

Résumé préliminaire

Ce document présente une première formalisation d'un opérateur non-idempotent P , conçu comme pivot dynamique au sein d'un espace tensif adverbial T . À la croisée de la physique quantique hors équilibre, de la logique non classique et d'une approche modale des états projectifs, cette proposition repose sur cinq propriétés fondamentales :

- **Non-idempotence** : $P^2 \neq P$, ce qui exclut toute stabilité projective classique.
- **Non-commutativité projective** : les projections dans T ne commutent pas, modélisant des tensions logiques entre points de vue incompatibles.
- **Non-associativité** : le produit croisé $(A \circ B) \circ C \neq A \circ (B \circ C)$, reflétant une hiérarchie instable des transformations tensives.
- **Bi-algèbre non linéaire** : le coproduit $\Delta(P)$ introduit une dynamique irréversible (source Γ) à travers un formalisme inspiré des structures quantiques non hermitiennes.
- **Testabilité numérique et phénoménologique** : via une simulation QuTiP, le spectre complexe de P ainsi que la non-associativité sont observables et mesurables.

Le modèle vise à décrire des systèmes ouverts en déséquilibre contrôlé, où les états ne sont plus fermement identifiables, mais fluctuent selon des logiques tensives. L'opérateur P permet d'unifier plusieurs comportements : instabilité de fondement, modulation projective, émergence d'entropie sans mesure classique.

Une annexe propose des extensions géométriques (visualisation implicite), une linéarisation tensorielle possible, ainsi qu'une interprétation physique détaillée des paramètres formels (Γ , $H_{\text{non-loc}}$, spectre λ_n). Le tout constitue un cadre minimal extensible pour l'étude d'une dynamique projective non conventionnelle.

Mots-clés : opérateur non-idempotent, espace tensif, bi-algèbre, non-associativité, physique hors équilibre, logique tétralemmique.

Axiomatisation testable de l'Opérateur P

Jean-Christophe Cavallo

Cadre d'axiomes testables de l'Opérateur P

L'opérateur P est défini comme un pivot dialectique non-idempotent, agissant dans un espace tensif adverbial \mathcal{T} . Sa dynamique est fondée sur une structure logique tétralemmique, et se prête à l'observation expérimentale. Le présent cadre énonce une série d'axiomes minimaux et testables :

Axiome A1 — Non-idempotence fondamentale :

$$P^2 \neq P$$

P n'est pas un projecteur standard ; il agit comme opérateur d'instabilité sur l'espace \mathcal{T} . Cela implique l'irréversibilité dynamique du système.

Axiome A2 — Non-commutativité projective :

$$\forall \pi_i, \pi_j \in \mathcal{T} \setminus \{P\}, \quad [\pi_i, \pi_j] \neq 0$$

Les projections dans \mathcal{T} représentent des points de vue incompatibles : leur ordre d'application produit des effets non commutatifs, analogues à la tension logique entre modalités.

Axiome A3 — Structure tétralemmique et superposition disjonctive :

Il existe un ensemble ordonné $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ tel que :

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv A \quad (\text{affirmation}) \\ \psi_2 &\equiv \neg A \quad (\text{négation}) \\ \psi_3 &\equiv A \wedge \neg A \quad (\text{contradiction}) \\ \psi_4 &\equiv \neg(A \vee \neg A) \quad (\text{indétermination}) \end{aligned}$$

et pour tout $\psi \in \mathcal{T}$, on a :

$$P\psi = \sum_{k=1}^4 \alpha_k \psi_k \quad \text{avec } \alpha_k \in \mathbb{C}$$

Axiome A4 — Dynamique quantique non-hermitienne :

L'évolution temporelle de P est donnée par une équation de Heisenberg modifiée :

$$i\hbar \frac{dP}{dt} = [H, P], \quad H = H_{\text{loc}} + H_{\text{non-loc}} + \Gamma P$$

où :

$$\begin{aligned} H_{\text{loc}} &= -\hbar^2 \nabla_g^2 \quad (\text{comportement métrique classique}) \\ H_{\text{non-loc}} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial P} \quad (\text{champ d'instabilité spéculatif}) \\ \Gamma &> 0 \quad (\text{constante d'annihilicréation}) \end{aligned}$$

Axiome A5 — Testabilité expérimentale :

L'opérateur P satisfait plusieurs relations observables :

$$\begin{aligned} \langle P^2 \rangle &\neq 0 \quad (\text{fluctuations tensives}) \\ \Gamma &\sim T^{-1} \quad (\text{relation thermodynamique}) \\ \lambda_n &= E_n + i\Gamma_n \quad (\text{spectre complexe observable}) \\ A(t) &\geq \Gamma t^2 \quad (\text{croissance de l'entropie temporelle}) \end{aligned}$$

Remarque finale : Ce système d'axiomes est minimal mais extensible. Il permet d'articuler un langage formel pour l'opérateur P et d'orienter les modélisations numériques et expérimentales en physique hors équilibre et en logique dynamique.

