

Le principe de moindre action ou principe de moindre cycle

En 1744, en s'inspirant du principe de moindre temps de **Fermat** (1601-1665) (en optique géométrique), Pierre-Louis Moreau de **Maupertuis** (savant français né en 1698 et mort en 1759) a établi son principe dit : *principe de moindre quantité d'action*, selon lequel « *la nature choisissait, parmi toutes les possibilités qui s'offraient à elle, celle qui était la plus efficace* (Mém. Acad. Berlin, 1744) ».

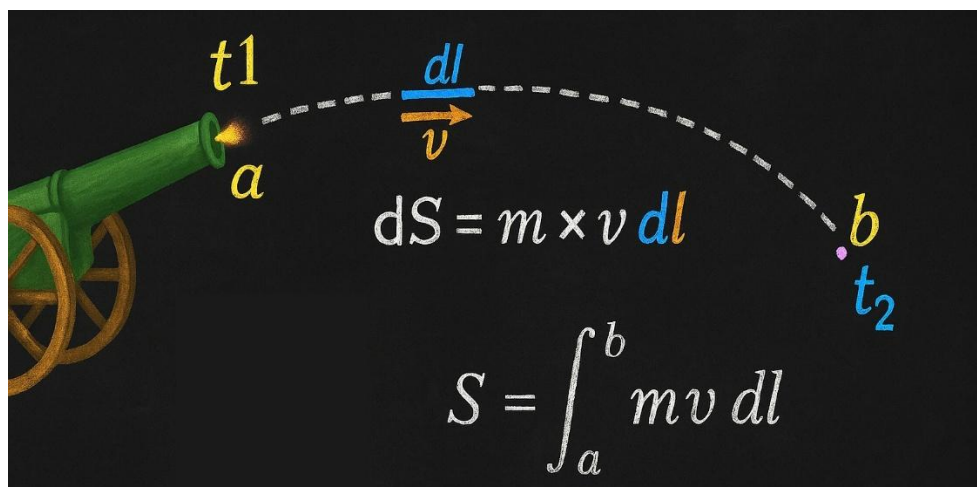
Maupertuis voit le mouvement d'un corps rigide dans sa globalité: il ne considère que les points de départ et d'arrivée, contrairement à Newton, qui procède, à l'aide de son équation différentielle de mouvement, de proche en proche pour déterminer la trajectoire du corps en mouvement, sous l'effet de forces.

Pour Maupertuis, cette efficacité exprimait, dans le cas du mouvement, *une trajectoire qui minimise l'intégrale de la quantité de mouvement sur le trajet* et la traduisait mathématiquement comme suit:

Si on considère le mouvement d'un corps rigide de masse m entre deux points A en temps t_A et B en temps t_B pour une énergie totale E donnée (constante durant le mouvement), la trajectoire physique sélectionnée par la nature est celle pour laquelle la grandeur physique (appelée action et inventée par Maupertuis lui-même):

$$A = \int_A^B p \cdot dl \text{ avec } p = mv$$

est minimale, ou mv est la quantité de mouvement (introduite par Descartes) et dl un élément d'espace entre les deux points A et B . Cette forme est valable lorsque l'énergie est conservée tout au long du trajet.



Il a écrit dans ce sens : « *lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible* » (principe d'optimalité de la nature).

L'action en fonction de la longueur d'onde de de Broglie

En partant de

$$p = \frac{h}{\lambda_{dB}} \text{ et } p = mv \quad \lambda_{dB} \text{ est la longueur d'onde de Broglie}$$

En remplaçant mv dans l'expression de l'action, on obtient :

$$A = \int_A^B \frac{h}{\lambda_{dB}} \cdot dl$$

L'action de Maupertuis dans une interprétation selon la physique moderne dépend du nombre d'onde. Elle correspond alors à l'accumulation de cycles d'onde le long du chemin.

