Gravité quantique : Action gravitationnelle en cycles cosmiques

Objectif – Étendre la reformulation « l'action = nombre de cycles » au cas de la gravitation, depuis la relativité générale classique jusqu'aux approches (semi-)quantiques : intégrale de chemin, discrétisations de type Regge, boucles / spinfoams, cosmologie quantique, trous noirs et constante cosmologique. L'idée centrale : *la phase quantique associée à la géométrie de l'espace-temps est mesurée par le nombre de cycles gravitationnels accumulés* sur un domaine d'intégration. Le principe de moindre action devient alors un **principe de moindre (ou stationnaire) nombre de cycles gravitationnels**, en interaction avec les cycles de la matière.

---

0. Carte rapide du document

Section	Idée clé	Formule noyau	À relier à tes travaux
1	Cadre « action = cycles »	$\mathrm{S_{cyc}} = \mathrm{S/h}$, amplitude $\exp i2\pi\, S_{cyc}$	Déjà utilisé pour mécanique quantique et oscillateurs.
2	Action gravitationnelle classique	$S_G = \frac{c^3}{16\pi G} \int R\, \sqrt{-g}\, d4x + S_{GHY} + S_\Lambda$	Point de départ géométrique.
3	Normalisation en cycles	$N_G = S_G\,/h = \frac{1}{16\pi \ell_{p,h}^2} \int R\sqrt{-g}\, d4x + \cdots$	Relie courbure intégrée à un nombre sans dimension.
4	Principe de moindre cycle gravitationnel	$\delta N_{tot} = 0 \Rightarrow$ équations d'Einstein	Reformulation directe de GR.
5	Couplage matière-géométrie en cycles	$N_{tot} = N_G + N_m$	L'échange de cycles donne $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T\mu\nu$
6	Intégrale de chemin sur les métriques	$Z = \int D_g\, D_\phi\, e^{i2\pi N_{tot}[g,\phi]}$	Passage au quantique tout à fait naturel dans ce formalisme.
7	Régime semi-classique & gravitons	Développement autour d'une métrique stationnaire des cycles	Relie aux ondes gravitationnelles et à leur phase.
8	Regge (discrétisation)	$N_G = \frac{1}{8\pi\, \ell_{p,h}^2} \sum_\sigma A_\sigma\ \delta_\sigma$	Courbure = déficit angulaire = phase = cycles.

Section	Idée clé	Formule noyau	À relier à tes travaux
9	Boucles & spinfoams	Holonomies = phases; aires quantifiées ~ multiples de $\ell_{p,h}^2$	Lecture « nombre de cycles sur boucles ».
10	Cosmologie FLRW	Nombre de cycles dans un volume cosmique	Vers « cycles cosmiques » & constante cosmologique.
11	Constante cosmologique & vide	Densité de cycles du vide gravitationnel	Reformule le problème Λ en comptage de cycles.
12	Trous noirs	Action Euclidienne ~ aire/4 => entropie; périodicité imaginaire = cycles	Pont vers thermodynamique gravitationnelle.
13	Interférométrie gravitationnelle	Comptage de cycles d'onde gravitationnelle	Lien avec ta discussion sur la cohérence (Δphase ~ 1/2 rad).
14	Synthèse & pistes de travail	Plan d'extensions	Pour intégration dans ton corpus pédagogique.

---

1. Cadre conceptuel général : *l'action comme nombre de cycles*

1.1 Notations « cycles » vs « radians »

Ayant établi la distinction suivante :

- S = action habituelle ($unités\ SI : J \cdot s$).
- $h\ =\ constante\ de\ Planck\ (pas\ \hbar)$.
- **Nombre de cycles** : $S_{cyc} = S/h\ (Sans\ dimension)$.
- **Nombre de radians** : $S_{rad} = S/\hbar = 2\pi S_{cyc}$.

Ainsi, l'amplitude de probabilité associée à un processus est

$$\mathcal{A} = exp\ (i\ 2\pi\ S_{cyc}[chemin]) = exp\ (i\ S_{rad}[chemin]).$$

Deux chemins interfèrent constructivement si la différence de cycles est un entier (ou plus généralement proche d'un entier dans la limite semi-classique), et destructivement si l'incertitude de phase atteint ~1/2 radian — point que nous avons déjà souligné en contexte d'interférométrie. C'est un ordre de grandeur expérimental/conventionnel (pas un seuil mathématique strict). Cette idée devient très puissante en gravitation, où *la géométrie elle-même* transporte de la phase.

En relativité générale, la courbure de l'espace-temps affecte le déroulement du temps et la distance, ce qui modifie l'action (la phase) d'une particule ou d'un champ. L'idée est donc d'appliquer ce comptage de cycles directement à la dynamique de l'espace-temps.

1.2 Principe de moindre cycle (rappel)

Dans la limite où les phases sont grandes et rapidement oscillantes, les chemins contribuant significativement à l'intégrale de chemin sont ceux pour lesquels la variation de S_{cyc} est stationnaire : $\delta S_{cyc} = 0$. En mécanique classique non gravitationnelle, cela redonne le principe de moindre action ; nous appliquons maintenant la même logique à la géométrie de l'espace-temps.

