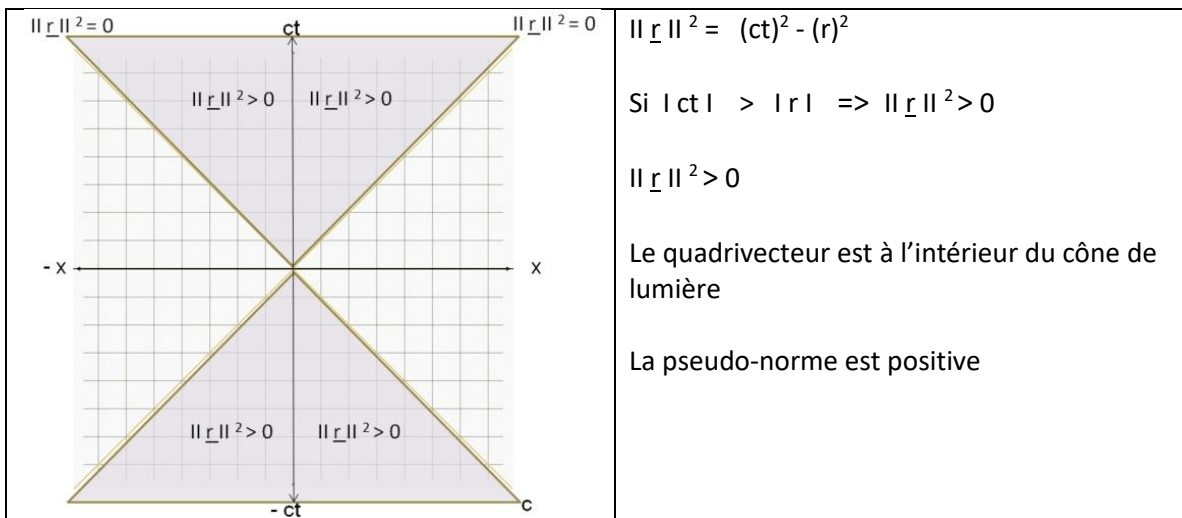
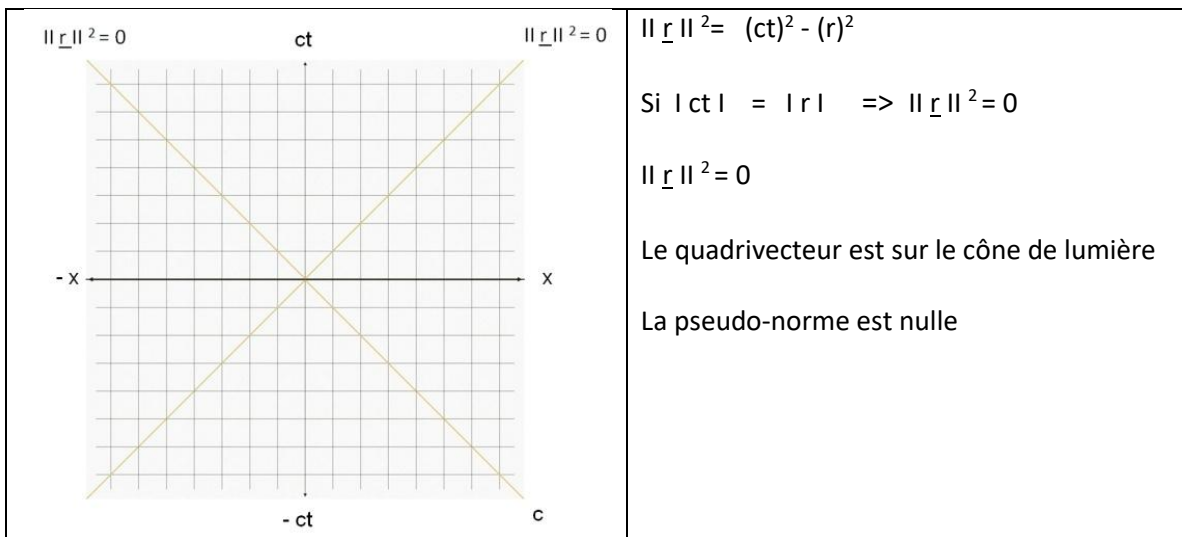


$$y = y' = z = z' = 0$$

$\mathcal{R}$	$ct_a =$	6,3	$x_a =$	5,5
$\mathcal{R}'$	$ct'_a =$	5	$x'_a =$	4

$\mathcal{R}$	$\ \underline{r}\ ^2 =$	$6,1^2 - 5,3^2$	$= 9$
$\mathcal{R}'$	$\ \underline{r}\ ^2 =$	$5^2 - 4^2$	$= 9$
	$\ \underline{r}\ =$	3	

La pseudo-norme de $\underline{r}$ est 3

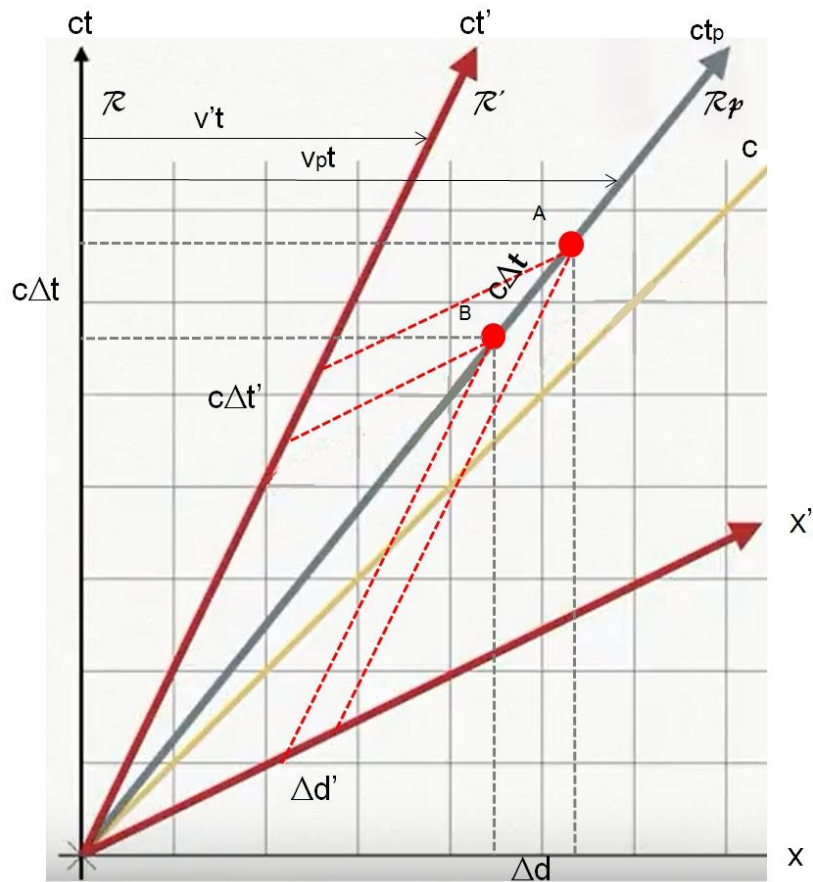


L'intervalle

L'intervalle est la distance spatio-temporelle entre deux événements.