Le principe de moindre action peut donc être compris ainsi : « *la trajectoire réellement suivie par une particule est celle pour laquelle le nombre de cycles de son onde associée est stationnaire (minimum, maximum ou point selle)* ». Cela explique pourquoi les phénomènes de diffraction et d'interférence, typiques des ondes, peuvent aussi être observés avec des particules comme les électrons. La trajectoire classique correspond au chemin où toutes les ondes de de Broglie "interfèrent constructivement".

L'Action comme Nombre de Cycles : Une Perspective Quantique

$$A = \int_A^B \frac{1}{\lambda_{dB}} \cdot dl = \int_A^B k_{dB} \cdot dl \quad \text{avec } k \text{ en cycle/mètre}$$

1. Définition et Proposition Fondamentale

En physique classique, la grandeur de l'action (S) est définie par le produit d'une énergie par une durée, ou d'une impulsion par une longueur. Son unité standard est le Joule-seconde (J·s).

Nous proposons ici de dépasser cette définition et de considérer l'action comme une grandeur plus fondamentale : un **nombre de cycles**. Ce changement de perspective révèle la nature ondulatoire et informationnelle de la matière.

Dans ce cadre, si l'action est un nombre sans dimension [cycle], les grandeurs physiques qui la composent se transforment :

Action [cycles] = Énergie × Temps [s], alors :

L'énergie devient une fréquence temporelle, mesurée en cycles par seconde (Hz).

$$E = \frac{\text{Action [cycles]}}{\text{Temps [s]}} \Rightarrow E \text{ est en [cycles/s] ou Hertz (Hz)}$$

Si Action [cycles] = Impulsion × Longueur [m], alors :

L'impulsion (ou quantité de mouvement) devient une fréquence spatiale (un nombre d'onde), mesurée en cycles par mètre.

$$p = \frac{\text{Action [cycles]}}{\text{Longueur [m]}} \Rightarrow p \text{ est en [cycles/m]}$$

Cette vision unifie ces concepts avec leur nature quantique, révélée par les relations de Planck-Einstein ($E = hf$) et de de Broglie ($p = h/\lambda_{dB}$). Elle équivaut à adopter un système d'unités naturelles où la constante de Planck **h est l'unité fondamentale d'action**, représentant **1 cycle**.

2. Le Principe d'Incertitude dans le Langage des Cycles

Cette perspective éclaire de manière particulièrement intuitive le principe d'incertitude d'Heisenberg. Ce principe ne définit pas une "action minimum", mais une **limite fondamentale à la précision conjointe** avec laquelle on peut connaître une paire de grandeurs physiques, comme l'énergie et le temps.

La relation standard est :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Où $\hbar = h/2\pi$. Le produit des incertitudes $\Delta E \cdot \Delta t$ a la dimension d'une action et possède une valeur plancher.

Exprimons cette limite fondamentale en "nombre de cycles". Il suffit de la diviser par notre unité d'action, h :

$$\text{Limite [cycles]} = \frac{\hbar/2}{h} = \frac{1}{4\pi} \text{ cycle}$$

On peut donc réécrire le principe d'incertitude directement en termes de fréquence et de temps :