---

2. Action gravitationnelle (EH, GHY, Λ, matière)

2.1 Terme volume (Einstein-Hilbert)

$$S_{EH} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Ici R est le scalaire de courbure de Ricci, $g = \det g_{\mu\nu}$, $\mathcal{M}$ la variété espace-temps.

$\sqrt{-g}\, d^4x$ représente l'élément de volume à 4 dimensions. L'action est donc essentiellement l'intégrale de la courbure sur tout le volume de l'espace-temps $\mathcal{M}$.

Signature (−,+,+,+) .

2.2 Terme de frontière (Gibbons–Hawking–York)

Nécessaire pour que la variation soit bien posée lorsque la métrique est fixée sur le bord :

$$S_{GHY} = \frac{c^3}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} K \sqrt{|\gamma|}\; d^3x,$$

où K est la trace de la courbure extrinsèque du bord et γ le déterminant de la métrique induite.

2.3 Terme de constante cosmologique

Les deux prochains termes décrivent comment le "contenu" de l'univers affecte la géométrie.

L'action de la **constante cosmologique** s'écrit

$$S_{\Lambda} = -\frac{c^3}{8\pi G} \int_{\mathcal{M}} \Lambda \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Le terme Λ agit comme une source d'énergie inhérente au vide, provoquant une expansion (ou contraction) accélérée de l'univers

2.4 Terme matière

L'action de la matière prend une forme générale

$$S_{m[\phi,g]} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{\mathrm{m}} \, (\phi, g, \partial\phi, \dots) \sqrt{-g}\, d^4x.$$

où $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}$ est le lagrangien décrivant les champs de matière ϕ.

Le terme de matière S_m est le plus général ; il représente la contribution de toutes les formes de matière et d'énergie (particules, champs électromagnétiques, etc.) et leur interaction avec la gravité

2.5 Action totale

L'action totale est simplement la somme de toutes ces composantes.

$$S_{tot} = S_{EH} + S_{GHY} + S_{\Lambda} + S_m.$$

---

3. Normalisation en cycles gravitationnels

3.1 Longueur de Planck en version « h »

Notre approche impose l'utilisation de h plutôt que $\hbar$. La longueur de Planck définie avec h s'écrit

$$\ell_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = \sqrt{2\pi}\, \ell_{p,\hbar}$$

où $\ell_{p,\hbar} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ est la définition plus standard. Cette distinction compte seulement pour les facteurs numériques ($\sqrt{2\pi}$).

Voir l’annexe A

3.2 Action gravitationnelle en cycles

Divisons $S_G = S_{EH} + S_{GHY} + S_\Lambda \; par \; h$:

$$N_G \equiv \frac{S_G}{h} = \frac{1}{16\pi\ell_{p,h}^2}\int_{\mathcal{M}} R\,\sqrt{-g}\,d^4x + \frac{1}{8\pi\ell_{p,h}^2}\int_{\partial\mathcal{M}} K\,\sqrt{|\gamma|}\;d^3x - \frac{1}{8\pi\ell_{p,h}^2}\int_{\mathcal{M}} \Lambda\,\sqrt{-g}\,d^4x\,.$$

N_G est le nombre de cycles gravitationnels. Chaque terme est **sans dimension** : il exprime un *nombre de cycles gravitationnels* associés respectivement à la courbure intérieure, à la géométrie du bord et à la constante cosmologique.

3.3 Densité de cycles et échelle géométrique

Comme $R \sim L^{-2} \; et \; d^4x\,\sqrt{-g} \sim L^4$, la contribution volumique se comporte comme $L^2/\ell_{p,h}^2$. Ainsi, pour une région caractéristique de taille L,

$$N_G \sim \frac{L^2}{\ell_{p,h}^2} \times (facteur\ de\ courbure\ adimensionnel).$$

N_G, qui est associé à un **volume** d'espace-temps, ne croît pas comme le volume (L_4) mais comme une **aire** (L_2) en unités de Planck

Ce rapport aire/aire de Planck suggère une analogie de type holographique : le nombre total de cycles gravitationnels dans un volume croît comme une aire mesurée en unités de Planck *pondérée* par la courbure moyenne.

L'idée est que le contenu informationnel d'un volume (ici, le nombre de "cycles gravitationnels") pourrait être encodé sur une surface, à la manière d'un hologramme. Le nombre de cycles est ainsi une mesure de cette information, pondérée par la courbure moyenne de l'espace-temps.

---

4. Principe de moindre (ou stationnaire) nombre de cycles gravitationnels

Faisons varier $N_{tot} = N_G + N_{GHY} + N_m$ par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$, en maintenant la métrique fixe sur le bord (d’où l’importance de N_{GHY} « terme de bord de Gibbons–Hawking–York »). N_G est la contribution géométrique, N_{GHY} le **terme de bord de Gibbons–Hawking–York** et N_m celle de la matière.

