

Modèle géométrique de la mécanique classique

fro

November 21, 2025

À propos de ce document

La lecture de ce document peut prêter à confusion pour les lecteurs en formation scientifique : les analogies présentées ici sont exclusivement géométriques et ne constituent ni une réécriture, ni un complément, ni une critique d'un cours de physique. Il s'agit d'une construction interne autonome, dont l'unique objectif est d'explorer une cohérence géométrique abstraite.

Abstract

Résumé

Ce travail présente un modèle géométrique fondé sur une grille continue à structure discrète, immergée dans un espace affine quadrimensionnel. Les nœuds, reliés par des demi-barres homogènes, assurent un équilibre stable et topologiquement invariant. Les perturbations locales, exprimées en termes exclusivement géométriques, donnent naissance à des structures et dynamiques dont certaines présentent des analogies formelles avec des équations classiques, sans prétendre en être l'origine physique.

Le modèle n'introduit aucune loi nouvelle et ne propose aucune description du réel. Il explore uniquement la cohérence interne d'une organisation géométrique simple, dont certains comportements peuvent rappeler, par pure homologie de structure, des formes rencontrées en relativité restreinte ou dans l'électromagnétisme.

Abstract

This work presents a geometric model based on a continuous grid with discrete structure, embedded in a four-dimensional affine space. The nodes, connected by homogeneous half-bars, ensure a stable and topologically invariant equilibrium. Local perturbations, described purely in geometric terms, give rise to structures and dynamics that may formally resemble classical equations, without claiming any physical correspondence.

The model introduces no new physical laws and does not describe reality. It simply explores the internal coherence of a simple geometric organisation, whose behaviours may, by structural analogy alone, echo forms encountered in special relativity or classical electromagnetism.

Résumé d'intention du modèle

toute analogie évoquée n'engage aucune affirmation sur la nature du réel.

Le modèle ne cherche à justifier aucune loi physique existante et ne dérive aucune équation de la physique moderne. Lorsqu'une structure issue du modèle rappelle une équation connue, cette ressemblance n'est qu'une homologie formelle sans conséquence théorique ou expérimentale.

Absence d'interprétation physique

Les termes employés (tension, propagation, etc.) sont exclusivement internes au modèle et n'ont pas vocation à être interprétés dans un cadre physique extérieur.

Les expressions « analogue », « rappelle », « évoque » ou « présente une structure similaire » indiquent uniquement une proximité de forme ou d'organisation mathématique. Elles n'impliquent aucune tentative de description de phénomènes réels.

Résumé d'intention du modèle

Le modèle est autonome, les analogies sont formelles, aucune interprétation physique n'est assumée ni requise.

Structure du document

Structure du document et portée des sections

Le texte est organisé en deux parties clairement distinctes :

1. **Partie I – Formalisation géométrique** Elle définit les objets fondamentaux (P_r, P_a, P_f) , les grandeurs géométriques $(T, \epsilon, W_{\pm})$ et les relations de cohérence. Toutes les équations de cette section peuvent être manipulées de façon mathématiquement rigoureuse dans l'espace affine S , indépendamment de toute interprétation physique.
2. **Partie II – Analogies et pistes de réflexion**

Ainsi, la première partie doit être lue comme un système cohérent autonome, et la seconde comme un espace d'ouverture destiné à stimuler la réflexion.

Avertissement — originalité du modèle

Ne faisant pas partie d'une organisation de recherche, l'auteur ne dispose que des moteurs de recherche publics et des outils d'intelligence artificielle pour vérifier l'existence éventuelle de travaux fondés sur des hypothèses similaires. Malgré ces vérifications, aucun modèle strictement identique n'a été identifié à ce jour. Si toutefois des travaux antérieurs de nature comparable existaient, leur priorité serait naturellement reconnue, et le présent document devrait être considéré comme une redécouverte indépendante.

Note de l'auteur

L'objectif de ce travail n'est pas de proposer une théorie physique, ni de décrire des phénomènes observés, ni de fournir une alternative aux théories établies. Le modèle introduit ici n'a aucune portée expérimentale : il se limite à l'étude interne d'une géométrie discrète et des structures qui émergent de sa dynamique propre.

Le lecteur est invité à considérer ce document comme une exploration conceptuelle autonome : une géométrie interne est définie, des déformations y circulent, et l'on étudie les relations mathématiques que leur cohérence impose. Les éventuelles analogies avec la physique moderne sont strictement formelles et ne constituent ni justification, ni interprétation, ni proposition au sujet de la réalité.

DRAFT – Version préliminaire

Conventions et terminologie

Les termes tels que *onde*, *tension*, *déformation*, *front* ou *propagation* sont employés ici dans un sens strictement géométrique. Ils ne renvoient à aucune dynamique physique tant qu'aucune correspondance avec des observables réelles n'a été définie.

Bien que certains choix terminologiques puissent rappeler des notions issues de la physique moderne, ceux-ci ne servent que de repères formels. Le modèle n'a pas été conçu pour décrire la physique ; il résulte de la cohérence interne d'une géométrie autonome. La physique moderne n'y joue qu'un rôle heuristique, c'est-à-dire qu'elle sert uniquement de guide d'exploration et d'orientation conceptuelle pour structurer cette géométrie.

Ce document doit être lu comme une exploration conceptuelle indépendante, où les rapprochements éventuels relèvent uniquement d'analogies de forme.

- L'espace affine continu est noté S (dimension 4).
- L'espace affine continu S est l'espace de référence du modèle.
- La grille géométrique immergée dans S est notée G .
- Les barres et demi-barres désignent les entités élémentaires de G .
- W représente la quatrième coordonnée de S , utilisée pour l'orientation et la propagation géométrique.
- W n'a pas interprétation temporelle.
- Toutes les grandeurs sont géométriques : aucune unité physique n'est encore introduite à ce stade.
- La charge élémentaire est notée e et désigne par convention la charge **négative** (celle de l'électron). La charge opposée est notée $+e$.
- Les vecteurs sont notés en gras, par exemple $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$.
- Les constantes physiques sont notées en caractères droits : c pour la vitesse de la lumière, h pour la constante de Planck.
- Les unités suivent le S.I. et ne sont pas en italique : m, s, J, N, etc.
- Les textes sont rédigés avec la ponctuation française : espace fine insécable avant « : », « ; », « ? », « ! ».
- Dans ce texte, les termes de *potentiel scalaire* φ et de *potentiel vectoriel* $\mathbf{A}$ sont conservés par commodité terminologique. Ils ne désignent pas des potentiels physiques, mais des variables géométriques dont les propriétés formelles rappellent celles des potentiels électromagnétiques.

Langage et analogies. Certains termes empruntés au vocabulaire physique (comme « tension », « propagation » ou « déplacement ») sont employés ici dans un sens purement géométrique, défini par les relations internes à la grille G . Leur éventuelle analogie avec des notions physiques n'intervient qu'à posteriori. Le mot « propagation » désigne, dans tout le document, un déplacement géométrique interne à la grille G ou à l'une de ses régions (P_f, P_r, P_a), mesuré dans l'espace S . Ce terme n'implique aucune notion de vitesse, de temps ni de mouvement matériel. La notion de *perception* désigne ici la description géométrique qu'un repère R peut formuler à propos de la région P_r . Il ne s'agit pas d'une mesure au sens physique, mais d'un

contexte géométrique local : la manière dont les grandeurs internes de P_r — longueurs, déplacements et tensions — se projettent et s'expriment dans le cadre propre de R . Chaque repère définit ainsi sa propre représentation interne de la dynamique de P_r , sans altérer la géométrie fondamentale de la grille G .

Dans tout le document, les formulations peuvent parfois emprunter la grammaire descriptive de la physique (« se propage », « exerce », « possède », etc.). Ces tournures ne doivent jamais être lues comme des affirmations sur le monde réel. Elles décrivent uniquement le comportement interne des objets du modèle géométrique. Chaque occurrence doit donc **être comprise au sens du modèle**, même lorsqu'aucune précision n'est rappelée localement.

Remarque sur les constantes. Lorsque des symboles tels que c , h ou e apparaissent dans ce document, ils ne désignent pas des constantes physiques mesurées. Ils servent uniquement **d'étiquettes formelles**, choisies pour souligner une analogie structurelle entre le modèle géométrique et certaines expressions issues de la physique. Le modèle n'attribue aucune valeur numérique à ces quantités.

Interprétation des entités. Dans les sections qui suivent, certaines expressions peuvent décrire les objets du modèle comme s'il s'agissait d'entités physiques (« particule », « lumière », « propagation », etc.). Ces termes ne doivent être compris **qu'au sens géométrique défini par le modèle**. Ils désignent des structures internes idéalement formelles, et non des objets du monde réel. Toute description comportant une grammaire physique n'est qu'un outil de lecture visant à rendre la construction plus intuitive.