Soit 2 événements A et B

La différence des quadrivecteurs a pour coordonnées la différence des coordonnées.



$$\underline{r}_a = \begin{pmatrix} ct_a \\ x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \quad \underline{r}_b = \begin{pmatrix} ct_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_a - \underline{r}_b = \begin{pmatrix} ct_a \\ x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ct_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct_a - ct_b \\ x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ z_a - z_b \end{pmatrix}$$

La pseudo-norme est

$$\|\underline{r}_a - \underline{r}_b\|^2 = c^2(t_a - t_b)^2 - (x_a - x_b)^2 - (y_a - y_b)^2 - (z_a - z_b)^2$$

$$I \equiv \|\underline{r}_a - \underline{r}_b\|^2 = c^2(\Delta t)^2 - d_{ab}^2$$

I est l'intervalle. Comme I est la pseudo-norme au carré, l'intervalle est un invariant relativiste

Intervalle du **genre temps**

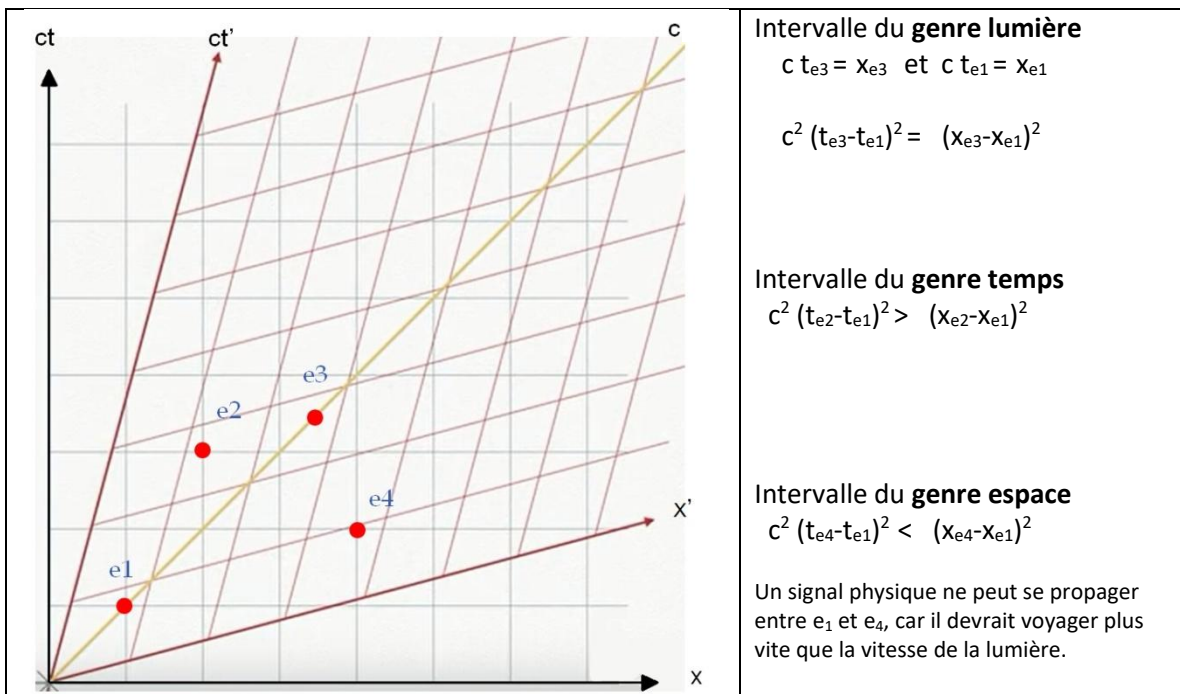
$I > 0$ si $ c \Delta t > d_{ab}$	$ \Delta t > d_{ab}/c$	Le temps qui s'est écoulé entre l'événement A et B est plus grand que le temps qu'il aurait fallu à la lumière pour se rendre de A à B
		Un signal physique peut se propager entre les deux événements
		Les événements pourraient être reliés causalement

Intervalle du **genre espace**

$I < 0$ si $ c \Delta t < d_{ab}$	$ \Delta t < d_{ab}/c$	Le temps qui s'est écoulé entre l'événement A et B est plus petit que la distance divisée par c.
		Un signal physique ne peut se propager entre les deux événements
		Les événements ne peuvent être reliés causalement

Intervalle du **genre lumière**

$I = 0$ si $ c \Delta t = d_{ab}$	$ \Delta t = d_{ab}/c$	Le temps qui s'est écoulé entre l'événement A et B est exactement le temps qu'il faut à la lumière pour se rendre de A à B
------------------------------------	-------------------------	--



La quadri-vitesse (quadrivecteur vitesse)

On recherche une expression pour la vitesse dans l'espace-temps à 4 dimensions qui sera invariante d'un référentiel à l'autre. Examinons la situation suivante : Un référentiel $\mathcal{R}$ et une particule se déplaçant à une vitesse v pour ce référentiel (V_{vpt}) (fig. page 18). Le déplacement de la particule dans son référentiel *propre* est $c (\Delta t_p)$. Pour ce référentiel, la particule ne bouge pas dans l'espace, elle ne se déplace que sur l'axe du temps. $c (\Delta t_p)$ est la distance parcourue pendant le temps Δt_p dans l'espace-temps. Le carré de $c (\Delta t_p)$ est l'intervalle I .

$$I = c^2 (\Delta t_p)^2 - d_p^2$$

$$I = c^2 (\Delta t_p)^2 - 0$$

$$I = c^2 (\Delta t_p)^2$$

Le temps dans un référentiel propre est le *temps propre* τ , donc l'intervalle est

$$I = c^2 (\Delta \tau)^2 \quad \text{la pseudo-norme } (\underline{v}) \text{ de la quadri-vitesse est } \sqrt{c^2 (\Delta \tau)^2 / (\Delta \tau)^2} = c$$

distance / temps = vitesse

De l'équation $I = c^2 (\Delta \tau)^2$ nous pouvons aussi déduire la valeur de τ en fonction de I et de c
 $\Delta \tau = \sqrt{I} / c$

I et c sont des invariants relativistes alors $\Delta \tau$ est un invariant relativiste. L'équation du déplacement de la particule pour le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit ainsi :

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2 (\Delta \tau)^2 = I$$

Divisons la distance parcourue par le temps pour obtenir l'expression de la vitesse.