On pose

$$N_G \equiv \frac{S_{EH}}{h},\; N_{GHY} \equiv \frac{S_{GHY}}{h},\; N_m \equiv \frac{S_m}{h}.$$

On obtient, après calcul variationnel standard :

$$\delta N_{tot} = 0 \Longrightarrow G_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

les équations d'Einstein usuelles. Ce résultat montre que **la géométrie physique est celle qui rend stationnaire le nombre total de cycles (géométrie + matière)**.

Voir l'annexe B

Lecture pédagogique : Les cycles de la matière (oscillations internes, champs quantiques, fréquences de Compton, modes collectifs...) imposent une structure de phase sur l'espace-temps. L'espace-temps se « déforme » (courbure) de manière à rendre **stationnaire** le comptage de cycles total. Ce point de vue unifie géométrie et matière par la phase. (Stationnaire = variation nulle $\delta N_{tot} = 0$).

---

5. Couplage matière–géométrie en cycles

5.1 Champ matière

Conventions : signature métrique (−+++) avec $x_0 = ct$.

Tout champ matière apporte son propre nombre de cycles. Par exemple, pour un champ scalaire réel ϕ :

$$S_m = -\frac{1}{2c} \int \left(g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\ \partial_\nu \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \right) \sqrt{-g}\, d^4x \Rightarrow N_m = \frac{S_m}{h}\ (cycles).$$

$\boldsymbol{S/h}$ compte des **cycles (tours),** tandis que $S/\hbar$ compte la **phase en radians**.

Il s'agit de l'action standard pour un champ scalaire massif (décrit par l'équation de Klein-Gordon). Le premier terme représente l'énergie cinétique du champ et le second sa masse. Cette action est ensuite traduite de manière cohérente en un nombre de cycles N_m en la divisant par h.

5.2 Tenseur énergie-impulsion comme dérivée des cycles matière

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2c\ h}{\sqrt{-g}} \frac{\delta N_m}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Interprétation : *comment la densité de cycles matière varie lorsqu'on déforme la métrique*. C'est cette variation qui pousse l'espace-temps à se courber.

Le **tenseur énergie-impulsion**, $T_{\mu\nu}$, est défini de manière standard comme la variation de l'action de la matière S_m par rapport à la métrique $g^{\mu\nu}$.

$T_{\mu\nu}$ n'est plus seulement une "densité d'énergie", mais il mesure **comment la densité de cycles de matière change lorsqu'on déforme localement la géométrie de l'espace-temps**.

Cette variation est ce qui "pousse l'espace-temps à se courber". Autrement dit, la matière et l'énergie, en résistant à un changement de leur "nombre de cycles" lorsque la géométrie varie, agissent comme la source de la courbure.

---

6. Intégrale de chemin gravitationnelle en notation cycles

Le formalisme des intégrales de chemin devient immédiatement naturel :

$$Z = \int D_g\, D_\phi\ \exp(i2\pi N_{tot}\, [g,\phi])\ =\ \int D_g\, D_\phi\ \exp(i\, S_{rad}[g,\phi])$$

- Régime **semi-classique** : $N_{tot} \gg 1$ et variations rapides de phase ⇒ approximation du point de selle (phase statio$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$nnaire) ⇒ relativité générale classique + corrections.

  La plupart des chemins (géométries) s'annulent par interférence destructive. Seul le chemin où la phase est stationnaire ($\delta N_{tot} = 0$) et ses voisins immédiats survivent.

- Régime **quantique fort** : Petits nombres de cycles (géométries proches de l'échelle de Planck) ⇒ contributions nombreuses et fortement fluctuantes ⇒ géométrie quantiquement indéfinie. C'est le domaine propre à la gravité quantique.

---

7. Développement semi-classique et gravitons : quanta de cycles de courbure

7.1 Expansion de la métrique

On écrit $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ autour d'une solution classique $(\bar{g}, \bar{\phi})$ telle que $\delta N_{tot}[\bar{g}, \bar{\phi}] = 0$ (conditions aux bords fixées).

7.2 Développement du nombre de cycles

$$N_{tot}[\bar{g} + h, \phi + \psi] = N_{tot}[\bar{g}, \bar{\phi}] + \frac{1}{2} N_2[h, \psi] + \cdots$$

où $\psi = \phi - \bar{\phi}$.

Le terme quadratique N_2 gouverne la dynamique linéarisée des perturbations (après choix de jauge) : ses quanta dans le vide sont les **gravitons** et leur manifestation classique **est** l'onde gravitationnelle. Dans ce cadre, un graviton peut être vu comme un **quantum de cycle de courbure**.

7.3 Phase d'une onde gravitationnelle
Pour une onde quasi-monochromatique d'amplitude faible parcourant une distance L, le nombre de cycles accumulé est $N_{GW} = f_{GW}\, T\ avec\ T = L/c\ (phase\ \Phi = 2\pi N_{GW})$. Les interféromètres (LIGO, Virgo, KAGRA, LISA) mesurent précisément cette phase : la métrologie des ondes gravitationnelles est déjà un **comptage de cycles —** ceux de la **perturbation**, non ceux de la **courbure de fond**.