Contents

I	Formalisation géométrique	8
1	Hypothèses géométriques	9
1.1	Hypothèse 1 : l'espace	9
1.2	Hypothèse 2 : la grille	9
1.3	Hypothèse 3 : la déformation des demi-barres	10
1.4	Hypothèse 4 : le repérage discret et continu	11
1.5	Hypothèse 5 : le front de compression P_r	12
1.5.1	Terminologie : Front et feuillet dans S	13
1.5.2	Dynamique de P_r	13
1.6	Hypothèse 6 : Unité de déplacement S_{pr}	14
1.7	Hypothèse 7 : division de S par le front P_r	14
1.7.1	Division de S en trois régions	14
1.7.2	Repérage relatif dans P_r	14
1.8	Hypothèse 8 : Perturbation I dans P_r	15
1.9	Hypothèse 9 : Longueur dans P_r	17
1.10	Hypothèse 10 : Constante de confinement C	17
1.11	Hypothèse 11 : Conservation de l'énergie dans P_r	18
1.12	Hypothèse 12 : Repère dans P_r	18
1.12.1	Conventions de notation et définitions	18
1.12.2	Perception	18
1.12.3	Remarques fondamentales	19
1.12.4	Perception de la vitesse maximale de I_r dans R	19
1.12.5	Perception de t dans R (Version 1 : Par invariance)	19
1.12.6	Perception de t dans R (Version 2 : Approche géométrique)	20
1.12.7	Perception de t dans R (Version rigoureuse)	20
1.12.8	Propriétés d'un repère propre	20
1.12.9	Invariance relativiste interne $dt = 1$	20
1.13	Synthèse des grandeurs — Partie I : Hypothèses géométriques	21
1.14	Conclusion des hypothèses géométriques	21
1.14.1	Quelle est l'échelle de la grille G dans l'espace affine S	22
1.14.2	La grille G peut-elle se rompre ou se croiser sous l'effet d'une déformation ?	22
1.14.3	La tension τ est-elle identique pour toutes les demi-barres d'une région P_r ?	22
1.14.4	Pourquoi distinguer P_f , P_r et P_a ?	22
1.14.5	Quelle est la différence entre k et ϵ ?	22
1.14.6	Quelle est la différence entre V et C ?	22
1.14.7	La déformation des cellules de G est-elle isotrope ou directionnelle ?	23
1.14.8	Pourquoi employer des termes issus du vocabulaire physique ?	23
1.14.9	Comment interpréter la tension T dans un cadre purement géométrique ?	23
1.14.10	Pourquoi S est-il un espace continu alors que G est une grille discrète ?	24
1.14.11	Pourquoi la tension T est-elle définie avec une dimension de longueur $[L]$ plutôt qu'une force $[F]$?	24

2	Les transformations de Lorentz géométriques	25
2.1	Objectif	25
2.2	Création de l'unité temps géométrique et définition des vitesses C et c	25
2.2.1	Définition de C : vitesse maximale absolue dans P_r	25
2.2.2	Définition de c : perception locale de C dans un repère R	26
2.2.3	Repères comme perspectives géométriques	26
2.3	Lien formel entre le modèle géométrique et la relativité restreinte	27
2.4	Dilatation du temps géométrique	27
2.4.1	But de la section	27
2.4.2	Étape 1 : la décomposition géométrique dans P_r	27
2.4.3	Étape 2 : introduction de la coordonnée interne t	28
2.4.4	Étape 3 : expression de l'intervalle interne de R	28
2.4.5	Étape 4 : description d'un même événement dans un autre repère R_1	28
2.4.6	Étape 5 : définition de l'intervalle géométrique interne	29
2.4.7	Conclusion : dilatation géométrique du temps	29
2.4.8	Projection longitudinale et dilatation apparente	29
2.4.9	Émergence du temps et analogie avec la relativité restreinte	30
2.4.10	Interprétation	30
2.4.11	Vérification des unités	30
2.4.12	Définition de la contraction des longueurs	31
2.4.13	Contraction apparente des longueurs	31
2.4.14	Définition de la contraction des longueurs	32
2.4.15	Projection longitudinale et dilatation apparente	32
2.4.16	Contraction apparente des longueurs	33
2.4.17	Lien géométrique entre P_r , ΔX et la contraction apparente	33
2.4.18	Démonstration de l'équivalence dans la limite des faibles vitesses	33
2.4.19	Implications théoriques et conclusion	34
2.5	Transformation des rapports de propagation et des vitesses	34
2.5.1	Étapes de la démonstration	35
2.5.2	Transformation du rapport V	35
2.5.3	Interprétation	35
2.6	Questions et réponses sur les transformations de Lorentz	36
3	Définition des potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ à partir des hypothèses 1-12	39
3.1	Introduction	39
3.1.1	Définition du potentiel scalaire ϕ (issue de l'Hypothèse 1.3)	40
3.1.2	Définition du potentiel vectoriel $\mathbf{A}$ (issue de l'Hypothèse 1.8)	40
3.2	Contrainte de jauge (issues des Hypothèses 1.11 et 1.3)	40
3.2.1	Contrainte de cohérence locale des potentiels (issue de l'Hypothèse 1.11)	40
3.2.2	Lien avec l'Hypothèse 1.11	41
3.3	Polarisation des ondes (issue de l'Hypothèse 1.8)	41
3.3.1	Définition de la polarisation	41
3.3.2	Types de polarisation	41
3.3.3	Lien avec la grille G (issue de l'Hypothèse 1.2)	41
3.4	Champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ géométrique	41
3.4.1	Champ électrique géométrique $\mathbf{E}$ (issue de l'Hypothèse 1.3)	41
3.4.2	Champ magnétique géométrique $\mathbf{B}$ (issues des Hypothèses 1.2 et 1.4)	42
3.5	Tenseur de cohérence $F_{\mu\nu}$ (issues des Hypothèses 1.3 et 1.8)	42
3.5.1	Définition et construction	42
3.5.2	Lien avec les hypothèses du modèle	42
3.5.3	Condition de cohérence locale	42

3.6	Invariance du tenseur de cohérence entre régions R	43
3.6.1	Principe d'invariance	43
3.6.2	Conséquence géométrique	43
3.7	Invariance du tenseur de cohérence entre régions R	43
3.7.1	Idée générale	43
3.7.2	Définition intuitive du tenseur F	43
3.7.3	Pourquoi F reste invariant	43
3.7.4	Conséquence	44
3.8	Déformations normalisées et rotations des déformations transverses dans P_r	44
3.8.1	Champ $\mathbf{E}$ géométrique : Déformation normalisée	44
3.8.2	Champ $\mathbf{B}$ géométrique : Rotation des déformations transverses	45
3.8.3	Forme locale dans P_r	45
3.8.4	Conséquences pour le modèle	45
3.9	Rôle des potentiels φ et $\mathbf{A}$ comme grandeurs fondamentales	46
3.9.1	Pourquoi φ et $\mathbf{A}$ suffisent	46
3.9.2	Rôle dérivé de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$	46
3.10	Effet Doppler pour les potentiels φ et $\mathbf{A}$ (Hypothèses 1.12, 1.8, et 1.10)	47
3.10.1	Transformation des potentiels	47
3.10.2	Transformation des potentiels	48
3.10.3	Décalage Doppler	48
3.10.4	Conservation de la vitesse $C = 1$	48
3.10.5	Cas d'une onde sphérique	48
3.10.6	Effet sur l'énergie géométrique	48
3.10.7	Principe de moindre action géométrique (issues des Hypothèses 1.3, 1.8 et 1.10)	49
3.10.8	Monopoles magnétiques et cohérence topologique	49
4	L'énergie géométrique dans P_r	51
4.1	l'énergie géométrique dans P_r	51
4.1.1	Introduction	51
4.1.2	Tensions dans les demi-barres et potentiels	51
4.1.3	Énergie géométrique et analogies électromagnétiques	51
4.1.4	Rotationnel discret et cohérence géométrique	52
4.1.5	Quantité conservée : échanges de tension	53
4.1.6	Correspondance avec l'électromagnétisme classique	54
4.1.7	Conservation géométrique de l'énergie	54
4.1.8	Conclusion : électromagnétisme	55
4.1.9	Remarque 1	55
4.2	Localité dans P_r	56
4.2.1	Définition	56
4.2.2	Conséquences	56
4.3	Analyse des biais potentiels de la formalisation géométrique	56
4.3.1	Orientation privilégiée de la grille G	57
4.3.2	Signe de la tension T et symétrie de parité	57
4.3.3	Tension géométrique et gradient de potentiel W	57
4.3.4	Anisotropie locale et liaison entre cellules	57
4.3.5	Énergie élastique et dépendance au signe	57
4.4	Proposition de correction et d'extension tensorielle	58
4.4.1	Déformation tensorielle du réseau G	58
4.4.2	Couplage isotrope au relief $W_{\pm}$	58
4.4.3	Cohérence géométrique entre cellules	58

Part I

Formalisation géométrique

DRAFT – Version préliminaire

Chapter 1

Hypothèses géométriques

1.1 Hypothèse 1 : l'espace

Il existe un **espace vectoriel 4D infini** S , défini sur $\mathbb{R}$, muni d'une base orthogonale $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z, \mathbf{e}_W)$.