$$c^2 (\Delta t / \Delta t)^2 - (\Delta x / \Delta t)^2 - (\Delta y / \Delta t)^2 - (\Delta z / \Delta t)^2 \text{ et pour conserver l'égalité, } c^2 (\Delta \tau / \Delta t)^2$$

$$c^2 (\Delta \tau / \Delta t)^2 = c^2 - [(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2]$$

$$c^2 (\Delta \tau / \Delta t)^2 = c^2 - \vec{v}_{pt}^2$$

$$c^2 / \gamma_p^2 = [c^2 - \vec{v}_{pt}^2] \quad \text{de la page 3 : } t = \gamma \tau \Rightarrow \tau / t = 1 / \gamma_p = \sqrt{(1 - \vec{v}_{pt}^2 / c^2)}$$

$$c^2 = \gamma_p^2 [c^2 - \vec{v}_{pt}^2] \quad \gamma_p = 1 / \sqrt{(1 - \vec{v}_{pt}^2 / c^2)} = \cosh(\theta)_p \Rightarrow c^2 = \cosh^2(\theta)_p [c^2 - \vec{v}_{pt}^2]$$

$$c = \sqrt{\gamma_p^2 c^2 - \gamma_p^2 \vec{v}_{pt}^2} \quad \text{est la quadri-vitesse, invariable par changement de référentiel}$$

$$\underline{v} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_p c \\ \gamma_p v_x \\ \gamma_p v_y \\ \gamma_p v_z \end{pmatrix}$$

L'absence de déplacement dans l'espace implique un déplacement à la vitesse c dans la dimension temporelle ($V = 0$ et $\gamma = 1$). Comme la particule dans son référentiel propre.

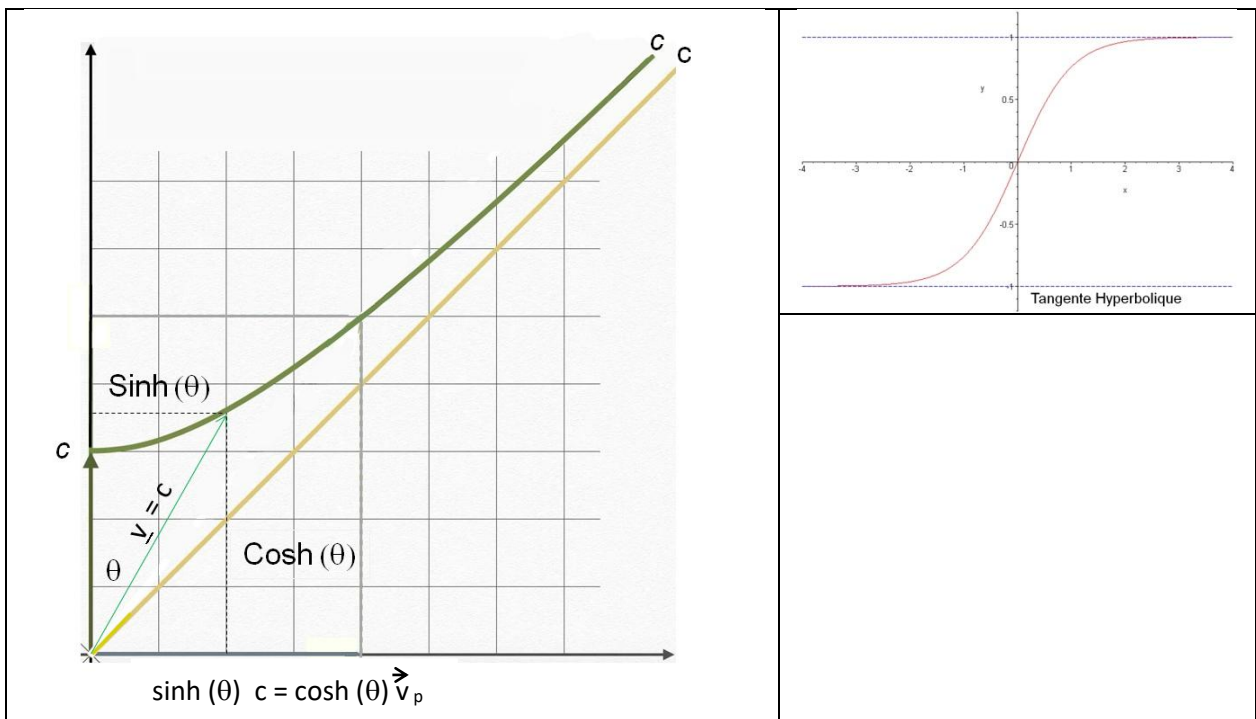
$$\begin{aligned} \|\underline{v}\|^2 &= \underline{v} \cdot \underline{v} \\ &= \gamma_p^2 c^2 - \gamma_p^2 \vec{v}_{pt}^2 \\ &= \gamma_p^2 (c^2 - \vec{v}_{pt}^2) \\ &= c^2 \gamma_p^2 (1 - \vec{v}_{pt}^2 / c^2) \\ &= c^2 \end{aligned}$$

La quadri-vitesse

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \gamma_p c \\ \gamma_p v_x \\ \gamma_p v_y \\ \gamma_p v_z \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta)_p c \\ \cosh(\theta)_p v_x \\ \cosh(\theta)_p v_y \\ \cosh(\theta)_p v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tanh(\theta)_p &= \vec{v}_p / c \\ \tanh(\theta)_p c &= \vec{v}_p \\ \sinh(\theta)_p / \cosh(\theta)_p c &= \vec{v}_p \\ \sinh(\theta)_p c &= \cosh(\theta)_p \vec{v}_p \end{aligned}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta)_p c \\ \cosh(\theta)_p \vec{v}_p \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta)_p c \\ \sinh(\theta)_p c \end{pmatrix}$$



La quadri-quantité de mouvement (quadrivecteur Energie-Impulsion)

$$\underline{p} = m_0 \underline{v}$$

La quadri-quantité de mouvement est la masse multipliée par la quadri-vitesse. $m_0 \equiv$ masse au repos, immobile.