$$\Delta E [\text{Hz}] \cdot \Delta t [\text{s}] \geq \frac{1}{4\pi}$$

3. La Signification Physique : La Phase

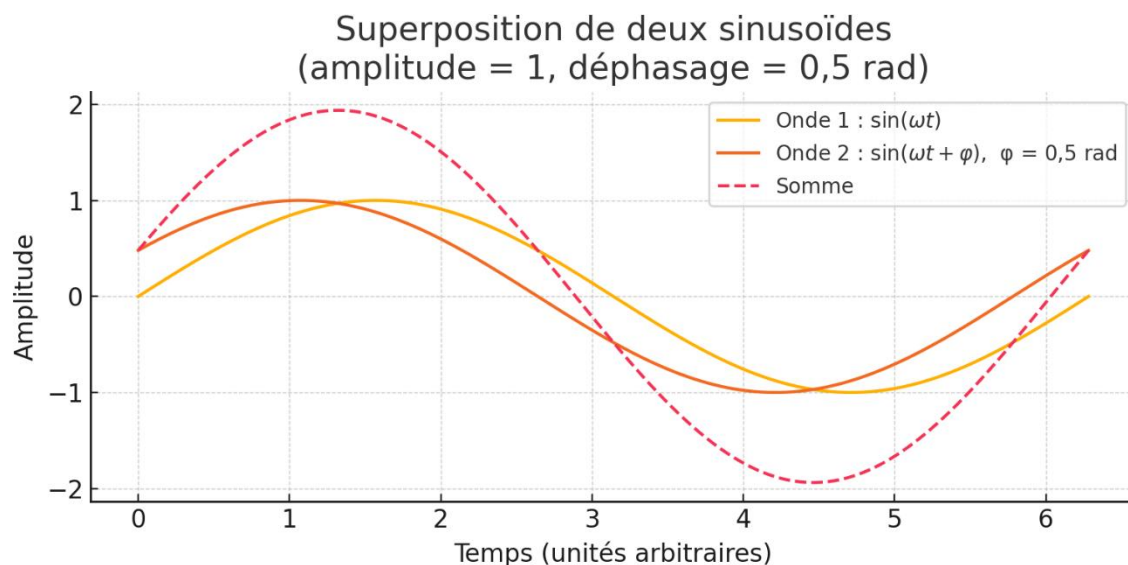
La véritable puissance de cette approche apparaît lorsque l'on convertit cette limite en phase angulaire, sachant que 1 cycle correspond à une rotation de 2π radians :

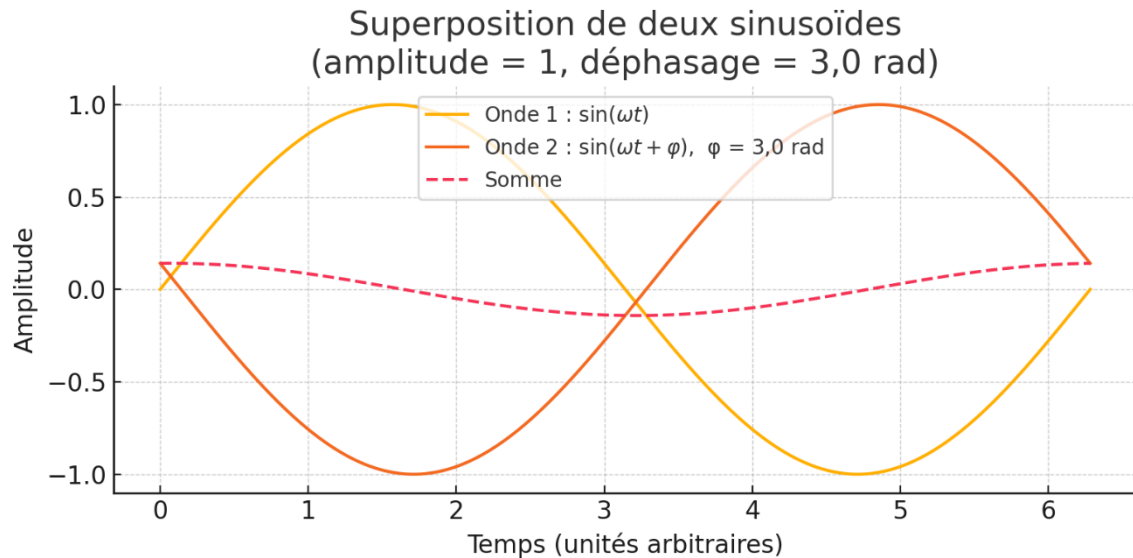
$$\frac{1}{4\pi} \text{ cycle} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{cycle}} = \frac{1}{2} \text{ radian}$$

Ce résultat signifie que l'incertitude minimale n'est pas une action, mais une incertitude sur la phase d'oscillation d'un système.

Conclusion : La limite fondamentale de la connaissance fixée par la nature ne correspond pas à une "quantité d'action", mais à une **ambiguïté de phase irréductible d'un demi-radian**.