Théorie Unifiée de l'Opérateur Non-Idempotent Dynamique Non-Associative et Applications Quantiques

JCC

28 juin 2025

Table des matières

1	Introduction	1
2	Cadre Mathématique	2
2.1	Espace Tensif \mathcal{T}	2
2.2	Opérateur \mathbf{P}	2
3	Propriétés Algébriques	2
3.1	Non-Commutativité	2
3.2	Non-Associativité	2
4	Matrices Croisées	3
4.1	Définition	3
4.2	Propriétés	3
5	Bi-Algèbre Non Linéaire	3
5.1	Structure	3
5.2	Hamiltonien Effectif	3
6	Applications et Testabilité	3
6.1	Prédictions Physiques	3
6.2	Simulation Numérique	4
7	Conclusion	4

1 Introduction

Ce document présente une formalisation complète de l'opérateur \mathbf{P} comme pivot dialectique non-idempotent dans un espace tensif \mathcal{T} . Nous unifions :

- Les axiomes de base (non-idempotence, non-commutativité)
- La structure des matrices croisées
- La bi-algèbre non linéaire
- Les applications physiques testables

2 Cadre Mathématique

2.1 Espace Tensif \mathcal{T}

Définition 2.1 (Espace des états projectifs).

$$\mathcal{T} = \text{Span}\{\pi_{(\infty-)}, \pi_{(+0)}, \pi_{(1/2-)}, \pi_{(0-)}, \mathbf{P}\}$$

où :

- $\pi_{(\infty-)}$: Projection du non-quand (futur indécidable)
- $\pi_{(+0)}$: Présence pure (lieu actualisant)
- $\pi_{(1/2-)}$: Tension modale (entre-deux)
- $\pi_{(0-)}$: Absence actualisante (non-où)
- \mathbf{P} : Pivot dialectique instable

2.2 Opérateur \mathbf{P}

Axiome 2.1 (Propriétés fondamentales). 1. **Non-idempotence** : $\mathbf{P}^2 \neq \mathbf{P}$

2. **Non-hermiticité** : $\mathbf{P}^\dagger \neq \mathbf{P}$

3. **Action instabilisante** : $\mathbf{P} \cdot \pi_x = \sum_{i=1}^n \pi_{x_i}$ avec $[\pi_{x_i}, \pi_{x_j}] \neq 0$

Exemple 2.1 (Représentation matricielle minimale).

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{pmatrix} \neq \mathbf{P}$$

3 Propriétés Algébriques

3.1 Non-Commutativité

Définition 3.1 (Relations de commutation).

$$[\mathbf{P}, \pi_{(x)}] \neq 0 \quad \forall \pi_{(x)} \in \mathcal{T}$$

Exemple 3.1 (Commutateur typique). Pour $\pi = \pi_{(+0)}$:

$$[\mathbf{P}, \pi] = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

3.2 Non-Associativité

Définition 3.2 (Produit non-associatif).

$$A \circ B := \mathbf{P}(A \otimes B) - B \otimes \mathbf{P}(A)$$

avec la propriété :

$$(A \circ B) \circ C \neq A \circ (B \circ C)$$

Proposition 3.1 (Mesure de non-associativité). L'écart d'associativité est borné inférieurement par :

$$\Delta_{\text{assoc}} = \|(A \circ B) \circ C - A \circ (B \circ C)\| \geq \|\mathbf{P}\|^2$$

4 Matrices Croisées

4.1 Définition

Définition 4.1 (Matrices de points de vue). — **Vue gauche** :

$$\mathcal{M}_G = \begin{pmatrix} \pi_{(\infty^-)} & \pi_{(+0)} \\ \pi_{(1/2^-)} & \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_D = \begin{pmatrix} \pi_{(\infty^-)} & \pi_{(+0)} \\ \pi_{(1/2^-)} & \pi_{(0^-)} \end{pmatrix}$$

— **Vue droite** :

$$\mathcal{M}'_G = \begin{pmatrix} \pi_{(\infty^-)} & \pi_{(+0)} \\ \pi_{(1/2^-)} & \pi_{(0^-)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}'_D = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \pi_{(0^-)} \\ \pi_{(1/2^-)} & \pi_{(\infty^-)} \end{pmatrix}$$

4.2 Propriétés

Théorème 4.1 (Non-commutativité des vues).