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma_p m_0 c \\ \gamma_p m_0 v_x \\ \gamma_p m_0 v_y \\ \gamma_p m_0 v_z \end{pmatrix} \quad \underline{p} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta)_p m_0 c \\ \cosh(\theta)_p m_0 v_x \\ \cosh(\theta)_p m_0 v_y \\ \cosh(\theta)_p m_0 v_z \end{pmatrix} \quad \underline{p} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta)_p m_0 c \\ \sinh(\theta)_p m_0 c \end{pmatrix}$$

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = m_0^2 c^2 = \|\underline{p}\|^2$$

$$\|\underline{p}\| = m_0 c$$

Lorsque $v = 0$, $\underline{p} = \cosh(\theta) m_0 c \Rightarrow \underline{p} = m_0 c$

$m_0 c$ est la grandeur invariante de la quadri-quantité de mouvement

La composante temporelle de la quantité de mouvement est l'énergie : $\mathbf{P}_{\text{temp.}} = \gamma m_0 c \equiv E/c$
(avec $E = \gamma m_0 c^2$, on divise par c pour que les deux membres de l'équation aient la même dimension)

Énergie-impulsion d'une particule

	$E_{\text{total}}/c = \cosh(\theta) m_0 c \quad E_t = \cosh(\theta) m_0 c^2$ $E_0/c = \cosh(\theta) m_0 c \quad E_0 \text{ particule immobile}$ $\cosh(\theta) = 1 \text{ pour une particule immobile}$ $E_0/c = m_0 c \quad \textbf{Énergie au repos}$ $E_0 = m_0 c^2 \quad \text{Appelée énergie de masse}$ $\vec{P} = \sinh(\theta) m_0 c$ $\sinh(\theta) c = \gamma_p \beta_p c$ $= \gamma_p \vec{v}_p / c * c$ $= \gamma_p \vec{v}_p$ $= \cosh(\theta) \vec{v}$ $\vec{P} = \gamma_p m_0 \vec{v}$ $\vec{P} = \cosh(\theta) m_0 \vec{v}$
$E_{\text{total}} = E_0 + E_k$ $E_t = \cosh(\theta) m_0 c^2$ $E_0 + E_k = \cosh(\theta) m_0 c^2$ $E_k = \cosh(\theta) m_0 c^2 - m_0 c^2$ $E_k = m_0 c^2 (\cosh(\theta) - 1) \quad \textbf{Énergie cinétique}$	$m_0^2 c^2 = (E_t/c)^2 - P^2$ $(E_t/c)^2 = m_0^2 c^2 + P^2$ $E_t^2 = m_0^2 c^4 + P^2 c^2$ $E_t^2 = c^2 (m_0^2 c^2 + P^2)$

L'impulsion est due au déplacement de la particule dans la dimension spatiale.

Si on fournit de l'énergie à la particule, on augmente sa quadri-quantité de mouvement. Cet apport accroît l'énergie cinétique. Si l'on examine l'hyperbole, on voit que près de la vitesse de la lumière, l'apport d'énergie augmente peu la vitesse de la particule, même avec beaucoup d'énergie.

- La quadri-quantité de mouvement est conservée au cours des interactions, des chocs.
 $\underline{p}$ après = $\underline{p}$ avant
- Le produit scalaire de quadrivecteurs est invariant. Il est le même dans tous les référentiels. Invariant par changement de référentiel.

Quadrivecteur Energie-Impulsion pour une particule de masse nulle, mais d'énergie finie

Le photon n'a pas de masse, mais il véhicule de l'énergie. $E \neq 0$, $m_0 = 0$

$E = \cosh(\theta) m_0 c^2$ $\cosh(\theta)$ tend vers l'infini et la masse est nulle, nous avons une forme indéterminée. Cette équation ne s'applique pas pour le photon.

Abordons une écriture plus générale de l'équation du Quadrivecteur Energie-Impulsion

En partant de $E/c^2 = \cosh(\theta) m_0 = \gamma_p m_0$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma_p m_0 c \\ \gamma_p m_0 v_x \\ \gamma_p m_0 v_y \\ \gamma_p m_0 v_z \end{pmatrix} \qquad \underline{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ E/c \, v_x/c \\ E/c \, v_y/c \\ E/c \, v_z/c \end{pmatrix}$$

Le photon se déplace à la vitesse c , la norme de v_x/c , v_y/c , v_z/c vaut 1.

Pour $v = c$, $m_0 = 0$, déplacement sur l'axe Ox à la vitesse c

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ E/c \, v_x/c \\ E/c \, 0 \\ E/c \, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ E/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La quantité de mouvement est non nulle. Un photon, lors d'une collision, va occasionner un mouvement de recul que nous appelons *pression de radiation*.

$E = hf$ constante de Plank multipliée par la fréquence de l'onde lumineuse

$$\vec{p} = E/c = hf/c$$

$\vec{p} = h \vec{k}$ constante de Plank divisée par la longueur d'onde de l'onde lumineuse

Le temps pour une particule de masse nulle

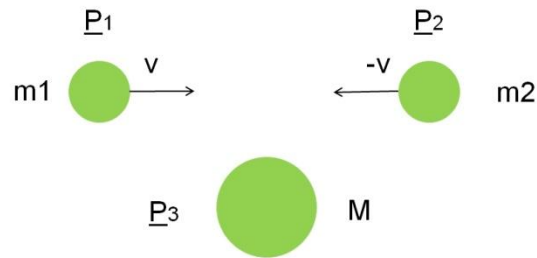
$$t = \gamma \tau = \tau * 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \text{ où } v = c \Rightarrow t = \tau/0 \Rightarrow t \cdot 0 = \tau \Rightarrow \tau = 0$$

$$t = 0$$

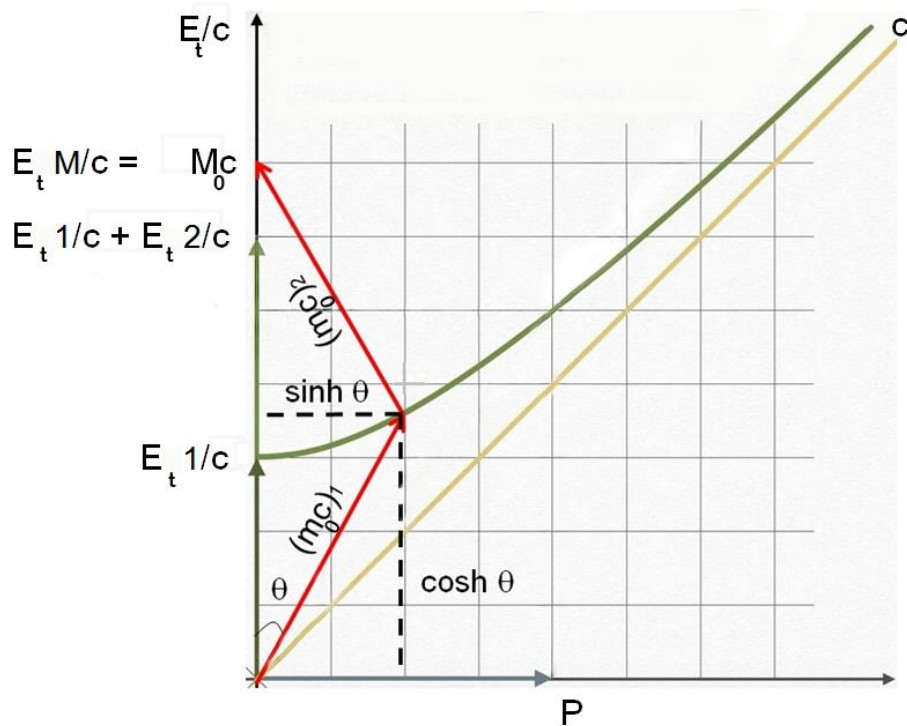
Pour un observateur, le temps d'une particule voyageant à la vitesse « c » est figé.