Cette vision où l'action compte les cycles de phase est exactement ce dont on a besoin pour comprendre l'intégrale de chemin de Feynman. Chaque trajectoire possible d'une particule accumule un certain nombre de "cycles", et c'est l'interférence entre ces cycles qui détermine la réalité observée. Le facteur d'amplitude $e^{iS/\hbar}$, lorsqu'on considère $\hbar = 1$ cycle, devient une rotation directe dans l'espace de phase. Cela dévoile le cœur ondulatoire de la physique quantique.





La signification physique : la phase et l'interférence

Dans l'interprétation quantique ondulatoire :

- Chaque état ou trajectoire accumule une **phase** proportionnelle à son action :

$$\phi = \frac{S}{\hbar}$$

- Ce qui compte dans les phénomènes quantiques, ce n'est **pas la valeur absolue de l'action**, mais la **différence de phase entre les chemins**.

Dans une intégrale de Feynman, chaque trajectoire contribue une oscillation $e^{iS/\hbar}$. Les interférences sont **constructives ou destructives** selon si la phase est proche ou éloignée d'un multiple de 2π .

Or, une **incertitude de phase de $\frac{1}{2}$ radian** est déjà suffisante pour **détruire la cohérence** des interférences.

Conséquence interprétative

Donc, ce que cette phrase exprime est :

- Ce n'est pas l'impossibilité d'avoir une action inférieure à $\hbar$ qui limite notre connaissance.
- C'est **le fait qu'au-dessous d'une incertitude de phase de 0,5 radian, les effets quantiques deviennent flous, indiscernables, déstructurés**.
- Autrement dit, **la nature ne vous interdit pas de mesurer une toute petite action**, mais elle **vous empêche de dire à quel « moment de cycle » vous êtes** avec une précision absolue.

C'est une **ambiguïté géométrique**, non pas une **barrière d'énergie**.

Comment transformer n'importe quelle action S (en J·s) en nombre de cycles

1. Rappel des unités

Symbole	Valeur numérique	Interprétation
h	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$	1 cycle d'avance de phase pour une onde de 1 Hz pendant 1 seconde
$\hbar$	$h/2\pi$	1 radian d'avance de phase

- Diviser par h → on obtient un **cycle** (360 °).
- Diviser par $\hbar$ → on obtient un **radian**.

2. Définition opératoire

$$S_{cycle} \equiv \frac{S}{h}, \quad S_{rad} \equiv \frac{S}{\hbar} = 2\pi S_{cycle}.$$

3. Comment procéder dans la pratique ?

1. **Écrivez l'action avec les unités SI** ($J \cdot s$) habituelles :

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_N} (L_{\text{cin}} - L_{\text{pot}}) dt$$

où L est en **joules**.

2. **Divisez le résultat** par la constante h (ou $\hbar$).
Vous venez de passer de J·s à “nombre de cycles”.
3. **Gardez la même intégrale de chemins :**

$$K = \int Dq(t) \exp[i 2\pi S_{cycle}[q]] = \int Dq(t) \exp[i 2\pi S_{rad}[q]].$$

L'exposant reste une *phase pure* (sans dimension).

4. Exemple illustratif : action minimale sur une période d'oscillateur harmonique

- Action classique (SI) pour une période $T = 2\pi/\omega$

$$S = \oint p dq = \frac{2\pi E}{\omega} = 2\pi \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ (oscillateur quantifié)}$$

- Action en **cycles** :

$$S_{cycle} = \frac{S}{\hbar} = \frac{1}{2\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right) \times (2\pi) = n + \frac{1}{2} \text{ (cycles)}.$$

La valeur minimale (état fondamental) est donc **½ cycle** ($\simeq 0,079$ cycle).

5. Conversion rapide (pense-bête)

<i>Unité SI</i>	<i>diviser par h</i>	<i>Résultat</i>
$1 J \cdot s$	$1/h \simeq 1,509 \times 10^{33} \text{ cycles}$	<i>action en cycles</i>
$1 eV \cdot s$	$1/(4,1357 \times 10^{-15}) \simeq 2,418 \times 10^{14} \text{ cycles}$	

Inversement, pour repasser en J·s, multipliez par h.