- **Structure géométrique** : S est un espace **affine et plat** (sans courbure), où les vecteurs de base sont orthogonaux. **Par convention**, on pose $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ pour tout $i \in \{X, Y, Z, W\}$.
Justification : Seules les longueurs **relatives** entre points de S sont définies ; cette normalisation fixe une échelle arbitraire pour les coordonnées continues.
- **Rôle de l'axe W** : L'axe W est distingué **par convention** comme direction de référence pour la propagation des perturbations dans S (cf. Hypothèse 1.5). *Remarque* : Ce choix équivaut à une rotation de la base dans S , sans perte de généralité.

Implications :

- Les distances entre points de S sont calculées via la métrique euclidienne :

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 + (W_2 - W_1)^2}.$$

1.2 Hypothèse 2 : la grille

L'espace S est muni d'une grille régulière infinie G , dont chaque nœud H_n est relié à ses 16 voisins par des barres droites de longueur fixe D (à l'équilibre). La grille G est plongée dans S sans distorsion, avec des coordonnées continues (X, Y, Z, W) associées à chaque nœud.

On appelle **Cellule** Chaque nœud de la grille G , associé aux seize demi-barres qui le relie à ses voisines.

Avant toute perturbation, G est dans un état d'équilibre parfait :

- Les demi-barres ont une longueur uniforme $D/2$,
- Les longueurs des demi-barres sont identiques et égales à L_0 (longueur d'équilibre),
- L'entropie de G est minimale (proche de zéro), car toutes les cellules C_n sont strictement identiques et indiscernables, correspondant à un seul micro-état possible.

Propriétés de G :

- **Réseau cubique 4D** : Les nœuds H_n sont indexés par $n \in \mathbb{Z}^4$, et chaque nœud est connecté à 16 voisins via des demi-barres de longueur $D/2$.
- **Homogénéité** : Toutes les cellules C_n (nœud + 16 demi-barres) sont structurellement identiques.

- **Indiscernabilité locale** : En l'absence de propriété distinctive, rien ne peut distinguer une cellule C_n d'une cellule C_m .
- **Topologie discrète** : La grille G définit une structure discrète sur S , où chaque nœud H_n est associé à des coordonnées continues $(X, Y, Z, W) \in \mathbb{R}^4$ dans S .
- **Relation entre S et G** : Chaque nœud de la grille G correspond à un point de coordonnées continues dans l'espace affine S ; la grille est ainsi immergée dans S , dont elle hérite la continuité géométrique.
- **Longueur minimale** : La longueur d'une demi-barre, et donc d'une barre entière par symétrie, ne peut jamais être nulle ; cette condition garantit que la structure de la grille G demeure définie en tout point de S .

Interprétation : La grille G représente un état initial **non perturbé**, caractérisé par une géométrie régulière et une absence totale de variations locales. Cette déformation doit être entendue uniquement comme une variation de longueur des demi-barres, sans rotation ni torsion.

1.3 Hypothèse 3 : la déformation des demi-barres

Les demi-barres reliant chaque cellule à ses voisines se comportent comme des ressorts linéaires.

- **Longueur effective** : Chaque demi-barre a une longueur à l'équilibre $L_0 = \frac{D}{2}$, mais sa longueur effective peut varier selon une déformation locale :

$$L = k \cdot L_0, \quad \text{où } k > 0.$$

Le facteur k est borné par des limites mécaniques :

$$k_{\min} < k < k_{\max}, \quad \text{avec } 0 < k_{\min} < 1 < k_{\max}.$$

- **Déformation relative** : La déformation relative dans une demi-barre est définie par :

$$\epsilon = k - 1.$$

- $\epsilon > 0$ correspond à une **extension** ($k > 1$),
- $\epsilon < 0$ correspond à une **compression** ($k < 1$),
- $\epsilon = 0$ correspond à l'état de repos ($k = 1$).

- **Déformation longitudinale T** : On appelle **tension** T la déformation longitudinale d'une demi-barre, définie comme :

$$T = T_0 \epsilon,$$

où :

- $T_0 = L_0 = \frac{D}{2}$ est une **longueur de référence** (longueur à l'équilibre),
- $[T] = [L]$ (car $[T_0] = [L]$ et $[\epsilon] = 1$).

Interprétation géométrique : T représente la **variation de longueur** d'une demi-barre par rapport à sa longueur à l'équilibre. Si $T > 0$, la demi-barre est étirée ; si $T < 0$, elle est comprimée.

- **Cellule homogène** : Chaque nœud de la grille G , associé aux seize demi-barres qui le relient à ses voisines, forme une **cellule élémentaire caractérisée par son homogénéité géométrique**. Cette homogénéité assure la continuité locale des déformations entre cellules, garantissant la cohérence structurelle de l'ensemble du réseau G .

- **Orientation libre :** La grille G s'inscrit dans l'espace affine continu S sans lui imposer de repère particulier ; toute rotation globale de G dans S est équivalente et ne modifie pas ses propriétés géométriques.
- **Symétrie locale :** La symétrie centrale s'applique localement à chaque cellule élémentaire de la grille G ; elle relie les deux demi-barres d'une même barre sans imposer de contrainte globale sur l'ensemble du réseau.
- **Nature géométrique de T :** La tension T ne représente pas une force mais une grandeur géométrique proportionnelle à la longueur $[L]$; elle mesure uniquement l'état d'allongement ou de contraction des demi-barres.
- **Énergie géométrique de déformation :** L'énergie géométrique potentielle élastique stockée dans une demi-barre est proportionnelle au carré de la déformation relative :

$$U = \frac{1}{2} K \epsilon^2 L_0,$$

où K est un **coefficient de raideur** (homogène à une longueur $[L]$), et $L_0 = \frac{D}{2}$ est la longueur à l'équilibre. *Justification :* K représente la raideur effective des demi-barres, exprimée en unités de longueur pour garantir que $[U] = [L]^2$.

- **Stabilité topologique:** Quel que soit l'état local des demi-barres (k_e, T_e) , la connectivité de la grille G est préservée. Aucune déformation, même maximale dans P_r , ne rompt les liens entre nœuds. La structure de G reste donc continue et topologiquement stable dans l'espace S .
- **Seuil de transmission T_s** À chaque nœud H_n de la grille G est associée une tension géométrique totale T_H , résultant de la combinaison des tensions des demi-barres T_{e_i} issues de ce nœud. Le seuil T_s s'applique à la norme totale de ce vecteur de tensions :

$$T_H = \sqrt{\sum_i T_{e_i}^2}.$$

Il existe une valeur critique $T_s > 0$, identique pour tous les nœuds de G , définissant le *seuil de transmission*.

- Si $T_H < T_s$, la déformation reste strictement locale : aucune contrainte géométrique n'impose de réorganisation aux cellules voisines. Le nœud demeure en *régime sous le seuil*, siège d'une agitation interne non propagée.
- Si $T_H \geq T_s$, la cohérence géométrique impose un ajustement des nœuds adjacents : la déformation devient transmissible de proche en proche le long des directions W^+ . Le nœud est alors en *régime au-dessus du seuil*.

Ce seuil T_s détermine ainsi, de manière purement géométrique, la transition entre agitation confinée et propagation dans la région P_r .

Analyse dimensionnelle : Voir Annexe ??.

1.4 Hypothèse 4 : le repérage discret et continu

- **Repérage discret :** Chaque nœud H_n de la grille G est identifié par ses coordonnées discrètes $n = (n_X, n_Y, n_Z, n_W) \in \mathbb{Z}^4$.

- **Repérage continu** : À chaque nœud H_n sont associées des coordonnées continues $(X, Y, Z, W) \in \mathbb{R}^4$ dans l'espace S , définies par :

$$X = n_X \cdot D, \quad Y = n_Y \cdot D, \quad Z = n_Z \cdot D, \quad W = n_W \cdot D,$$

où D est la distance fixe entre nœuds voisins (cf. Hypothèse 1.2). *Justification* : Comme D est uniforme (cf. Hypothèse 1.2) et que la déformation relative $\epsilon = 0$ à l'équilibre (cf. Hypothèse 1.3), cette relation est valable pour tous les nœuds au repos.

- **Origine des coordonnées** : Une cellule C_0 est arbitrairement choisie comme origine des coordonnées continues, définissant ainsi un **repère absolu** R_S dans S . *Rôle* : R_S et C_0 permettent de mesurer des **déplacements relatifs** dans S . *Remarque* : Sans ce repère, aucun déplacement ne pourrait être défini.

La géométrie dans R_S est euclidienne : les distances entre nœuds et les angles entre barres (les demi-barres restant toujours alignées) y sont définis selon les règles usuelles de l'espace euclidien 4D.

1.5 Hypothèse 5 : le front de compression P_r

- **Définition géométrique** : P_r est un **feuillelet plan infini d'épaisseur $\Delta W \neq 0$** selon W , située dans S , caractérisé par :

- Une **compression uniforme** des demi-barres selon la direction W^+ :

$$L = k_c \cdot L_0, \quad \text{avec } 0 < k_c < 1,$$

où $L_0 = D/2$ est la longueur à l'équilibre et k_c est une constante.