C'est pour cela que le photon est stable, il n'a pas de durée de demi-vie.

Collision inélastique



Deux particules identiques de masse m égale qui entrent en collision. Les vitesses sont identiques, mais de sens inverse. La collision est inélastique, on obtient une nouvelle particule immobile de masse M . On prend comme référentiel celui de la masse M .



Le total de quadri-quantité de mouvement est conservé. $\underline{p}_3$ sera égal à la somme de $\underline{p}_1 + \underline{p}_2$

$$\begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \cosh(\theta) m_0 c \\ \sinh(\theta) m_0 c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_2 \\ \cosh(\theta) m_0 c \\ -\sinh(\theta) m_0 c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{p}_3 \\ M_0 c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \cosh(\theta) m_0 c = M_0 c$$

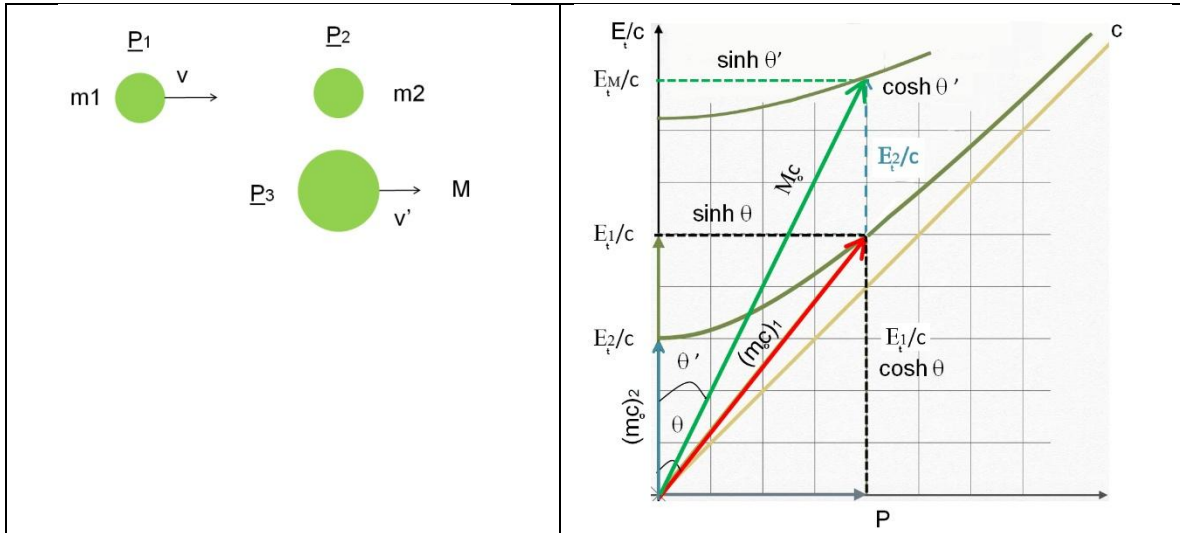
$$\cosh(\theta) 2 m_0 = M_0 \quad \text{M sera plus grande que la somme des 2 masses } m \text{ d'un facteur } \cosh(\theta)$$

Toute l'énergie cinétique des particules est transformée en énergie de masse, en matière.

Au « Grand collisionneur de hadrons (LHC) » en Europe, ils se servent de ce type de collision pour créer des particules. Ce qui a permis de trouver le boson de Higgs.

Choc mou entre 2 particules de même masse

Deux particules identiques de masse m égale qui entrent en collision. On prend comme référentiel celui de la masse m_2 . m_2 est donc immobile. La vitesse de m_1 est égale à v et est sur l'axe x vers la particule m_2 . La collision est un choc mou, on obtient une nouvelle particule de masse M avec une certaine énergie cinétique par rapport au référentiel de m_2 .



Le total de quadri-quantité de mouvement est conservé. $\underline{P}_3$ sera égal à la somme de $\underline{P}_1 + \underline{P}_2$

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \cosh(\theta) m_0 c \\ \sinh(\theta) m_0 c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{P}_2 \\ m_0 c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_3 \\ \cosh(\theta') M_0 c \\ \sinh(\theta') M_0 c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_1 + \underline{P}_2 \\ m_0 c (\cosh(\theta) + 1) \\ m_0 c \sinh(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_3 \\ \cosh(\theta') M_0 c \\ \sinh(\theta') M_0 c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t / c \\ P \end{bmatrix}$$

Le but de ce qui va suivre est d'isoler M .

$$\begin{bmatrix} m_0 (\cosh(\theta) + 1) \\ m_0 \sinh(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta') M_0 \\ \sinh(\theta') M_0 \end{bmatrix}$$

Soustraire le carré de la dimension temporelle du carré de la dimension spatiale pour obtenir le carré de la pseudo-norme de la quadri-quantité de mouvement

$$(E_t/c)^2 - P^2 = m_0^2 c^2$$

$$\begin{aligned} & [m_0^2 (\cosh^2(\theta) + 1 + 2 \cosh(\theta))] - [m_0^2 \sinh^2(\theta)] \\ & m_0^2 (\cosh^2(\theta) + 1 + 2 \cosh(\theta) - \sinh^2(\theta)) \\ & m_0^2 (1 + 1 + 2 \cosh(\theta)) \end{aligned}$$

sachant que : $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1$

$$m_0^2 (2 + 2 \cosh(\theta)) = \cosh^2(\theta') M_0^2 - \sinh^2(\theta') M_0^2$$

$$m_0^2 (2 + 2 \cosh(\theta)) = M_0^2 (\cosh^2(\theta') - \sinh^2(\theta'))$$

$$m_0^2 (2 + 2 \cosh(\theta)) = M_0^2$$

$$m_0 \sqrt{2 + 2 \cosh(\theta)} = M_0$$

$$M_0 = m_0 \sqrt{2(1 + \cosh(\theta))}$$

$\sinh(\theta) m_0 c = \sinh(\theta') M_0 c$ implique $\cosh(\theta) m_0 v = \cosh(\theta') M_0 v'$ l'impulsion est identique

L'énergie de $\underline{P}_1 > \underline{P}_2$, mais l'énergie de masse E_0 est identique. L'excédent est dans l'énergie cinétique de $\underline{P}_1$.

Si $v \ll c$ $\cosh(\theta) \simeq 1 \Rightarrow M_0 = 2m_0$

$$M_0 \geq 2m_0$$

Une partie de l'énergie fournie se retrouve en énergie cinétique de la masse M . Ce n'est pas toute l'énergie fournie qui est transformée en masse.