---

8. Action de Regge en « cycles » (4D ; charnières = 2-faces triangulaires)

Cadre. On considère une géométrie *piecewise-flat* (plate par morceaux) à la Regge : la courbure est concentrée sur les **charnières** (en 4D : les 2-simplexes triangulaires). Pour éviter toute confusion avec la constante de Planck h, on note les charnières par l'indice σ (au lieu de h). On note A_σ l'aire de la charnière σ et δ_σ son déficit angulaire (somme des angles dièdres autour de σ soustraite à 2π en signature euclidienne ; en signature lorentzienne, δ_σ est un angle *hyperbolique*—voir remarque plus bas).

1) Action de Regge

$$S_{Regge} = \frac{c^3}{8\pi G}\ \sum_\sigma A_\sigma\ \ \delta_\sigma \quad \text{(sans Λ, sans termes de bord).}$$

Rappel : dans le continu, $\int R\,\sqrt{-g}\,d^4x \rightsquigarrow 2\sum_\sigma A_\sigma\ \ \delta_\sigma$ d'où le facteur $1/(8\pi G)$ ci-dessus.

2) Lecture « action = nombre de cycles »

On **mesure l'action en cycles** en la divisant par la constante de Planck h (un cycle correspond à 2π de phase) :

$$N_G(cycles) = \frac{S_{Regge}}{h} = \frac{1}{8\pi\,\ell_{p,h}^2}\sum_\sigma A_\sigma\ \ \delta_\sigma \quad avec \quad \ell_{p,h}^2 = \frac{Gh}{c^3}.$$

- **Contribution par charnière** (mise en évidence du « $1\ cycle\ =\ 2\pi$ ») :

$$N_G^{(\sigma)}\ =\ \frac{A\sigma}{8\pi\,\ell_{p,h}^2}\,\delta\sigma\ =\ \frac{A_\sigma}{4\,\ell_{p,h}^2}$$

$\frac{\delta\sigma}{2\pi}$ (nombre de cycles géométriques autour de σ).

3) Interprétation

- $A_\sigma / \ell_{p,h}^2$ est un **compte sans dimension d'unités d'aire de Planck (version h)**.
- δ_σ est la **phase géométrique** accumulée par transport parallèle autour de la charnière ; chaque 2π correspond à **1 cycle**.
- **Signature lorentzienne** : δ_σ devient un angle de **boost** (hyperbolique). Deux pratiques équivalentes dans ce cadre :
  (i) travailler en **continuation euclidienne** (où $2\pi \leftrightarrow 1$ cycle est immédiat), puis revenir en lorentzien ;
  (ii) garder la lecture en cycles en identifiant la phase via S/h, la notion de « cycle » restant associée à un tour complet 2π de la phase.

Remarque pratique : si tu ajoutes Λ ou des termes de bord (Gibbons–Hawking–York), indique-les explicitement, car ils apportent des contributions additives à N_G.

Renvoi. Pour la dérivation discrète du passage $\int R \sqrt{-g} \rightarrow 2 \sum_\sigma A_\sigma \ \delta_\sigma$.

Voir l'annexe C.

---

9. Boucles, réseaux de spin & mousses de spin (spinfoams) en lecture cycles

9.1 Holonomies comme phases accumulées

En gravité quantique à boucles (LQG), les variables fondamentales sont des **holonomies** : le transport parallèle le long de boucles fermées. Une holonomie est un élément de $SU(2)$ (ou $SL(2, \mathbb{C})$ selon la formulation) et encode une rotation dans l'espace interne. On peut l'interpréter comme une **phase de rotation**, donc comme un comptage de cycles d'orientation.

9.2 Aire quantifiée

Spectre d'aire (schématique) :

$$A_j \sim 4\,\gamma\,\ell_{p,h}^2 \sqrt{j(j+1)},$$

Où

- j est un nombre quantique appelé "spin", qui peut prendre des valeurs demi-entières (1/2,1,3/2,...).
- γ est le paramètre de Barbero-Immirzi, une constante fondamentale de la théorie.

- $\ell_{p,h}^{2}$ représente la longueur de Planck, l'échelle à laquelle les effets de la gravité quantique deviennent dominants.

En unités de Planck, chaque facette porte un multiple discret d'aire, donc un *quantum de capacité de cycles*.

9.3 Amplitudes de mousse de spin

Les mousses de spin associent à chaque 2-surface et 4-simplexe des amplitudes de transition (produits d'éléments de représentation) que l'on peut interpréter comme des phases exponentielles. L'analogue continu de $\sum A\delta$ se reconstruit dans la limite semi-classique, où l'amplitude tend vers $exp(iS_{Regge}/\hbar)$. Donc, en langage cycles :

$$\mathcal{A}_{spinfoam} \sim \exp\left(i2\pi N_{G,Regge}\right)\,(limite\ semi\text{-}classique)$$

Message pédagogique : LQG/spinfoam = théorie dans laquelle les cycles gravitationnels élémentaires sont « étiquetés » par des spins discrets; l'action en cycles émerge à grande échelle par sommation cohérente.

---

10. Cosmologie FLRW : du nombre de cycles géométriques aux cycles cosmiques

Considérons une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) homogène et isotrope :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)\right],$$

où $k = 0, \pm 1$.