- Une **invariance transverse** : les demi-barres dans les directions (X, Y, Z) ne sont pas modifiées.
- **Épaisseur** : Le front a une épaisseur normalisée $\Delta W \neq 0$.
- **Création de P_r** : Dans la grille G , la région P_r correspond à un état de compression dont l'intensité dépasse de plusieurs ordres de grandeur les tensions caractéristiques T_0 et T_s définies dans la structure de référence. Cette compression se manifeste sous la forme d'un *front continu et homogène*, identique en tout point du front et s'étendant sur un nombre indéfini de cellules. Elle ne résulte pas du franchissement local du seuil T_s (voir Hypothèse 1.3), mais d'une réorganisation globale de la grille G , où la cohérence géométrique impose la propagation simultanée de la contraction selon la direction W^+ . Ce front de compression marque la naissance de la région P_r : il constitue un état géométrique premier dans l'espace S . On ne dit rien sur les raisons de l'apparition du front P_r , qui est ici simplement admis comme un fait géométrique initial.

- **Effet sur la grille G** :

- Les cellules de G situées dans P_r subissent la compression k_c sur W .
- En dehors de P_r , les cellules sont à l'équilibre ($k = 1$).

- **Division de l'espace S** : P_r divise S en trois régions :

- P_f : région en amont de P_r (état d'équilibre, $k = 1$),
- P_r : région compressée (seul espace physique, $k = k_c$),
- P_a : région en aval de P_r (retour à l'équilibre, $k = 1$).

- **Statut physique** : Les observables (longueurs, tensions) ne sont définies que dans P_r . P_f et P_a sont des états limites non physiques.
- **Confinement du front** : L'oscillation des nœuds de P_r est strictement confinée au front ; hors du front, les cellules restent dans un état stable (P_f ou P_a) sans accumulation.
- **Largeur constante** : Le front d'onde possède une largeur constante ℓ_f , indépendante de la position et de l'orientation dans S .
- **Transitions locales** : Les transitions $P_f \leftrightarrow P_r$ et $P_r \leftrightarrow P_a$ s'effectuent chacune sur une seule cellule ; aucune condition aux bords n'est imposée.
- **Invariance du front** : La configuration géométrique globale du front P_r reste invariante au cours de sa propagation ; les oscillations locales se compensent de sorte que la structure du front demeure stable dans S .

1.5.1 Terminologie : Front et feuillet dans S

Dans ce modèle, les termes *front* et *feuillet* décrivent deux aspects complémentaires de la région P_r :

- **Front P_r** : Dynamique globale de propagation le long de W^+ .
 - P_r se déplace comme un front plan infini, balayant l'espace S selon W^+ .
 - Ce mouvement divise S en trois régions :
 - * P_f : région en amont (non perturbée, $k = 1$).
 - * P_r : front actif (seule région physique, $k = k_c$).
 - * P_a : région en aval (retour à l'équilibre, $k = 1$).
 - **Variable associée** : S_{pr} (position du front le long de W^+).
- **Feuillet P_r** : Structure locale statique à un instant donné.
 - À l'intérieur du front, P_r apparaît comme un feuillet plan d'épaisseur ΔW .
 - Les observables (longueurs, tensions, déplacements) y sont définies.
 - **Paramètre clé** : $\Delta W = M \cdot D$ (épaisseur en unités de D).

Relation entre les deux concepts :

- Le *front* P_r est la propagation dynamique de la *feuillet* P_r .
- Un observateur *dans* P_r ne perçoit que le feuillet statique, pas son mouvement global.

1.5.2 Dynamique de P_r

- P_r est un **front de compression** se propageant le long de W^+ .
- **Structure locale** : À un instant donné, P_r apparaît comme un **feuillet plan** d'épaisseur $\Delta W = M \cdot D$, où les demi-barres sont uniformément contractées ($k = k_c$).
- **Nature de l'onde P_r** : L'onde P_r ne traduit aucun phénomène physique mais correspond à une oscillation purement géométrique des nœuds de la grille G au sein de l'espace affine continu S .
- **Dynamique globale** : Ce front avance selon W^+ , balayant l'espace S et définissant la région physique où les observables sont mesurables.

Remarque : Pour un observateur *dans* P_r , seule la structure de feuillet (statique) est perceptible.

1.6 Hypothèse 6 : Unité de déplacement S_{pr}

- **Unité de déplacement** : On définit S_{pr} comme la coordonnée représentant le déplacement de P_r le long de W^+ :

$$S_{pr} = W - W_0,$$

où W_0 est une origine fixée dans R_S (cf. Hypothèse 1.4).

- **Convention de référence** : Pour fixer une échelle, on choisit une référence telle que :

$$S_{pr} = N \cdot k_c \cdot L_0 \quad \text{correspond à} \quad S_{pr} = 1 \quad (\text{unité de longueur}),$$

où N est le nombre de cellules contractées, k_c le facteur de compression, et $L_0 = D/2$ la longueur à l'équilibre. Cette convention définit une **unité de longueur** le long de W^+ , notée $D_w = N \cdot k_c \cdot L_0$.

- **Interprétation** :

- S_{pr} est une **longueur** dans S , exprimée en unités de D_w .
- $S_{pr} = 1$ signifie un déplacement de D_w le long de W^+ .
- S_{pr} n'a **aucune signification temporelle** : c'est une mesure de distance purement géométrique le long de W^+ .

1.7 Hypothèse 7 : division de S par le front P_r

1.7.1 Division de S en trois régions

Un **unique front** P_r se propageant le long de W^+ divise l'espace S en trois régions distinctes :

- P_f : **Région non perturbée**, située en amont de P_r selon W^+ .
 - État d'équilibre : $k = 1$, $L = L_0 = D/2$, $T = 0$.
 - Aucune observable physique n'y est définie (état théorique initial).
- P_r : **Région perturbée**, où les demi-barres sont contractées ($0 < k_c < 1$).
 - Seules les observables physiques (longueurs, tensions, déplacements) y sont définies.
 - Toute interaction a lieu exclusivement dans P_r .
- P_a : **Région post-perturbation**, située en aval de P_r selon W^+ .
 - Retour à l'équilibre : identique à P_f mais translaté selon W^+ .
 - Aucune observable physique n'y est définie (état théorique final).

Implications pour la modélisation : Seul P_r est considéré comme un espace physique. P_f et P_a servent uniquement de références géométriques pour décrire l'évolution de S avant et après le passage de P_r .

1.7.2 Repérage relatif dans P_r

Pour décrire les positions dans P_r , on utilise un **point de référence** R_0 situé sur le front P_r , de coordonnée W_0 selon W . Les coordonnées relatives sont définies par :

$$\Delta W = W - W_0, \quad \Delta X = X - X_0, \quad \Delta Y = Y - Y_0, \quad \Delta Z = Z - Z_0.$$

Remarque : Connaitre la valeur de l'épaisseur ΔW de P_r n'est pas nécessaire pour les calculs. Seules les différences de longueur $\Delta W, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ sont utilisées. *Remarque* : P_r est une **zone de transition** entre P_f et P_a .

1.8 Hypothèse 8 : Perturbation I dans P_r

Définition de la tension T : La tension T d'une barre désigne sa longueur géométrique dans S . Elle est proportionnelle au facteur d'allongement relatif ϵ :

$$T = T_0 \epsilon,$$

où T_0 est la longueur commune des barres à l'équilibre (P_f). Les deux grandeurs T et T_0 ont la même dimension $[L]$.

Définition d'une perturbation locale I dans P_r : Dans la région P_r , on introduit une perturbation continue locale I , définie comme une modification des propriétés des cellules C_n de la grille G dans P_r . Cette perturbation est caractérisée par :

- **Nature des différentiels** : Les différentiels dX, dY, dZ et dS_{pr} représentent les écarts de coordonnées des nœuds de la grille G dans l'espace S . Ils n'impliquent aucun déplacement matériel, mais traduisent uniquement les variations géométriques internes de la structure.
- **Une déformation locale** : I induit une variation supplémentaire des longueurs L et des tensions T des demi-barres dans P_r , superposée à la contraction moyenne déjà présente dans cette région.

– À l'équilibre (dans P_f) :

$$L_0 = \frac{D}{2}, \quad T = T_0.$$

– Dans la région contractée P_r :

$$L = k L_0 = k \cdot \frac{D}{2}, \quad 0 < k < 1,$$

où k exprime la contraction moyenne du réseau.

– Sous l'effet local de I :

$$L' = L + \delta L = k \cdot \frac{D}{2} + \delta L,$$

et la tension associée devient

$$T' = T + \delta T, \quad \text{avec } T = T_0 \epsilon.$$

- **Déplacement actif de I** : Le rapport $V = \frac{dL}{dS_{pr}}$ caractérise le déplacement actif de la perturbation I à l'intérieur de la région P_r . Il ne décrit pas le mouvement d'entraînement (passif) de I avec P_r le long de W^+ , mais uniquement sa propagation propre dans les directions transverses (X, Y, Z) , bornée par $C = 1$.
- **Rapport de propagation transverse** : Le rapport V est défini par :

$$V = \frac{dL}{dS_{pr}},$$

où $dL = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$ est la norme du déplacement transverse de I dans les directions (X, Y, Z) , et dS_{pr} est le déplacement de P_r le long de W^+ . Ce rapport, adimensionné, quantifie la progression relative de I par unité de déplacement de P_r .

- **Rapport tension sur longueur** : La tension T d'une barre est proportionnelle au facteur d'élongation k , selon

$$T = T_0 \epsilon,$$

où T_0 représente la tension commune des barres à l'équilibre (état homogène de G).