Note sur les conventions de signature

Dans tout le présent document, nous adoptons la métrique de Minkowski à signature (+ ---) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Certains auteurs — en particulier les manuels de physique anglophones tels que *Spacetime Physics* (Taylor & Wheeler) ou *Gravitation* (Misner, Thorne & Wheeler) — préfèrent la convention (−+++):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1).$$

Les deux signatures sont mathématiquement équivalentes ; elles décrivent la même géométrie de l'espace-temps. Pour passer de l'une à l'autre, il suffit d'inverser le signe de la métrique et de tous les produits scalaires (par exemple : $p^2 = p_\mu p^\mu$). Les résultats physiques, tels que la valeur de l'intervalle invariant ou les lois de conservation de la quadri-impulsion, restent inchangés ; seul le placement des signes dans les formules varie.

Le choix (+ ---) est fait ici pour rester cohérent avec la majorité des cours francophones, mais le lecteur habitué à la signature (−+++) peut traduire chaque équation en multipliant simplement ds^2 et la métrique $\eta_{\mu\nu}$ par -1 .

Conclusion

En définitive, la relativité restreinte transforme en profondeur notre vision de l'espace et du temps en montrant que ces deux notions, autrefois considérées comme absolues, s'unissent dans un continuum à quatre dimensions où seule l'intervalle spatio-temporel demeure invariant. Partant de deux postulats simples — l'invariance de la vitesse de la lumière et l'équivalence des référentiels inertiels — nous avons mis en évidence :

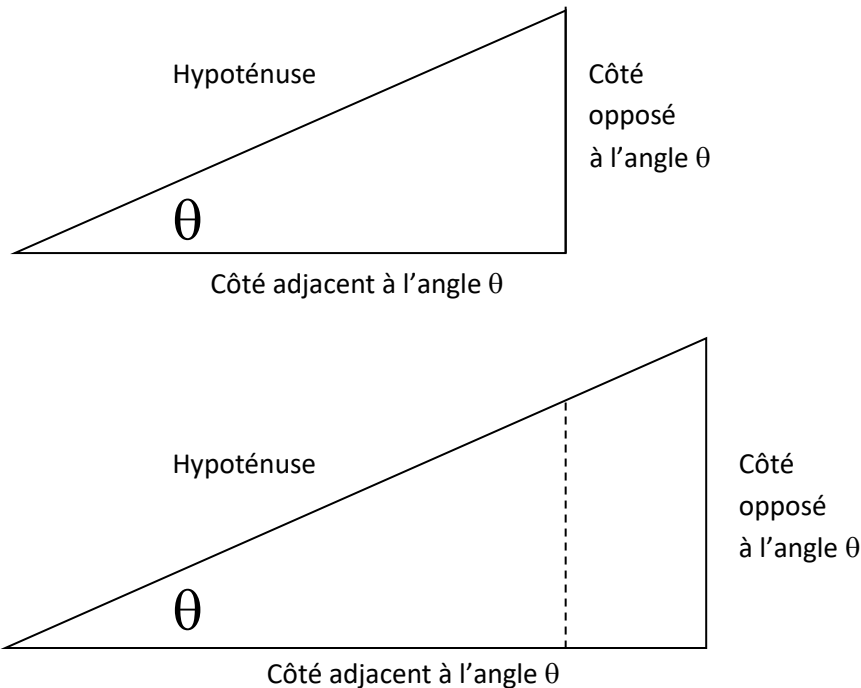
- la **dilatation du temps**, responsable du ralentissement des horloges en mouvement,
- la **contraction des longueurs**, expliquant la réduction apparente des objets en translation,
- le **formalisme quadrivectoriel**, qui unifie vitesse, position et quantité de mouvement dans des objets géométriques conservés par les transformations de Lorentz,
- et les **conséquences physiques** pour les particules massives ou sans masse, ainsi que pour les processus de collision.

Ce cadre, validé par de nombreuses expériences, constitue le socle de la physique moderne et prépare naturellement le passage à la relativité générale, où la géométrie de l'espace-temps devient dynamique. Au-delà de sa portée théorique, les principes de la relativité restreinte s'inscrivent au cœur des technologies d'aujourd'hui — du GPS aux accélérateurs de particules — et irriguent toutes les disciplines physiques.

Ainsi, loin d'être une simple « correction » à la mécanique classique, la relativité restreinte offre un nouveau paradigme indispensable pour comprendre l'Univers à grande vitesse et jette les bases de nos explorations futures, de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

Annexe 1

Trigonométrie à partir d'un triangle rectangle



Pour un triangle rectangle, quelle que soit la grandeur du triangle, le rapport entre les différents côtés semblables est toujours égal pour un même angle. C'est-à-dire :

Le rapport du « *Côté adjacent/Hypoténuse* » est appelé **Cosinus de θ** . Il a toujours la même valeur quelle que soit la grandeur du triangle, ceci pour un même angle θ .

Le rapport du « *Côté opposé/Hypoténuse* » est appelé **Sinus de θ** . Il a toujours la même valeur quelle que soit la grandeur du triangle, ceci pour un même angle θ .

Le rapport du « *Côté opposé/Côté adjacent* » est appelé **Tangente de θ** . Il a toujours la même valeur quelle que soit la grandeur du triangle, ceci pour un même angle θ .

Remarque : **Sinus θ /Cosinus θ** égale

Côté opposé/Hypoténuse divisé par *Côté adjacent/Hypoténuse*

Côté opposé/Côté adjacent

Tangente de θ

Les fonctions inverses

$\cos(\theta) = x$ implique que nous connaissons l'angle et que nous cherchons x .

Dans différentes situations c'est l'inverse qui se présente; nous connaissons x et nous cherchons l'angle θ .