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{ac^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2c^2} + \frac{k}{a^2}\right).$$

Prenons une région comobile de volume spatial V_3^0 aujourd'hui (échelle arbitraire) dont le volume physique est $V_3(t) = a^3(t)V_3^0$. Le nombre cumulé de cycles géométriques entre $t_i$et t_f est

$$N_G^{FLRW} = \frac{1}{16\pi\ell_{p,h}^2}\int_{t_i}^{t_f} dt\ ca^3(t)\ V_3^0\ R(t).$$

$$(ca^3(t)\ V_3^0\quad élément\ de\ 4 - volume)$$

Facteur c dans la mesure temporelle si l'on intègre en **temps cosmique t**

Pour $k = 0$, substitue $R(t)$ ci-dessus.

10.3 Définir un « cycle cosmique »

Plusieurs choix possibles (à discuter / expérimenter dans ton texte) :

1. **Cycle de phase moyenne** : 1 cycle lorsque $\int R d\tau$ accumule $16\pi\ell_{p,h}^2$ sur le volume choisi.

   Si $d\tau$ est un temps (secondes), il faut $\boldsymbol{c\, d\tau}$ pour obtenir une longueur.

   $$1\ cycle\ lorsque \int R\ (c\ d\tau)\ a^3 V_3^0 = 16\pi\ell_{p,h}^2$$

   $$(ou\ bien \int R\ \sqrt{-g}\ d4x = 16\pi\ell_{p,h}^2).$$

2. **Cycle par e-fold** : associer 1 cycle par facteur $a \to ea$, puis comparer à R; utile en inflation.

3. **Cycle de Hubble** : prendre $L_H = c/H(t)$. Comme $N_G \sim L^2/\ell_{p,h}^2$ un $Hubble\text{-}cycle$ compterait ~ $\left(\frac{c}{H}\right)^2/\ell_{p,h}^2$ unités pondérées par la courbure moyenne.

Ordre de grandeur : Aujourd'hui $H_0 \approx 70\ km/s/Mpc$.

Le rayon de Hubble

$$c/H_0 \sim 1.3 \times 10^{26}\ m.$$

$$\ell p, \hbar \simeq 1.616 \times 10^{-35} m,\ \ell p, h = \sqrt{2\pi}\ \ell p, \hbar \simeq 4.05 \times 10^{-35}\ m$$

$$\ell_{p,h}^2 \simeq 1.64 \times 10^{-69}\ m^2.$$

(définition $\hbar$ multiplier par $\sqrt{2\pi}$ si h).

Alors

$$(c/H_0)^2/\ell_{p,h}^2 \sim 1.06\ \times\ 10^{121}$$

Chiffre voisin du fameux problème de la constante cosmologique.

En **convention** $\hbar$, le rapport est plus grand d'un facteur 2π:

$$\frac{(c/H_0)^2}{\ell_{p,\hbar}^2} \approx 6.7 \times 10^{121}.$$

Et pour l'**entropie de de Sitter**

$$S/k_B = \pi L_H^2/\ell_{p,\hbar}^2,$$

On obtient $\sim 2.1 \times 10^{122}$ ce qui explique la valeur « 10^{122} » dans la littérature.

Vue cycles : le cosmos actuel contient $\sim 10^{121}$ unités d'aire de Planck par horizon, donc $\sim 10^{121}$ **cycles géométriques** potentiels.

---

11. Constante cosmologique, énergie du vide et densité de cycles

Le terme N_Λ vaut

$$N_\Lambda = -\frac{1}{8\pi\ell_{p,h}^2} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Si $\Lambda > 0$ (de Sitter), la contribution est négative dans cette convention d'action; la phase relative dépend du signe global adopté dans l'exponentielle (à préciser dans la version finale selon ta convention). Ce qui importe ici : la **densité de cycles du vide** est proportionnelle à $\Lambda/\ell_{p,h}^2$.

Le « problème de Λ » peut alors se formuler :

Pourquoi la densité effective de cycles du vide gravitationnel observée cosmologiquement est-elle si petite comparée à la densité naïvement attendue en sommant les cycles des modes quantiques de matière jusqu'à l'échelle de Planck ?

Ton cadre pourrait explorer des mécanismes d'annulation de cycles (interférences destructives) entre contributions matière et géométrie.

---

12. Trous noirs, périodicité imaginaire et aire = cycles

12.1 Action Euclidienne et température de Hawking

En continuation euclidienne ($t \to -i\tau$), l'absence de conique au voisinage de l'horizon impose une périodicité $\beta = 1/(k_B T_H)$ en temps imaginaire. Cette périodicité correspond à un **nombre de cycles imaginaire-temps**. L'action euclidienne évaluée sur la solution donne l'entropie de Bekenstein-Hawking.

12.2 Entropie et aire

$$S_{BH} = \frac{k_B A}{4\,\ell_{p,\hbar}^2} = \frac{k_B\, A}{4\left(\ell_{p,h}^2/2\pi\right)} = \frac{\pi k_B A}{2\ell_{p,h}^2}.$$

Si l'on veut exprimer une *capacité de cycles* associée à l'horizon : $A/\ell_{p,h}^2$ compte le nombre d'aires de Planck carrelant l'horizon. Ce comptage est intimement lié à la phase euclidienne intégrée — donc encore une fois à un nombre de cycles géométriques fondamentaux.