- **Contrainte de confinement** : Le rapport de propagation transverse V est borné par la constante $C = 1$ (voir Hypothèse 1.10) :

$$V \leq 1.$$

Cette contrainte garantit que I reste confinée dans P_r .

Remarque sur la nature locale de la tension. La relation $T = T_0 \epsilon$ s'applique à chaque demi-barre de la grille G . Autrement dit, chaque arête e reliant deux nœuds peut posséder sa propre longueur $L_e = k_e L_0$ et sa propre tension $T_e = T_0 \epsilon_e$, avec $\epsilon_e = k_e - 1$. Cette distinction est importante : elle signifie que les déformations et tensions ne sont pas globales, mais **localisées** cellule par cellule dans la région P_r . Ainsi, deux cellules voisines peuvent présenter des valeurs différentes de k_e ou T_e . Cependant, la structure de la grille impose que les nœuds communs restent géométriquement cohérents dans l'espace S . Cette contrainte de cohérence, assurée notamment par la forte tension longitudinale selon W , relie implicitement les variations locales et garantit la continuité géométrique de P_r .

Interprétation géométrique :

- I représente une excitation locale dans P_r .
- Les grandeurs δL et δT sont petites devant L et T (approximation linéaire).
- I possède deux composantes de mouvement :
 - un déplacement *passif*, commun avec celui de P_r le long de W^+ ;
 - un déplacement *actif*, libre à l'intérieur de P_r , correspondant à sa propagation transverse dans les directions (X, Y, Z) .

Ces deux déplacements coexistent : I est transportée par P_r tout en pouvant évoluer librement en son sein.

Définition du “vide” dans le modèle.

Définition du “vide” dans le modèle. On note T_W la composante longitudinale de la tension interne (direction W) et $T_\perp$ une mesure moyenne des composantes transverses (X, Y, Z) . On définit le rapport de référence global dans P_r par

$$\kappa_0 \equiv \frac{T_W^{(0)}}{T_\perp^{(0)}}. \quad (1.1)$$

On dira qu'une région $\Omega \subset P_r$ est *vide* si, dans cette région, le rapport entre tension longitudinale et tension transverse reste égal à ce rapport de référence :

$$\forall e \in \Omega, \quad \frac{T_W(e)}{T_\perp(e)} = \kappa_0, \quad (1.2)$$

et si, de plus, les variations spatiales de T_W et $T_\perp$ y sont négligeables (aux échelles considérées).

Autrement dit, le vide correspond aux régions où la structure de tension locale reproduit le rapport global $T_W/T_\perp$ propre au feuillet P_r , sans relief supplémentaire ni confinement particulière.

1.9 Hypothèse 9 : Longueur dans P_r

Soit deux nœuds, l'un dans la cellule $C_n(X_n, Y_n, Z_n, W_n)$ et l'autre dans la cellule $C_m(X_m, Y_m, Z_m, W_m)$. La distance L dans P_r entre ces deux nœuds est simplement la longueur euclidienne **transverse** :

$$L = \sqrt{(X_m - X_n)^2 + (Y_m - Y_n)^2 + (Z_m - Z_n)^2}.$$

Distance totale dans S : La distance totale dans S entre C_n et C_m , incluant la composante le long de W , est notée ΔS et définie par :

$$\Delta S = \sqrt{L^2 + (W_m - W_n)^2},$$

où W_n et W_m sont les coordonnées continues des nœuds le long de W .

Coordonnées normalisées : Pour exprimer cette distance en unités de D_w (cf. Hypothèse 1.6), on introduit :

$$\Delta S_{D_w} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{W_m - W_n}{D_w}\right)^2}.$$

Interprétation :

- L est la distance **transverse** (dans P_r), calculée dans les directions (X, Y, Z) .
- ΔS est la distance **totale** dans S , incluant la composante longitudinale $(W_m - W_n)$.
- ΔS_{D_w} est la distance totale normalisée, exprimée en unités de D_w .

Notes :

- Cette définition est cohérente avec la structure de S (espace continu) et la discrétisation de G (nœuds plongés dans S).
- ΔS capture à la fois le mouvement **transverse** dans P_r et le mouvement **longitudinal** le long de W .

Analyse dimensionnelle : Voir Annexe ??.

1.10 Hypothèse 10 : Constante de confinement C

Définition de C : On définit C comme le **rapport maximal** entre la norme du déplacement transverse dL d'une perturbation I et le déplacement de P_r selon W^+ , tous deux exprimés en unités de S_{pr} :

$$C = \max \frac{dL}{dS_{pr}} \quad \text{avec} \quad dL = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

Contrainte de confinement : Pour toute perturbation I dans P_r , ce rapport satisfait :

$$C \leq 1.$$

Justification :

- C est une constante **intrinsèque à la grille G** , car dL et dS_{pr} sont exprimés dans la même unité S_{pr} (cf. Hypothèse 1.6).
- La valeur $C = 1$ garantit que I reste confinée dans P_r .
- Si $C > 1$, I dépasserait les limites géométriques imposées par la structure de G .

Interprétation géométrique :

- Si P_r se déplace de 1 (unité S_{pr}) le long de W^+ ,
- alors I ne peut pas se déplacer de plus de 1 (unité S_{pr}) dans les directions transverses (X, Y, Z) .

1.11 Hypothèse 11 : Conservation de l'énergie dans P_r

Principe de conservation : Dans P_r , il existe une grandeur **conservée**, nommée **énergie géométrique**, lors des transformations entre repères R et R' (cf. 1.9 et 1.10), en accord avec les principes évoqués au 4. **Propriétés** :

- Cette énergie géométrique est associée aux perturbations I (cf. 1.8).
- Elle reste **invariante** lors du déplacement de P_r selon W^+ .

Remarque : Cette conservation d'énergie géométrique reflète la structure géométrique de la grille G et sera formalisée dans les hypothèses suivantes, en lien avec le chapitre 4.

1.12 Hypothèse 12 : Repère dans P_r

R dans P_r est un repère associé à une perturbation I_r se déplaçant à une **vitesse relative constante** V_i par rapport à P_r .

1.12.1 Conventions de notation et définitions

- V_i : **Vitesse relative** de I_r dans P_r , définie par

$$V_i = \frac{dX}{dS_{pr}},$$

où :

- dX : déplacement transverse de I_r dans (X, Y, Z)
- dS_{pr} : déplacement de P_r le long de W^+

- V_r : **Vitesse relative** de R dans P_r , avec $V_r = V_i$ (car R est lié à I_r)
- dU : **Déplacement total** de R dans S , défini par

$$dU = \sqrt{dS_{pr}^2 + dX^2}$$

- Grandeurs dans P_r : X, Y, Z, S_{pr} (majuscules)
- Grandeurs dans R : x, y, z, t (minuscules), où t remplace W par convention
- *Remarque* : t est ici une **coordonnée de longueur** le long de W^+

1.12.2 Perception

La notion de *perception* désigne ici la description géométrique qu'un repère R peut formuler à propos de la région P_r . Il ne s'agit pas d'une mesure au sens physique, mais d'un **contexte géométrique local** : la manière dont les grandeurs internes de P_r — longueurs, déplacements et tensions — se projettent et s'expriment dans le cadre propre de R . Chaque repère définit ainsi sa propre représentation interne de la dynamique de P_r , sans altérer la géométrie fondamentale de la grille G .

1.12.3 Remarques fondamentales

- R peut être **arbitrairement choisi** dans P_r , à condition que sa vitesse relative constante V_r satisfasse $0 \leq |V_r| \leq 1$
 - *Justification* : Cette contrainte découle de la vitesse maximale $C = 1$ dans P_r (cf. Hypothèse 1.10)
- Un repère R avec $V_r = 0$ est valide, car il n'existe aucun moyen dans R de déterminer sa vitesse absolue dans P_r . Tous les repères R dans P_r sont équivalents si V_r est constant.
- **Coordonnée t dans P_r** : t est une coordonnée de longueur exprimant, selon le repère R , le déplacement géométrique U de la région P_r le long de la direction W^+ .
 - **Définition** : t représente la composante, dans R , du déplacement géométrique U mesuré dans S .
 - **Origine** : $t = 0$ correspond à la position de référence où P_r intersecte R .
 - **Relation** : Lorsque R est fixe dans S , la variation de t est égale au déplacement de P_r le long de W^+ , soit $t = U$.

Cette coordonnée t permettra d'exprimer comment un repère R perçoit localement la dynamique interne de P_r .

1.12.4 Perception de la vitesse maximale de I_r dans R

Pour un incrément $dS_{pr} = 1$ le long de W^+ et un déplacement transverse dX , le déplacement total de R dans P_r est :

$$d\ell = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$$

Dans R , I_r est au repos ($dx = 0$), donc la **distance apparente** entre R et I_r est :

$$di = 1 - dX$$

1.12.5 Perception de t dans R (Version 1 : Par invariance)

Énoncé : Dans un repère R en mouvement dans P_r , t est toujours $t = 1$ quand P_r se déplace de $S_{pr} = 1$.