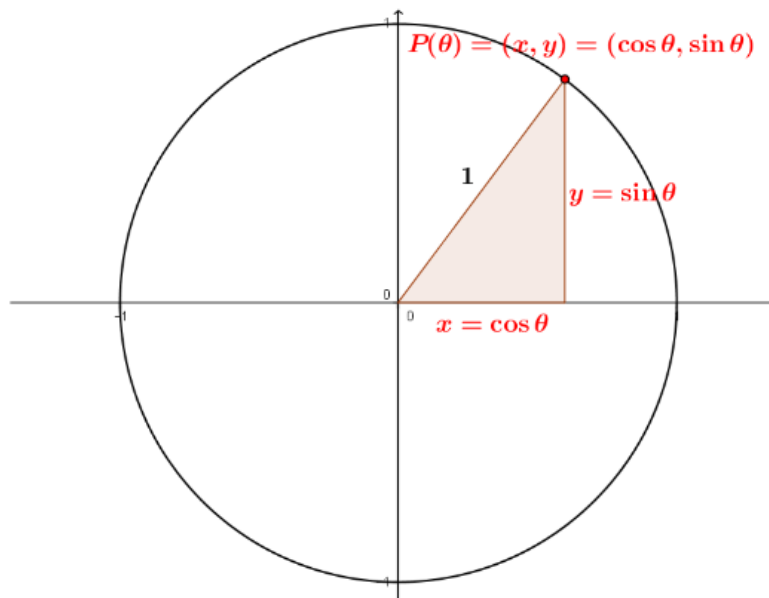
Les fonctions inverses sont celles-ci et elles peuvent s'écrire sous différentes formes :

arcsinus	ou asin	ou $\sin^{-1}$
arcosinus	ou acos	ou $\cos^{-1}$
arctangente	ou atan	ou $\tan^{-1}$

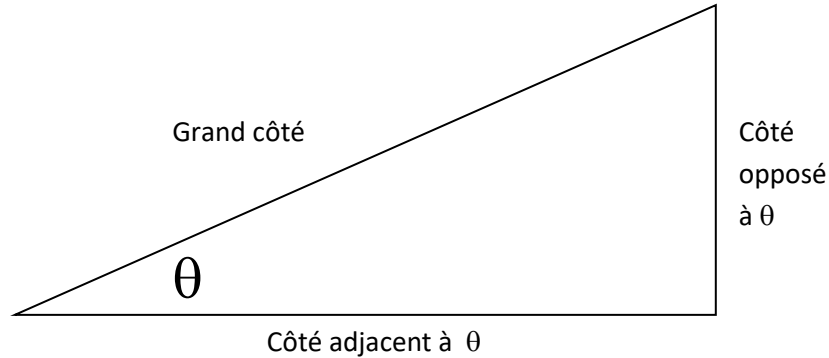
Équation pratique :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Le triangle rectangle traité ici, peut être vu comme un triangle qui évolue dans un cercle de rayon « 1 » où r est l'hypoténuse du triangle.



Trigonométrie hyperbolique



La trigonométrie hyperbolique est semblable, sans représenter la même chose que la trigonométrie du triangle rectangle qui évolue dans un cercle. C'est un triangle rectangle qui évolue selon une fonction hyperbolique. Pour ce triangle rectangle, quelle que soit la grandeur du triangle, le rapport entre les différents côtés semblables est toujours égal pour un même θ .

Le rapport du « *Côté adjacent*/Grand côté » est appelé **Cosinush de θ** . Il a toujours la même valeur quelle que soit la grandeur du triangle, ceci pour un même θ .

Le rapport du « *Côté opposé*/Grand côté » est appelé **Sinush de θ** . Il a toujours la même valeur quelle que soit la grandeur du triangle, ceci pour un même θ .

Le rapport du « *Côté opposé*/*Côté adjacent* » est appelé **Tangenth de θ** . Il a toujours la même valeur quelle que soit la grandeur du triangle, ceci pour un même θ .

Remarque **Sinush θ /Cosinush θ** égale

Côté opposé/Grand côté divisé par *Côté adjacent*/Grand côté

Côté opposé/*Côté adjacent*

Tangenth de θ

Équation pratique :

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

x	0		$+\infty$
cosh x	1	$\nearrow$	$+\infty$
sinh x	0	$\nearrow$	$+\infty$
tanh x	0	$\nearrow$	+1
coth x	$+\infty$	$\searrow$	+1

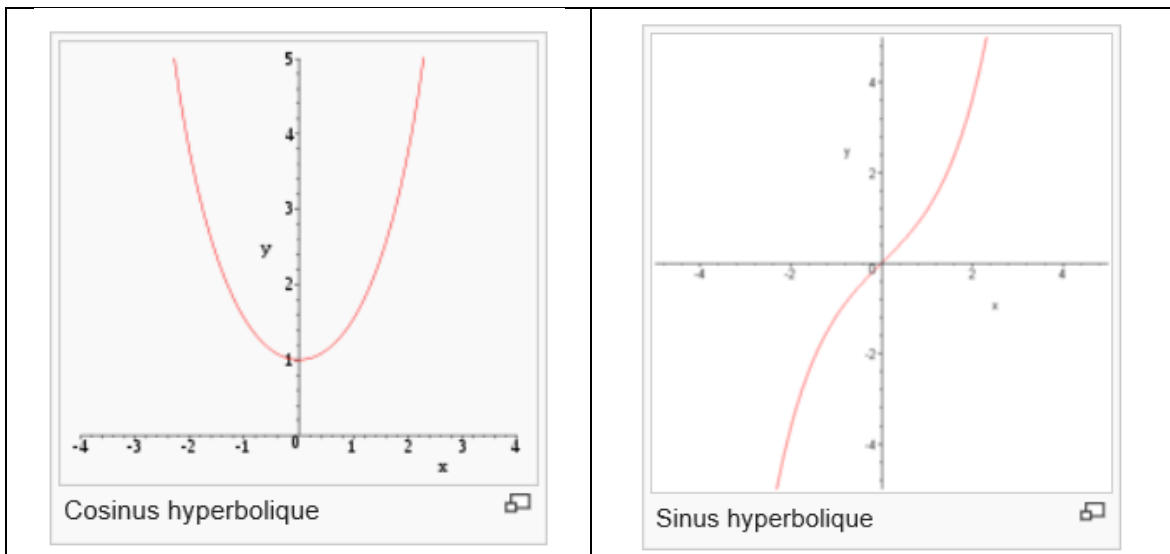
Les fonctions inverses

$\cosh(\theta) = x$ implique que nous connaissons l'angle et que nous cherchons x .

Dans différentes situations c'est l'inverse qui se présente; nous connaissons x et nous cherchons l'angle θ .

Les fonctions inverses sont celles-ci et elles peuvent s'écrire sous différentes formes :

arc sinus hyperbolique	ou asinh	ou $\sinh^{-1}$
arc cosinus hyperbolique	ou acosh	ou $\cosh^{-1}$
arc tangente hyperbolique	ou atanh	ou $\tanh^{-1}$