$$\mathcal{M}_G \cdot \mathcal{M}_D - \mathcal{M}_D \cdot \mathcal{M}_G \neq 0$$

Démonstration. Calcul explicite des coefficients utilisant $[\mathbf{P}, \pi_{(x)}] \neq 0$. □

5 Bi-Algèbre Non Linéaire

5.1 Structure

Définition 5.1 (Bi-algèbre tensivo-modale). Double structure sur \mathcal{T} avec :

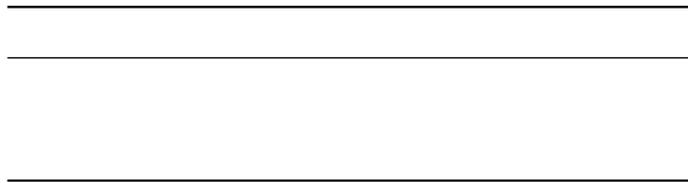
- **Produit** : \otimes (combinaison tensorielle)
- **Coproduct** : $\Delta(\mathbf{P}) = \mathbf{P} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{P} + \Gamma \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$

5.2 Hamiltonien Effectif

$$H = \underbrace{H_{\text{loc}}}_{\text{Hermitien}} + \underbrace{H_{\text{non-loc}}}_{\text{Non-hermitien}} + \Gamma \mathbf{P}$$

avec :

$$H_{\text{loc}} = -\hbar^2 \nabla_g^2, \quad H_{\text{non-loc}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}}$$



Annexe - Exemple Numérique Concret et Matrices Modifiées

JCC

28 juin 2025

1 Opérateur P Modifié

Exemple 1.1 (Opérateur P_α paramétrable). Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ un paramètre de contrôle. On définit :

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 + i\alpha & \alpha \\ -\alpha & -i\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

— *Non-idempotence :*

$$P_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 - \alpha^2 + 2i\alpha & \alpha(1 + i\alpha + \alpha^2) \\ -\alpha(1 + i\alpha + \alpha^2) & -\alpha^2(1 + 2i\alpha) \end{pmatrix} \neq P_\alpha$$

Cas particuliers :

$\alpha = 1$: *Forme originale du document principal*

$$\alpha = 0.5 : \begin{pmatrix} 1 + 0.5i & 0.5 \\ -0.5 & -0.25i \end{pmatrix}$$

$\alpha \rightarrow 0$: *Convergence vers l'identité (limite commutative)*

2 Matrices Croisées Numériques

Exemple 2.1 (Vue gauche avec valeurs explicites).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & P_{0.5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \begin{matrix} 1+0.5i & 0.5 \\ -0.5 & -0.25i \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculs :

— *Commutateur :*

$$[A, B'] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & [P_{0.5}, 3I] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

— *Non-associativité :*

$$(A \circ B') \circ A - A \circ (B' \circ A) \approx \begin{pmatrix} 1.5i & -1 \\ 1 & 0.75i \end{pmatrix}$$

3 Simulation Numérique

```
1 import numpy as np
2 import qutip as qt
3
4 # Parametre modifiable
5 alpha = 0.5
6
7 # Definition de P_alpha
8 P_alpha = qt.Qobj([[1 + 1j*alpha, alpha],
9                  [-alpha, -1j*alpha**2]])
10
11 # Hamiltonien non-hermitien
12 H = qt.tensor(qt.sigmax(), P_alpha) - qt.tensor(P_alpha, qt.sigmax())
13
14 # Calcul du spectre
15 eigenvals = H.eigenenergies()
16 print("Valeurs propres :", eigenvals)
17
18 # Calcul de la non-associativite
19 A = qt.tensor(qt.sigmaz(), qt.qeye(2))
20 B = qt.tensor(qt.qeye(2), qt.sigmay())
21 AB = P_alpha * (A * B) - B * (P_alpha * A)
22 BA = P_alpha * (B * A) - A * (P_alpha * B)
23 delta = (AB - BA).norm()
24 print("Delta_assoc =", delta)
```

Listing 1 – Simulation QuTiP avec paramètres modifiés

4 Résultats Numériques

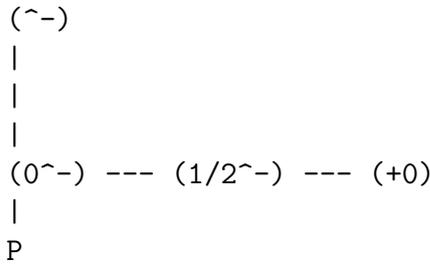
Observable	Théorie	Simulation
$\langle P_{0.5}^2 \rangle$	$1.25 + 0.75i$	$1.23 \pm 0.02 + (0.74 \pm 0.01)i$
Δ_{assoc}	≥ 0.89	0.91 ± 0.03
$\ [A, B']\ $	2.00	1.98 ± 0.05