Démonstration :

- Dans P_r , le déplacement total de R est :

$$d\ell = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$$

- Dans R , I_r est au repos ($dx = 0$), donc le déplacement total dans R est dt
- Comme dX n'est **pas mesurable** dans R , dt doit être indépendant de dX
 - *Preuve par l'absurde* : Si dt dépendait de dX , R pourrait déterminer dX en mesurant dt , ce qui violerait l'équivalence de tous les repères
 - Pour $dX = 0$ (repère au repos), $dt = 1$. Par cohérence, tous les repères perçoivent $dt = 1$

Conclusion : t est **invariant** et toujours égal à 1, quelle que soit la vitesse dX de R .

1.12.6 Perception de t dans R (Version 2 : Approche géométrique)

Énoncé : La perception de t dans R est fixée par la géométrie de P_r et l'absence de repère absolu.

Démonstration :

- **Cas de référence :** Pour un repère R_0 au repos dans P_r ($dX = 0$), on a $dU = 1$, donc $dt = 1$
- **Cas général :** Pour un repère R en mouvement ($dX \neq 0$) :
 - Dans P_r , $d\ell = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$
 - Dans R , I_r est au repos ($dx = 0$), donc dt doit être égal à 1 pour préserver l'équivalence avec R_0
 - *Justification :* Si R mesurait $dt \neq 1$, il pourrait en déduire dX , ce qui est interdit

Interprétation : Tous les repères R perçoivent $t = 1$ quand P_r avance de $S_{pr} = 1$.

1.12.7 Perception de t dans R (Version rigoureuse)

Contexte : On montre que dans tout repère R en mouvement dans P_r , t perçu est toujours $t = 1$ quand P_r avance de $S_{pr} = 1$.

Hypothèses utilisées :

- $dU^2 = dS_{pr}^2 + dX^2$ (métrique de P_r)
- dX est inobservable dans R (principe de relativité)

Démonstration :

1. Dans P_r , $d\ell = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$
2. Dans R , I_r est au repos ($dx = 0$), donc $dt = dT$
3. Comme dX est inobservable, dt doit être indépendant de dX . La seule solution est $dt = 1$

Conclusion : $dt = 1$ est la seule valeur compatible avec l'équivalence des repères.

1.12.8 Propriétés d'un repère propre

- **Dans P_r :** Pendant que P_r parcourt $S_{pr} = 1$, I_r se déplace de dX , donc $d\ell = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$
- **Dans R :** I_r est au repos ($dx = 0$), donc $t = 1$
- **Interprétation :** dX n'est pas observable depuis R , car elle dépend du mouvement absolu de R dans P_r , lequel est indétectable

Conséquence fondamentale : Un seul repère R ne peut pas sonder la structure spatiale de P_r . Pour observer des effets relativistes, il faut comparer deux repères en mouvement relatif.

1.12.9 Invariance relativiste interne $dt = 1$

L'invariance de la coordonnée t reflète la constance moyenne absolue de la tension longitudinale T_W , qui fixe l'étalon interne du feuillet. Elle connecte élégamment :

- la constance moyenne de la tension longitudinale T_W ,
- la relation $T_W/T_\perp = \kappa$,

Symbole	Description	Statut	Unité	Origine
S	Espace vectoriel 4D affine plat	Constante	—	Hypothèse 1.1
G	Grille 4D régulière infinie	Variable	—	Hypothèse 1.2
D	Longueur des barres à l'équilibre	Constante	$[L]$	Hypothèse 1.2
k	Facteur de déformation : $L = k \cdot (D/2)$	Variable	Sans dimension	Hypothèse 1.3
T	Tension dans une demi-barre : $T = T_0(k - 1)$	Variable	$[F]$	Hypothèse 1.3
T_0	Tension d'équilibre dans les demi-barres	Constante	$[F]$	Hypothèse 1.3
P_r	Front plan d'épaisseur ΔW selon W	Variable	—	Hypothèse 1.5
S_{pr}	Déplacement de P_r le long de W^+	Variable	$[L]$	Hypothèse 1.6
L	Distance transverse dans P_r	Variable	$[L]$	Hypothèse 1.9
ΔS	Distance totale dans S	Variable	$[L]$	Hypothèse 1.9
V	Rapport de propagation transverse : $V = dX/dS_{pr}$	Variable	Sans dimension	Hypothèse 1.10
C	Vitesse maximale dans P_r : $C = 1$	Constante	Sans dimension	Hypothèse 1.10
R	Repère dans P_r	—	—	Hypothèse 1.12
t	perception dans R de son déplacement dans S	constante	Longueur	Hypothèse 1.12
V_r	Vitesse relative de R dans P_r	Variable	Sans dimension	Hypothèse 1.12
x, y, z	Coordonnées spatiales dans R	Variable	$[L]$	Hypothèse 1.12

1.13 Synthèse des grandeurs — Partie I : Hypothèses géométriques

Notes :

- S_{pr} est une coordonnée de longueur purement géométrique.
- $C = 1$ est une constante intrinsèque à la grille G .
- t est invariant et vaut 1 quand S_{pr} avance de 1 unité.

1.14 Conclusion des hypothèses géométriques

Les hypothèses précédentes définissent un cadre géométrique fondé sur une grille G continue à structure discrète et sur la dynamique locale d'une région perturbée P_r . Ce cadre repose uniquement sur des relations entre longueurs, tensions et déplacements, sans recours au concept de temps. À partir de cette base, il devient possible de tenter de retrouver, par déduction géométrique seule, les relations et invariances observées dans les descriptions physiques classiques. La suite du travail examinera dans quelle mesure ces structures peuvent engendrer, à la limite continue, les formes associées aux transformations de Lorentz et aux équations de Maxwell.

1.14.1 Quelle est l'échelle de la grille G dans l'espace affine S

Aucune échelle absolue n'est définie. Le pas D caractérise uniquement la maille interne de la grille G . Dans l'espace affine S , seules les différences entre coordonnées ont une signification géométrique : toutes les longueurs sont exprimées en différences, jamais en valeurs absolues.

Ainsi, les propriétés de G sont invariantes par homothétie globale de S . La géométrie repose exclusivement sur les rapports de longueurs et les relations locales entre nœuds, non sur une métrique imposée à S .

Remarque : Cette indépendance d'échelle garantit la compatibilité avec les hypothèses Hypothèse 1.3 (déformations relatives) et Hypothèse 1.9 (longueurs définies dans P_r), qui reposent toutes deux sur des rapports de longueurs sans référence absolue.

1.14.2 La grille G peut-elle se rompre ou se croiser sous l'effet d'une déformation ?

Non. Même si les longueurs locales $L_e = k_e L_0$ et les tensions $\tau_e = \tau_0 \epsilon_e$ varient d'une demi-barre à l'autre, la connectivité de la grille G est préservée. Les nœuds demeurent reliés dans la même configuration topologique, et aucune déformation ne peut rompre une arête ou en créer une nouvelle. Autrement dit, la structure de G reste continue et topologiquement stable dans l'espace euclidien S .

1.14.3 La tension τ est-elle identique pour toutes les demi-barres d'une région P_r ?

Non. Chaque demi-barre de la grille G possède son propre état géométrique, défini par sa longueur $L_e = k_e L_0$ et sa tension associée $\tau_e = \tau_0 \epsilon_e$, avec $\epsilon_e = k_e - 1$. Ces grandeurs sont locales et peuvent différer d'une demi-barre à l'autre selon la configuration des cellules voisines. La cohérence d'ensemble est assurée par la géométrie même de la grille et, dans P_r , par la tension dominante le long de la direction W^+ , qui contraint et équilibre les variations transverses.

1.14.4 Pourquoi distinguer P_f , P_r et P_a ?

Ces trois régions représentent des états géométriques distincts de la grille G :

- P_f : région d'équilibre homogène, où $k = 1$ et $\tau = \tau_0$,
- P_r : région perturbée, où les déformations et tensions varient localement,
- P_a : région d'ajustement, où les effets de P_r se compensent pour revenir vers l'équilibre.

Ces régions ne traduisent pas une évolution temporelle, mais une organisation spatiale successive des états d'équilibre de la grille.

1.14.5 Quelle est la différence entre k et ϵ ?

Le facteur k mesure la contraction géométrique relative dans P_r ($L = kL_0$), tandis que ϵ mesure la déformation absolue ($\epsilon = \frac{L-L_0}{L_0}$). Les deux notations sont équivalentes par $\epsilon = k - 1$, mais leur usage diffère selon le contexte : k décrit la géométrie locale des cellules, tandis que ϵ intervient dans les relations d'énergie géométrique ou de tension.

1.14.6 Quelle est la différence entre V et C ?

Le rapport $V = \frac{dL}{dS_{pr}}$ caractérise l'échelle géométrique locale entre les variations transverses dans P_r et l'avancée du front selon W^+ . La constante C en est la borne supérieure : elle fixe la limite de confinement de toute déformation ou perturbation dans P_r . Ainsi, V décrit un état géométrique local, tandis que C définit une propriété structurelle globale de la grille G .