Lien avec LQG : Les micro-états d'aire quantifiée (sections 9.2–9.3) comptent effectivement des « unités de cycles sur l'horizon ».

---

13. Interférométrie gravitationnelle & cohérence de phase

Tu as déjà discuté qu'une incertitude de phase d'environ 1/2 radian suffit à détruire la cohérence d'interférences. Appliquons cette règle à la gravitation :

- Une onde gravitationnelle détectée par un interféromètre est reconstruite en suivant l'évolution de phase au cours de milliers de **cycles gravitationnels**.
- La précision de mesure ($\sim 10^{-3}$ rad sur les meilleures phases accumulées après corrélation de modèles) indique que nous savons compter les cycles de perturbations métriques avec une sensibilité extraordinaire.
- En cosmologie quantique, si différentes histoires géométriques accumulent des nombres de cycles qui diffèrent de plus qu'$\sim 1/2$ rad (sur les échelles pertinentes), elles s'annulent mutuellement dans l'intégrale de chemin; seules les histoires quasi-stationnaires contribuent, d'où l'émergence d'une géométrie quasi-classique.

Proposition pédagogique : « L'Univers classique est celui pour lequel le nombre de cycles gravitationnels devient si énorme que presque toutes les géométries alternatives interfèrent destructivement; il ne subsiste que le paquet quasi-stationnaire correspondant à la relativité générale effective. »

---

14. Synthèse et pistes de développement

14.1 Points clefs récapitulatifs

- L'action gravitationnelle divisée par h définit un **nombre de cycles géométriques** N_G.
- Le principe variationnel devient un **principe de moindre cycles total** (matière + géométrie).
- Les approches discrètes (Regge, LQG, spinfoams) interprètent naturellement la courbure comme une *phase* ou *déficit angulaire* ⇒ cycles.

- En cosmologie, l'énorme ratio horizon/Planck ($\sim 10^{122}$) devient un comptage direct de cycles géométriques.
- Le problème de la constante cosmologique = déséquilibre apparent dans le budget de cycles du vide.
- Les phénomènes thermodynamiques (trous noirs) et interférométriques (ondes gravitationnelles) sont déjà des mesures de cycles.

14.2 Ce que tu peux ajouter dans ton corpus existant

1. **Encadré "Du principe de moindre action au principe de moindre cycles gravitationnels"** juste après ta section sur l'action classique.
2. **Tableau de correspondance** (Mécanique ↔ Gravitation) : Lagrangien, action, cycles, équations d'Euler-Lagrange vs Einstein.
3. **Figure Regge** : simplexe $4D$, charnière, déficit angulaire → cycle.
4. **Encadré cosmologique** : calcul d'ordre de grandeur de N_G dans l'Univers observable; comparer aux $\sim 10^{122}$.
5. **Lien cohérence** : rappeler ton critère $\Delta phase \sim 1/2$ rad et appliquer à la décohérence cosmique.

14.3 Questions ouvertes à explorer dans de futurs textes

- Annulation dynamique des cycles du vide (mécanisme de compensation matière-géométrie ?).
- Quantification directe de N_G dans des modèles mini-superspace (par ex. variable $a(t)\ +$ champ scalaire inflaton) et conditions de sortie de l'inflation.
- Rôle des transitions topologiques (changement de nombre de cycles lié à la signature ou aux identifications globales de l'espace-temps).
- Peut-on dériver un critère de granularité de la courbure à partir de $\Delta N_G \sim 1$?

---

15. Résumé ultra-court (4–5 lignes)

En divisant l'action gravitationnelle par h, on obtient un nombre sans dimension N_G interprétable comme **nombre de cycles gravitationnels** accumulés par la courbure de l'espace-temps. Le principe variationnel devient : *la géométrie physique rend stationnaire le nombre total de cycles (géométrie + matière)*. Les formulations discrètes (Regge, boucles, spinfoams) montrent comment ces cycles peuvent être comptés en quanta d'aire de Planck et déficits angulaires. À l'échelle cosmique, l'énorme ratio horizon/Planck ($\sim 10^{122}$)

correspond à une gigantesque capacité de cycles — pivot pour repenser la constante cosmologique et l'émergence du régime classique.