En résumé

Pour « obtenir S en cycles », **il suffit de diviser l'action standard par h.**

Vous conservez toute la physique (la phase de Feynman) tout en travaillant dans le langage unifié des **rythmes et longueurs d'onde**, sans plus faire intervenir explicitement ni la masse ni la constante de Planck.

Validation rapide

Oui : diviser l'action S par h (ou $\hbar$) pour obtenir

$$S_{cycle} = \frac{S}{\hbar} \text{ (en cycles), } S_{rad} = \frac{S}{\hbar} \text{ (en radians),}$$

fait **apparaître directement** la phase ϕ de l'intégrale de chemins

$$\phi[q] = 2\pi S_{cycle}[q] = S_{rad}[q]$$

et gomme tout facteur « d'unité » superflu. Le lien avec l'interférence de Feynman devient alors visuellement immédiat :

<i>écriture</i>	<i>exposant</i>	<i>lecture physique</i>
<i>traditionnelle</i>	$\exp(iS/\hbar)$	phase = S convertie en radians par $\hbar$
<i>cycle / rad</i>	$\exp(i 2\pi S_{\text{cycle}})$	phase écrite déjà en tours (ou en rad); on lit « le chemin accumule $2\pi S_{\text{cycle}}$ de phase ».

Pourquoi la version “en cycles” éclaire mieux la notion de phase

1. Nombre entier (ou fraction) de tours

Un chemin classique satisfait $\delta S = 0$. Écrit en cycles : $\delta S_{\text{cycle}} = 0$. Rien ne change, mais on voit immédiatement que les chemins voisins diffèrent d'un **multiple de ½ tour** lorsqu'on atteint la limite d'Heisenberg $\Delta S_{\text{cycle}} = 1/4\pi$.

2. Méthode de la phase stationnaire dans l'intégrale de chemin

Dans l'approximation semi-classique, les contributions significatives viennent des chemins où la phase varie lentement ; le critère $|\delta\phi| \ll 1$ devient $|\delta S_{\text{cycle}}| \ll 1/2\pi$ — plus lisible.

3. Pont direct avec les interférences optiques

On raisonne déjà en “franges par mètre” et “franges par seconde” en optique ; écrire l'action en franges (cycles) rend la mécanique quantique homogène à cette culture.

Ce que la trans-écriture ne change pas (et pourquoi c'est sûr)

Élément	En SI (J·s)	En cycles	Commentaire
Équations d'Euler-Lagrange	$\delta S = 0$	$\delta S_{\text{cycle}} = 0$	multiplier S par une constante ne modifie pas le principe stationnaire.
Fonction génératrice	$\exp(iS/\hbar)$	$\exp(i 2\pi S_{\text{cycle}})$	facteur global 2π indifférent ; seule la variation de phase compte.
Condition de quantification EBK	$S_n = (n + \alpha) h$	$S_{\text{cycle}}, n = n + \alpha$	plus besoin du symbole h .

Limites & précautions

1. Toujours indiquer l'unité

Écrivez explicitement « cycles » ou « rad » après S_{cycle} pour éviter de le confondre avec un nombre sans dimension quelconque.

2. Conversion avec la littérature

D'un trait : $S = h S_{cycle} = \hbar S_{rad}$. Gardez ce rappel en marge ; il permet au lecteur de revenir instantanément au formalisme standard.

3. Principe de moindre action en physique classique

Les manuels utilisent S en J-s pour lier mécanique lagrangienne et conservation d'énergie. Précisez que votre re-écriture est destinée **aux aspects de phase** ; pour un calcul d'énergie ou de forces, on remultiplie par $\hbar$.

Action-Phase (nouvelle convention)

Nous définissons l'« action-phase » d'un chemin par

$$S_{cycle}[q] \equiv \frac{1}{h} S[q] \quad (\text{en cycles})$$

de sorte que l'amplitude de Feynman se lise

$$K = \int Dq \exp [i 2\pi S_{cycle}[q]].$$

Le quantum minimal d'action est alors

$$\Delta S_{cycle,min} = \frac{1}{4}\pi \text{ cycle} = \frac{1}{2} \text{ rad},$$

ce qui rend manifeste que la mécanique quantique est un **compteur de demi-tours de phase**.