1.14.7 La déformation des cellules de G est-elle isotrope ou directionnelle ?

La déformation dans P_r est locale et dépend de la configuration géométrique des demi-barres. Dans une approximation homogène, elle peut être considérée comme isotrope (même facteur ϵ dans toutes les directions). Mais dans une description plus fine, chaque direction (X, Y, Z, W) peut avoir sa propre déformation ϵ_i , traduisant des anisotropies locales de la grille.

1.14.8 Pourquoi employer des termes issus du vocabulaire physique ?

Certains termes comme « propagation », « tension » ou « déplacement » sont volontairement conservés pour leur valeur intuitive. Ils désignent uniquement des relations géométriques internes à la grille G , sans faire intervenir de vitesse, de temps ni de mouvement matériel. Ces analogies terminologiques visent uniquement à faciliter la lecture ; elles n'impliquent aucune identification avec des phénomènes physiques.

1.14.9 Comment interpréter la tension T dans un cadre purement géométrique ?

Réponse : Dans ce modèle, la **tension** T est une grandeur géométrique qui quantifie l'écart à l'équilibre d'une demi-barre. Elle est définie comme suit :

- **Définition :**

$$T = T_0 \epsilon,$$

où :

- ϵ est la déformation relative sans dimension ($\epsilon = \frac{L-L_0}{L_0}$),
- $T_0 = L_0 = \frac{D}{2}$ est la longueur de référence (longueur à l'équilibre),
- $[T] = [L]$ (homogène à une longueur).

- **Interprétation intuitive :**

- $T > 0$: la demi-barre est **étirée** ($L > L_0$),
- $T < 0$: la demi-barre est **comprimée** ($L < L_0$),
- $T = 0$: la demi-barre est à l'équilibre ($L = L_0$).

- **Justification :**

- Cette définition exprime la tension comme la mesure géométrique directe de la variation de longueur.
- Elle conserve la cohérence dimensionnelle tout en inversant la convention mécanique classique : ici, une compression correspond à $T < 0$.

- **Lien avec la déformation :**

- T mesure l'allongement ou la contraction d'une demi-barre par rapport à son état d'équilibre.
- Par exemple, si $T = T_0$, alors $\epsilon = 1$ et la demi-barre a doublé de longueur.

- **Relation avec l'énergie géométrique :** L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$U = \frac{1}{2} K \epsilon^2 L_0,$$

où K est le coefficient de raideur (homogène à une longueur $[L]$).

Remarque :

- Cette définition est cohérente avec la dynamique interne de P_r , où les demi-barres subissent des variations géométriques de longueur.
- Elle garantit que $[U] = [L]^2$ et que toutes les grandeurs restent exprimées en termes de longueurs.

1.14.10 Pourquoi S est-il un espace continu alors que G est une grille discrète ?

Réponse : L'espace S est un espace vectoriel 4D **affine et continu**, tandis que la grille G est une structure **discrète** plongée dans S . Cette apparente contradiction est levée par les points suivants :

- Les nœuds de G sont placés aux coordonnées continues $(X, Y, Z, W) = (n_X D, n_Y D, n_Z D, n_W D)$, où $n_i \in \mathbb{Z}$.
- G est une **structure discrète** (nœuds indexés par $\mathbb{Z}^4$), mais ses nœuds peuvent se déplacer **de manière continue** dans S .
- La longueur D est une grandeur **continue** dans S , bien que G reste une grille discrète **plongée** dans S .
- Les perturbations locales (comme P_r) affectent les distances continues dans S tout en préservant la connectivité discrète de G .

Implications :

- Les distances entre nœuds voisins dans G sont fixes (D) à l'équilibre, mais peuvent varier localement sous l'effet de perturbations.
- La métrique euclidienne de S permet de calculer les distances continues entre nœuds, même après déformation.

1.14.11 Pourquoi la tension T est-elle définie avec une dimension de longueur $[L]$ plutôt qu'une force $[F]$?

Réponse : Dans ce modèle purement géométrique, la tension T est une **grandeur géométrique** liée à la déformation des demi-barres, et non une force au sens classique. Voici pourquoi :

- T est définie par $T = T_0 \epsilon$, où T_0 est une **longueur de référence** (typiquement $T_0 = L_0 = D/2$) et ϵ est une déformation relative (sans dimension).
- Ainsi, $[T] = [L]$, car T représente une **variation de longueur** des demi-barres par rapport à leur état d'équilibre.
- L'énergie géométrique de déformation $U = \frac{1}{2} K \epsilon^2 L_0$ a bien une dimension $[L]^2$, car :
 - $[K] = [L]$ (coefficient de raideur géométrique),
 - $[L_0] = [L]$ (longueur à l'équilibre),
 - $[\epsilon] = 1$ (sans dimension).

Conséquence :

- T ne doit pas être interprétée comme une force, mais comme une **mesure de la déformation** des demi-barres.
- Cette approche garantit que toutes les grandeurs du modèle sont exprimées en termes de longueurs $[L]$, conformément aux hypothèses géométriques.

Chapter 2

Les transformations de Lorentz géométriques

2.1 Objectif

Principe d'invariance du front Pr

Le front d'onde Pr est supposé plan : la perturbation se propage de manière cohérente dans la grille G suivant la direction notée W^+ . Les nœuds de G peuvent osciller autour de leurs positions d'équilibre dans S , mais leurs connexions restent inchangées : aucune déformation ne rompt une arête, n'en crée de nouvelle, ni ne modifie la topologie de G . ils ne font que transmettre localement la perturbation. Cette propagation collective conserve la géométrie interne du front et définit l'invariant Sp_r . Cette invariance géométrique découle directement de la cohérence du déplacement du front dans S , et non d'une propriété imposée aux transformations.

On définit deux repères R et R_1 dans P_r . **Objectif** : Étudier comment les grandeurs (longueurs, temps, vitesses) perçues dans R_1 se transforment lorsqu'elles sont perçues dans R .

2.2 Création de l'unité temps géométrique et définition des vitesses C et c

Contexte : Dans P_r , on distingue deux concepts fondamentaux :

- C : la **vitesse maximale absolue** de l'information dans P_r , fixée à $C = 1$ par la géométrie de l'espace.
- c : la **perception locale de C** dans un repère R , qui est **constante et égale à 1** dans R (car dX n'y est pas mesurable).

Cette distinction montre que, quel que soit le déplacement du repère R dans P_r , la vitesse maximale perceptible d'une perturbation I y demeure constante et égale à 1. Autrement dit, c exprime la perception locale de C propre à chaque repère, sans que cette constance résulte d'une propriété absolue de l'espace.

2.2.1 Définition de C : vitesse maximale absolue dans P_r

Définition : C est la **vitesse maximale** à laquelle une information I peut se propager dans P_r .

- Dans P_r , C est **toujours égale à 1** (par convention, cf. Hypothèse 1.6).

- **Justification physique** : $C = 1$ car l'information I ne peut pas quitter P_r . Toute vitesse supérieure à 1 impliquerait un déplacement en dehors de P_r , ce qui est interdit par définition.

Remarque : C n'est pas liée à la lumière, mais à la **limite de propagation de l'information** dans P_r .

2.2.2 Définition de c : perception locale de C dans un repère R

Contexte : Dans un repère R en mouvement dans P_r , la vitesse maximale $C = 1$ est **perçue localement comme c** . **Propriété clé** :

- Dans R , dX n'est **pas mesurable** (cf. Hypothèse 1.12).
- Par conséquent, la perception locale de C dans R s'écrit :

$$c = \frac{1 - dX}{\sqrt{1 + dX^2}}.$$

- Si dX est perçu à la valeur 0 dans tous les R , on obtient $c = 1$. Ainsi, la variation de dX traduit la composante invisible du mouvement dans S , et la vitesse maximale perçue dans R est toujours égale à $C = 1$.
- Ainsi, $c = 1$ est **constante dans R** , mais cette constance est une **propriété de la perception locale**, pas de C elle-même.

Interprétation :

- $C = 1$ est une constante **absolue** dans P_r .
- $c = 1$ est la **perception locale de C** dans R , constante car dX n'y est pas accessible.
- Cela reflète le fait que, dans chaque repère R , la perception de la vitesse maximale est toujours $c = 1$, **non pas parce que C est absolue, mais parce que dX est inobservable localement**.

Analogie avec la relativité restreinte : Quand on dit que "la vitesse de la lumière est constante", ici on dirait plutôt : "**La perception de la vitesse de la lumière est constante dans chaque repère inertiel.**" De même, ici : "**La perception de la vitesse maximale c est constante et égale à 1 dans chaque repère R .**"

2.2.3 Repères comme perspectives géométriques

Un repère R n'est pas un observateur actif, mais une perspective géométrique associée à une perturbation I_r (cf. Hypothèse 1.12). Les grandeurs L et t ne sont pas mesurées au sens classique. Elles sont déduites de la position de I_r dans la grille G , comme la taille apparente d'un objet dépend de l'angle de vue.

Descriptions autonomes Deux repères R et R' fournissent des descriptions simultanées et autonomes d'une même perturbation I , sans échange d'information. Les relations entre ces descriptions (par exemple $L' = L/\gamma$) découlent de la structure de G et de la propagation de P_r , mais ne sont pas accessibles depuis R ou R' individuellement.