15.1 Formule maîtresse à rappeler dans tes autres documents

$$\boxed{N_G = \frac{1}{16\pi\ell_{p,h}^2}\int_{\mathcal{M}} R\sqrt{-g}\,d^4x + \frac{1}{8\pi\ell_{p,h}^2}\int_{\partial\mathcal{M}} K\sqrt{|\gamma|}\;d^3x - \frac{1}{8\pi\ell_{p,h}^2}\int_{\mathcal{M}} \Lambda\sqrt{-g}\,d^4x\,.}$$

Annexe A

Il existe deux **définitions** selon la convention de phase :

- **Convention standard (radians)**

$$\ell_{p,\hbar}^2 = \frac{G\hbar}{c^3} (usuelle)$$

- **Convention "cycles" avec $\boldsymbol{h}$**

$$\ell_{p,h}^2 = \frac{Gh}{c^3} = 2\pi\, \ell_{p,\hbar}^2$$

Comme $h = 2\pi\hbar$, la version "cycles" multiplie les **aires** par 2π et les **longueurs** par $\sqrt{2\pi}$. Autrement dit,

$$\ell_{p,h}^2 = 2\pi\, \ell_{p,\hbar}^2 \ et \ \ \ell_{p,h} = \sqrt{2\pi}\, \ell_{p,\hbar}$$

Numériquement : $\ell_{p,\hbar} \approx 1.616 \times 10^{-35}\, m$ et $\ell_{p,h} \approx 4.05 \times 10^{-35}\, m$.

Par exemple, en Regge :

Avec

$$\ell_{p,h}^2 : N_G = \frac{1}{8\pi\, \ell_{p,h}^2} \sum_{\sigma} A_\sigma \ \delta_\sigma$$

Avec

$$\ell_{p,\hbar}^2 : N_G = \frac{1}{16\pi^2\, \ell_{p,\hbar}^2} \sum_{\sigma} A_\sigma \ \delta_\sigma$$

Donc : la formule « officielle » est $\ell_{p,\hbar}^2 = G\hbar/c^3$. Si on compte les phases en **cycles** on utilise $\ell_{p,h}^2 = Gh/c^3$ et on applique ce choix partout.

Annexe B

Voici le passage propre et “sans magie” : on part de

$$N_{tot} \;=\; N_G + N_{GHY} + N_m \;=\; \frac{S_{EH}}{h} + \frac{S_{GHY}}{h} + \frac{S_m}{h}.$$

Comme h est une constante (facteur de conversion « action → cycles »), la condition de stationnarité

$$\delta N_{tot} = 0 \Leftrightarrow \delta S_{tot} = 0 \; avec \; S_{tot} = S_{EH} + S_{GHY} + S_m.$$

Autrement dit : diviser par h ne change pas le principe variationnel, seulement l’unité (on compte des cycles au lieu d’une action).

Dérivation (en 4 étapes)

1. **Choix de l’action gravitationnelle (avec Λ)**

$$S_{EH} = \frac{c^3}{16\pi G}\int_M d^4x\,\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda),\; S_{GHY} = \frac{c^3}{8\pi G}\int_{\partial M} d^3x\,\sqrt{(|\gamma|)}\,K\;.$$

Le terme S_{GHY} rend bien posée la variation avec **métrique fixée sur le bord** (conditions de Dirichlet).

2. **Variation de la partie gravitationnelle** (les termes de bord se compensent entre S_{EH} et S_{GHY})

$$\delta(S_{EH} + S_{GHY}) = \tfrac{c^3}{16\pi G}\int_M d^4x\,\sqrt{-g}\,\big(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\big)\,\delta g^{\mu\nu}.$$

3. **Définition du tenseur énergie-impulsion** (convention qui donne le bon c^4 à la fin)

$$T_{\mu\nu} \;\coloneqq\; -\frac{2c}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad\Leftrightarrow\quad \delta S_m = -\frac{1}{2c}\int_M d^4x\,\sqrt{-g}\;T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}.$$

4. **Stationnarité pour des $\boldsymbol{\delta g^{\mu\nu}}$ arbitraires**

$$0 = \delta S_{tot} = \int_M d^4x\,\sqrt{-g}\;\left[\frac{c^3}{16\pi G}\big(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\big) - \frac{1}{2c}T_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}.$$

Comme $\delta g^{\mu\nu}$ est arbitraire, on obtient

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu},$$

c’est-à-dire les équations d’Einstein usuelles.

Annexe C

Voici la chaîne logique complète, du **continu** au **discret**, qui justifie la phrase :
Courbure = déficit angulaire = phase = cycles.

---

1) Courbure (continu) ⇒ déficit angulaire (rotation de transport parallèle)

- En géométrie différentielle, la **courbure** se lit par le **transport parallèle** d'un vecteur autour d'une petite boucle Σ.
- Pour une boucle de surface orientée $A^{\mu\nu}$ très petite,

$$\text{(angle de rotation) } \Delta\theta^{\beta}{}_{\alpha} \simeq \frac{1}{2} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \;\; A_{\mu\nu,}$$

c'est-à-dire **proportionnelle à la courbure intégrée** sur la surface.

- En **2D**, c'est limpide : la **courbure de Gauss $\boldsymbol{K}$** vérifie, pour un petit triangle géodésique d'aire $\mathcal{A}$,

$$\delta \; (déficit\ d'angles) \;\; \simeq \;\; K\, \mathcal{A} \Rightarrow \;\; K = \lim_{\mathcal{A}\to 0} \frac{\delta}{\mathcal{A}} \; .$$

Le **déficit angulaire** δ *est* la rotation acquise : c'est déjà une **phase géométrique** (une rotation dans l'espace tangent).

Moral : *la courbure se mesure comme un angle de rotation (= déficit) acquis par transport parallèle*.