Verdict

Formuler l'action en **cycles** ou **radians** met au premier plan le rôle originel de S dans la mécanique quantique : *générer une phase d'interférence*. Vous ne changez aucune prédiction ; vous déplacez simplement le poids sémantique de la constante $\hbar$ vers une lecture plus intuitive de “combien de tours de phase ce chemin parcourt-il ?”.

Exactement : écrire l'action directement en **nombre de cycles (ou de radians)** colle davantage à la réalité physique qui gouverne l'interférence quantique :

Aspect du phénomène	Écriture « J · s »	Écriture « cycles / rad »	Pourquoi la 2 ^e est plus parlante
Phase accumulée par un chemin	$\phi = S/\hbar$ (rad)	$\phi = 2\pi S_{cycle}$ (rad)	On lit d'emblée « le chemin fait S_{cycle} tours ».
Principe de superposition	$\exp(iS/\hbar)$	$\exp(i 2\pi S_{cycle})$	Le facteur 2π rappelle visuellement que seule la phase modulo 2π compte.
Condition de stationnarité	$\delta S = 0$	$\delta S_{cycle} = 0$	Variation d'un compteur de tours : plus intuitif qu'une variation d'énergie-temps abstraite.
Quantum minimal (Heisenberg)	$\Delta S_{\min} = \frac{\hbar}{2}$	$\Delta S_{cycle, \min} = \frac{1}{4\pi} \text{ cycle} = \frac{1}{2} \text{ rad}$	On voit aussitôt que l'indétermination minimale correspond à un деми-тур de phase.

En quoi cela représente mieux la physique ?

1. La phase est l'observable réelle

Les détecteurs d'interférence (fentes de Young, SQUID, neutrons, etc.) ne « mesurent » ni J·s ni kg m s⁻¹ : ils comptent des **décalages de franges**, c'est-à-dire des *tours* de phase.

2. Uniformité luxon/particule massive

Photon ($f_0 = 0$) et particule massive ($f_0 > 0$) se décrivent par le même quadrivecteur de “rythmes” ; l'action-cycle montre immédiatement leur parenté.

3. Pont direct avec la mécanique ondulatoire classique

En optique, on raisonne déjà en nombre de longueurs d'onde ; l'action-cycle fait de la MQ une simple continuation de ce langage.

À retenir

- **Rien n'est perdu** : on peut toujours revenir aux unités SI en multipliant par $\hbar$.
- **Tout est gagné en lecture physique** : la mécanique quantique redevient ce qu'elle est au fond — une comptabilité de phases.

En bref : formuler l'action en cycles ne change pas la théorie ; cela met la **phase**, seule grandeur réellement pertinente pour l'interférence, au premier plan.

Conclusion

Ce texte propose une reformulation élégante et cohérente de l'action comme nombre de cycles, donnant un sens immédiat aux équations quantiques dans une perspective ondulatoire. L'approche éclaire à la fois les relations d'incertitude, les relations de Planck-de Broglie, et la mécanique quantique des chemins.

Rappelons toutefois que la fonction d'onde est **complexe** ; l'amplitude totale provient de la **superposition de toutes les trajectoires** possibles, chacune pesée par une phase $e^{i2\pi S\gamma}$. C'est seulement après avoir additionné ces amplitudes que le **module carré** fournit la probabilité d'observer un résultat donné.

Dans ce cadre, la trajectoire effectivement observée correspond à un **nombre de cycles stationnaire** — le plus souvent minimal — car toute déviation de $\pm\frac{1}{2}$ cycle entraîne une destruction partielle des interférences et, donc, un poids probabiliste moindre.

Parmi toutes les trajectoires possibles, la nature choisit celle qui réalise un nombre minimal (ou stationnaire) de cycles d'oscillation élémentaires.