Détails mathématiques

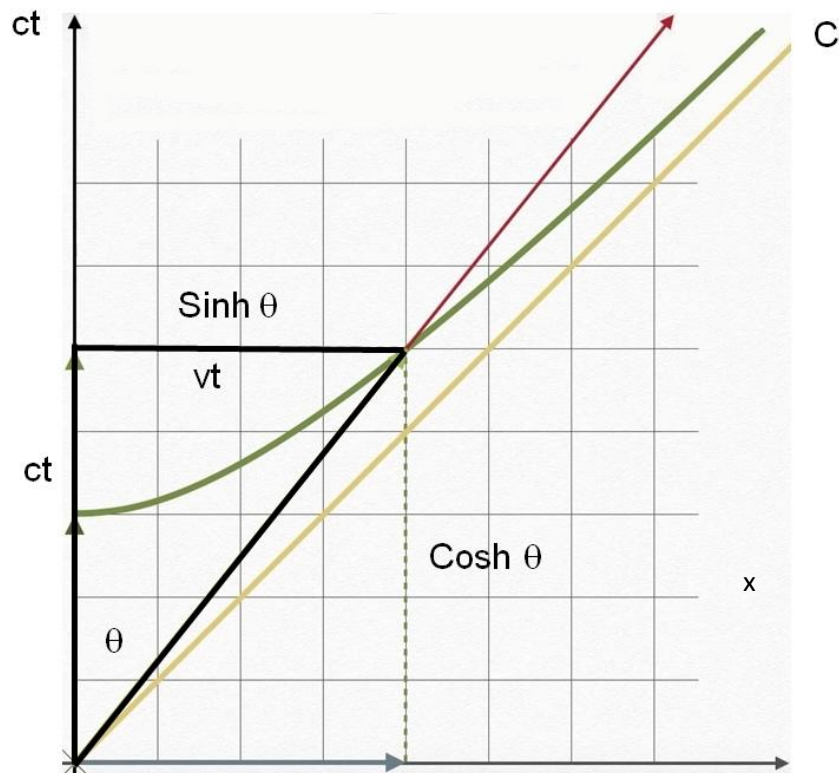
Q6 Les fonctions hyperboliques et réciproques :

<https://www.youtube.com/watch?v=JrfY9TREQaA>

Fonctions hyperboliques et hyperbole unitaire

<https://www.youtube.com/watch?v=JKCGf8SNQ>

Trigonométrie hyperbolique appliquée à la relativité restreinte



$$\sinh \theta = vt$$

$$\cosh \theta = ct$$

$$\tanh \theta = \sinh \theta / \cosh \theta$$

$$\tanh \theta = vt / ct$$

$$\tanh \theta = v / c$$

Pour obtenir θ , faire la fonction inverse de $\tanh \theta = v / c$: **$\operatorname{atanh}(v/c)$**

$$\theta = \operatorname{atanh}(v/c)$$

θ est défini comme le paramètre angulaire de vitesse relativiste. Ce paramètre θ est appelé **paramètre de rapidité** ou **rapidité hyperbolique**.

Le triangle change en fonction de v .

$\cosh \theta$ vaut 1 quand la vitesse est nulle (côté adjacent = grand côté).

Plus v augmente, plus $\cosh \theta$ augmente, ceci vers l'infini.

Annexe 2

Transformation de Lorentz

$$\gamma \equiv 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \quad \beta \equiv v/c$$

$$\cosh(\theta) = \gamma \quad \tanh(\theta) = v/c \quad \beta = \tanh(\theta) \quad (\theta) = \operatorname{atanh}(v/c)$$

$$\beta \gamma = \tanh(\theta) * \cosh(\theta) \quad \tanh(\theta) = \sinh(\theta) / \cosh(\theta)$$

$$\beta \gamma = \sinh(\theta) / \cosh(\theta) * \cosh(\theta)$$

$$\beta \gamma = \sinh(\theta)$$

$$\mathcal{R} \mathcal{R}' \rightarrow v$$

$ct = \cosh(\theta) ct' + \sinh(\theta) x'$	$ct = \gamma ct' + \beta \gamma x'$
$x = \sinh(\theta) ct' + \cosh(\theta) x'$	$x = \beta \gamma ct' + \gamma x'$
$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \gamma \\ \beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$

$$-v \leftarrow \mathcal{R} \mathcal{R}'$$

La vitesse étant négative β est négatif (inversion de la matrice)

$ct' = \cosh(\theta) ct - \sinh(\theta) x$	$ct' = \gamma ct - \beta \gamma x$
$x' = -\sinh(\theta) ct + \cosh(\theta) x$	$x' = -\beta \gamma ct + \gamma x$
$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma \\ -\beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

Références :

Introduction à la relativité restreinte

Université de Grenoble, Richard Taillet

<https://videos.univ-grenoble-alpes.fr/la-formation/447-introduction-la-relativite-restreinte/>

Relativité restreinte : l'espace qui fabrique du temps

<https://www.youtube.com/watch?v=jSy3EsPW1IY&index=10&list=PL1m96--TUxs5Pw2GSBJLP4X2n0qDPI-HE>

Relativité restreinte 2 : composition des vitesses et causalité

<https://www.youtube.com/watch?v=tlsvgfi3Gf4&feature=youtu.be>

Relativité restreinte 3 : dilatation du temps et paradoxe des jumeaux

https://www.youtube.com/watch?v=-PW_jxLDIP4

Relativité restreinte 4 : transformations de Lorentz

<https://www.youtube.com/watch?v=HfRGUGCkkHk>

Relativité restreinte 5 : hyperboles

<https://www.youtube.com/watch?v=omKgmTK66s>

Relativité restreinte 6 : de la quantité de mouvement à $E=mc^2$

<https://www.youtube.com/watch?v=Re5ntKoVDjU>

L'explication des effets relativistes à l'aide de l'espace-temps

https://www.youtube.com/watch?v=iES6NByddo&list=PLrfG_Hi1Epg6F-O9ugl6lmZ47iSKAN2EI&index=7

Le temps comme 4^e dimension et le concept d'espace-temps

https://www.youtube.com/watch?v=mL1H-Psxf3U&list=PLrfG_Hi1Epg6F-O9ugl6lmZ47iSKAN2EI&index=8

Pourquoi les effets sont-ils inversés dans nos animations ?

https://www.youtube.com/watch?v=KaTWw7a6TyQ&list=PLrfG_Hi1Epg6F-O9ugl6lmZ47iSKAN2EI&index=9

Le ralentissement du temps et la contraction des longueurs.

https://www.youtube.com/watch?v=7Oz1jXfBylo&index=10&list=PLrfG_Hi1Epg6F-O9ugl6lmZ47iSKAN2EI

La relativité animée

<http://espace.cegepmontpetit.ca/relativite-animee/> (flash)

La relativité animée : Module interactif

<http://espace.cegepmontpetit.ca/relativite-animee/Animation.html>

Relativité restreinte

https://fr.wikipedia.org/wiki/Relativit%C3%A9_restreinte

Transformations de Lorentz

https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformations_de_Lorentz

Formulaire de relativité restreinte

https://fr.wikipedia.org/wiki/Formulaire_de_relativ%C3%A9_restreinte

Espace de Minkowski

https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_de_Minkowski

Fonction hyperbolique

https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_hyperbolique

Relativité restreinte base et applications

Claude Semay, Bernard Silvestre-Brac

Enseigner la relativité restreinte en CPGE : une approche graphique

Éric Gourgoulhon

http://relativite.obspm.fr/relat_cpge.pdf