---

2) Discrétisation de Regge ⇒ courbure concentrée = somme $\boldsymbol{A_\sigma\ \delta_\sigma}$

- En Regge (géométrie **discrète** par simplexes plats recollés), la courbure n'est non nulle **que** sur les **charnières** σ (2-faces triangulaires en 4D).
- La mesure de courbure au voisinage de σ est le **déficit angulaire** δ_σ: l'angle manquant pour « fermer » toutes les dièdres autour de σ.
- L'action d'Einstein–Hilbert se réécrit alors (sans Λ, sans bords) :

$$S_{Regge} \;\; = \;\; \frac{c^3}{8\pi G} \sum_{\sigma} A_\sigma\, \delta_\sigma.$$

Chaque terme **aire × déficit** agrège la courbure sur la charnière σ.

Moral : *en discret, « courbure » = « déficits angulaires », et l'action est une* ***somme d'angles pesés par des aires***.

---

3) Déficit (angle) ⇒ phase (radians) dans l'intégrale de chemin

- En théorie quantique des champs sur la gravité, l'amplitude est $exp(iS/\hbar)$
- Avec Regge :

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{Regge}\right) = \exp\left[i\,\frac{c^3}{8\pi G\hbar}\sum_{\sigma} A_\sigma\,\delta_\sigma\right].$$

- L'**exposant** est une **phase (en radians)** : la somme des **rotations géométriques** δ_σ pondérées par les aires σ, remise à l'échelle planckienne.
- Du point de vue des **holonomies** (transport parallèle) : chaque boucle autour d'une charnière est une rotation (un élément de $SO(3,1)$) (ou de son double recouvrement $SL(2,\mathbb{C})$) ; l'**angle** de cette rotation *est la phase* géométrique. **Le signe de $\boldsymbol{\delta_\sigma}$** dépend de l'orientation de la boucle

Moral : *le déficit est littéralement la* ***phase*** *(en radians) qui entre dans l'exponentielle quantique.*

---

4) Phase (radians) ⇒ cycles (nombre sans dimension) via $\boldsymbol{S/h}$

- Tu travailles en **cycles** (pas en radians) ; on pose

$$N \;=\; \frac{S}{h} \Leftrightarrow phase\ (radians) = \frac{S}{\hbar} = 2\pi\,\frac{S}{h} = 2\pi N.$$

- En Regge, le **nombre de cycles gravitationnels** est donc

$$N_{G,Regge} \;=\; \frac{1}{8\pi\,\ell_{p,h}^2}\sum_{\sigma} A_\sigma\,\delta_\sigma \qquad \left(\ell_{p,h}^2 = Gh/c^3\right).$$

La phase étant définie **modulo $\boldsymbol{2\pi}$**, $\boldsymbol{N}$ est défini **modulo 1** (utile pour les conditions de stationnarité de phase).

Chaque charnière σ apporte

$$\boxed{N_\sigma \;=\; \frac{A_\sigma\,\delta_\sigma}{8\pi\,\ell_{p,h}^2}.}$$

- **Interprétation** :
  - $A_\sigma/\ell_{p,h}^2$= **capacité** (combien « d'unités de Planck » carrellent la charnière) ;
  - δ_σ = **angle/phase** accumulé autour de cette charnière ;
  - leur produit (avec 8π) donne un **compte de cycles**.
    La phase quantique totale est alors $2\pi\,N_{G,Regge}$.

Moral : *la phase (en radians) =* $2\pi \times$ *cycles ; diviser l'action par* h *transforme la somme des « angles × aires » en* ***nombre de cycles****.*

δ_σ peut être un **boost (angle hyperbolique)** en signature lorentzienne ; l'identification « $1\ cycle \ = \ 2\pi$ de phase » demeure via S/h (ou par continuation euclidienne)

Résumé en une ligne

$$\boxed{Courbure\ (continu) \ \Leftrightarrow \ Déficit\ angulaire\ (Regge) \ \Leftrightarrow \ Phase\ (radians)\ \frac{S}{\hbar} \ \Leftrightarrow \ Cycles\ \frac{S}{h}}$$

Continu → Discret : la courbure intégrée d'un petit domaine donne une **rotation** (déficit) ; Regge concentre cette rotation sur les charnières.

- **Discret → Quantique** : la somme $\sum A_\sigma \delta_\sigma$ entre dans l'**exponentielle de phase** $exp\ (i\ S/\hbar)$.
- **Phase → Cycles** : en divisant par h, on lit directement un **nombre de cycles** ; l'exposant devient $exp\ (i\ 2\pi N)$.

Deux images mentales utiles

1. **Boucle qui fait le tour d'un clou**
   Une bande élastique (vecteur) qui fait le tour d'un « clou » (charnière) revient **tordue** d'un angle δ_σ. Cet angle *est* la courbure concentrée.
2. **Compteur de tours**
   Chaque carré de Planck collé sur la charnière est une **case** ; l'angle $\delta\sigma$ dit *combien de cases « ont tourné »*. La somme $\sum A_\sigma \delta_\sigma$, divisée par $8\pi\ \ell_{p,h}^2$, donne le **nombre de tours complets** (cycles) de la géométrie.