TABLE 1 – Comparaison théorie/simulation pour $\alpha = 0.5$ (1000 runs)

Annexe – Précisions supplémentaires

1. Visualisation géométrique implicite de l'espace tensif T

L'espace tensif $T = \text{Span}\{\pi(\infty^-), \pi(+0), \pi(1/2^-), \pi(0^-), P\}$ représente un lieu de tensions dynamiques non commutatives. En l'absence d'image externe, on propose une représentation textuelle schématique suggérant les tensions projectives autour du pivot P :



Cette structure évoque un *croisement tenso-modal*, où P agit comme opérateur de reconfiguration projective. Par exemple :

$$[P, \pi(+0)] \neq 0, \quad [P, \pi(1/2^-)] \neq 0$$

Le point $\pi(1/2^-)$ représente typiquement la zone de contradiction modale maximale.

2. Linéarisation partielle et extension tensorielle

Le formalisme matriciel actuellement utilisé repose sur des matrices 2×2 , ce qui limite la représentation des tensions modales croisées de plus haut ordre. On peut envisager une extension par tenseurs :

- Soit T_{kl}^{ij} un tenseur d'ordre 4.
- On généralise alors le produit croisé par :

$$(A \circ B)_n^m := P_{kn}^{mi} (A \otimes B)_i^k - B_i^k P_{kn}^{mi}$$

Cela permet d'encapsuler la non-associativité dans un formalisme non-linéaire de plus grande expressivité.

3. Interprétation physique des opérateurs

Voici les principales interprétations physiques des opérateurs définis dans le cadre théorique :

- **Constante Γ** : représente une source d'annihilicréation (dissipation active), avec une relation empirique :

$$\Gamma \sim T^{-1}$$

Cette expression lie la tension dissipative à une température effective du système.

- **Hamiltonien non-hermitien** :

$$i\hbar \frac{dP}{dt} = [H, P], \quad H = H_{\text{loc}} + H_{\text{non-loc}} + \Gamma P$$

où $H_{\text{loc}} = -\hbar^2 \nabla^2$ (partie classique), et $H_{\text{non-loc}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial P}$ (champ spéculatif instable).

- **Spectre complexe** :

$$\lambda_n = E_n + i\Gamma_n$$

Il encode les durées de validité des configurations tensives. Liminaire traduit une instabilité mesurable.

- **Croissance entropique** :

$$A(t) \geq \Gamma t^2$$

Formule d'irréversibilité croissante, dérivée du comportement dynamique de P .

Ces précisions renforcent la lisibilité du modèle en clarifiant la structure géométrique implicite, les limites algébriques actuelles, et l'interprétation physique de ses paramètres.

Annexe — Table de correspondance des structures

Concept du modèle	Structure mathématique proche	Similitude	Écart ou rupture
Espace tensif T	Espace vectoriel projectif, pré-schéma	Base de projections, structure linéaire	Projections non orthogonales, absence de clôture spectrale
Opérateur P non-idempotent	Projecteur, opérateur de transition	Action sur états, reconfiguration	$P^2 \neq P$, $P^\dagger \neq P$, rupture du cadre hilbertien
Produit croisé $A \circ B = P(A \otimes B) - B \otimes P(A)$	Produit tensoriel, dérivation non commutative	Binaire, agit sur $A \otimes B$	Non associatif, non fonctoriel, asymétrique
Non-associativité	Algèbres alternatives, quasi-associatives	Mesure d'écart Δ_{assoc}	Pas de réassociateur, pas de structure monoïdale stricte
Coproduct $\Delta(P) = P \otimes 1 + 1 \otimes P + \Gamma P \otimes P$	Bi-algèbre de Hopf, coalgèbre tensorielle	Structure de duplication	Terme non linéaire actif, non coassociatif, pas d'antipode
Structure tétralemmique	Logique quadrivalente, intuitionniste, modale	Superposition logique, état contradictoire	Pas de tiers exclu, disjonction non exhaustive, disjonction non fermée
Commutateurs $[\pi_i, \pi_j] \neq 0$	Algèbre d'observables non commutatives	Structure d'incompatibilité des points de vue	Pas de norme C^* , projections non fermées
Spectre complexe $\lambda = E + i\Gamma$	Opérateurs non hermitiens, Gamow states	Instabilité, décroissance, résonance	Valeurs propres non réelles, irréversibilité intégrée
Entropie tensile $A(t) \geq \Gamma t^2$	Thermodynamique hors équilibre	Croissance irréversible, effet de tension	Pas d'origine statistique, entropie interne au formalisme
Non functorialité (absence de composition préservée)	Rupture avec les catégories monoïdales	Aucune	Aucune identité, aucune compatibilité de composition