Analogie Considérons une allée bordée d'arbres (grille G) :

- Deux observateurs, placés à chaque extrémité, voient les mêmes arbres avec des tailles et espacements apparents différents.
- Aucune communication n'est nécessaire : les perspectives sont déterminées par la géométrie de l'allée et la position de chaque observateur.
- Dans P_r , les repères R et R' décrivent ainsi les perturbations I selon leur propre point de vue, sans interaction.

2.3 Lien formel entre le modèle géométrique et la relativité restreinte

Cette section établit un **lien formel** entre la **contraction des longueurs** dérivée de la structure discrète de la grille G , et les transformations de Lorentz de la relativité restreinte (RR). Nous montrerons que le modèle géométrique propose une **interprétation alternative** des phénomènes relativistes, où les effets comme la contraction des longueurs émergent naturellement des hypothèses sur G et P_r .

2.4 Dilatation du temps géométrique

2.4.1 But de la section

Nous voulons établir comment deux repères internes au feuillet P_r , notés R et R_1 , perçoivent différemment la coordonnée t lorsque l'un se déplace transversalement à vitesse constante par rapport à l'autre.

La démonstration part exclusivement des hypothèses géométriques :

- la structure du feuillet P_r ,
- la décomposition d'un déplacement en composantes longitudinale (selon W^+) et transverse (X, Y, Z),
- l'invariance géométrique (indiscernabilité) entre repères internes.

Aucune notion extérieure n'est introduite.

2.4.2 Étape 1 : la décomposition géométrique dans P_r

Un déplacement élémentaire dans le feuillet P_r possède toujours deux contributions indépendantes :

$$\boxed{dU^2 = dS_{pr}^2 + dL^2}$$

où :

$$dL = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

- dS_{pr} : déplacement du front le long de W^+ (composante longitudinale).
- dL : déplacement propre d'une perturbation dans P_r (composante transverse).
- dU : déplacement total géométrique dans l'espace S .

Cette relation est purement géométrique : elle provient de la métrique euclidienne de S et de l'hypothèse que le feuillet est localement orthogonal à la direction W^+ .

2.4.3 Étape 2 : introduction de la coordonnée interne t

Chaque repère R attache au déplacement longitudinal dS_{pr} une coordonnée propre dt .

Le point clé est le suivant :

Dans tout repère interne, la coordonnée t doit représenter la projection du déplacement longitudinal, indépendante de dL .

Sinon, un repère pourrait mesurer sa vitesse absolue dans P_r , ce qui est interdit (équivalence des repères).

Ainsi, pour un repère au repos transverse ($dL = 0$), on pose par convention :

$$dt = dS_{pr}.$$

Par invariance (Hypothèse 12), cette relation doit rester vraie pour tous les repères, quelle que soit leur vitesse transverse :

$$dt^2 = dS_{pr}^2 \text{ dans tout repère interne.}$$

C'est à ce stade seulement que la coordonnée t acquiert son statut de coordonnée longitudinale interne.

2.4.4 Étape 3 : expression de l'intervalle interne de R

Dans le repère R , on dispose donc de :

$$dS_{pr}^2 = dt^2.$$

En reportant dans la décomposition géométrique du déplacement total :

$$dU^2 = dS_{pr}^2 + dL^2,$$

on obtient immédiatement :

$$dU^2 = dt^2 + dL^2.$$

Cette forme ne fait encore intervenir aucune comparaison avec un autre repère ; elle constitue simplement la relation géométrique interne à R .

2.4.5 Étape 4 : description d'un même événement dans un autre repère R_1

Supposons maintenant qu'un autre repère R_1 décrive le même événement géométrique.

Pour lui, la décomposition analogue vaut :

$$dU^2 = dS_{pr}^2 + dL_1^2 = dt_1^2 + dL_1^2.$$

Comme il s'agit du **même** déplacement total dU , on a d'emblée :

$$dt^2 + dL^2 = dt_1^2 + dL_1^2.$$

Ce résultat est une égalité géométrique, sans interprétation encore.

2.4.6 Étape 5 : définition de l'intervalle géométrique interne

On introduit maintenant la combinaison :

$$S_{pr} := dt^2 - dL^2.$$

Cette quantité représente l'*excès longitudinal* du déplacement géométrique, et non une métrique imposée : c'est simplement la combinaison qui devient identiquement

$$S_{pr} = dS_{pr}^2 - dL^2.$$

Comparant les descriptions dans les deux repères :

$$dt^2 - dL^2 = dt_1^2 - dL_1^2,$$

on obtient l'invariance recherchée.

$S_{pr} = dt^2 - dL^2 \text{ est invariant entre tous les repères internes.}$

Cette invariance n'était pas postulée : elle résulte de la structure géométrique de P_r et de la définition même de t .

2.4.7 Conclusion : dilatation géométrique du temps

L'égalité

$$dt^2 - dL^2 = dt_1^2 - dL_1^2$$

montre que, si un repère se déplace transversalement ($dL \neq 0$), il observe pour l'autre un temps dt_1 différent du sien.

Comme $dt^2 = dS_{pr}^2$ est fixé pour tous les repères, on en déduit :

$$dt_1^2 = dt^2 - (dL^2 - dL_1^2).$$

En particulier, si le repère R_1 voit le repère R se déplacer à vitesse transverse $V = dL/dt$, alors :

$$dt_1 = \frac{dt}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

La dilatation du temps interne du feuillet P_r émerge ainsi directement :

$dt_1 = \gamma dt, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}},$

où toutes les grandeurs sont de nature géométrique et de dimension $[L]$.

Remarque : cette égalité exprime la **stabilité métrique** de la grille G . Les transformations reliant R et R_1 conservent la valeur de S_{pr} , car les déformations locales des demi-barres préservent la norme quadratique associée à la géométrie interne de P_r , sans faire appel à une notion de temps ou de vitesse relative.

2.4.8 Projection longitudinale et dilatation apparente

Partons de l'invariance locale de l'intervalle dans P_r :

$$dt^2 - L^2 = dt_1^2 - L_1^2.$$

Considérons le cas où, dans la région R_1 , la déformation est purement longitudinale ($L_1 = 0$). On obtient alors :

$$dt_1^2 = dt^2 - L^2.$$

En prenant les valeurs positives :

$$dt_1 = dt \sqrt{1 - \frac{L^2}{dt^2}}.$$

Cette relation montre que la composante longitudinale dt_1 est inférieure à dt dès qu'une partie de la déformation se projette transversalement dans P_r . Autrement dit, plus la déformation s'étend dans les directions transverses, plus la composante longitudinale apparente se contracte.

Si l'on définit le rapport

$$v = \frac{L}{dt},$$

on peut écrire :

$$dt_1 = dt \sqrt{1 - v^2}.$$

Cette expression formalise une **dilatation apparente des longueurs longitudinales** : elle traduit une simple projection géométrique de la déformation totale dans P_r , sans qu'il soit nécessaire d'introduire la notion de temps ou de vitesse au sens relativiste.

2.4.9 Émergence du temps et analogie avec la relativité restreinte

Dans le modèle géométrique, il n'existe pas de variable temporelle indépendante. Le **temps géométrique perçu** dans R émerge comme la mesure de la composante *longitudinale* de la déformation dans P_r . Autrement dit, ce que l'on nomme "temps" correspond à la longueur effective dt associée à la direction privilégiée W .

Ainsi, la relation précédente :

$$dt_1 = dt \sqrt{1 - \frac{L^2}{dt^2}},$$

peut s'interpréter comme une **dilatation apparente du temps** : lorsqu'une déformation s'étend dans les directions transverses, la composante longitudinale disponible pour la perception dans R diminue d'un facteur $\sqrt{1 - v^2}$, avec $v = L/dt$.

Cette expression est formellement identique à la dilatation du temps de la relativité restreinte, mais ici son origine est purement géométrique : elle résulte d'une **projection dans la grille G** et non d'une transformation de l'espace-temps. Le "ralentissement" observé n'est donc pas un effet physique du mouvement, mais une conséquence directe de la répartition des déformations entre directions longitudinales et transverses dans P_r .

On peut ainsi dire que le temps géométrique, dans ce modèle, **n'est pas une dimension fondamentale**, mais une **émergence métrique** liée à la cohérence interne des déformations de la grille.

2.4.10 Interprétation

- dt est la durée mesurée dans R entre deux événements co-localisés dans ce repère.
- dt_1 est la durée mesurée dans R_1 pour les mêmes événements vus en mouvement.
- La relation $dt_1 = \frac{dt}{\sqrt{1-v^2}}$ exprime que le rythme d'un repère en mouvement apparaît ralenti depuis R .

2.4.11 Vérification des unités

- dt et dt_1 : $[L]$ (longueurs).
- $v = \frac{dX}{dt}$: sans dimension (rapport de deux longueurs).
- La formule $dt_1 = \frac{dt}{\sqrt{1-v^2}}$ est homogène et cohérente.

2.4.12 Définition de la contraction des longueurs

Dans le modèle géométrique, la **longueur contractée** L d'un segment transverse dans un repère R en mouvement relatif est définie par :

$$L = L_T - \Delta X,$$

où :

- $L_T = \sqrt{\Delta S_{pr}^2 + \Delta X^2}$ est la **longueur totale** dans P_r , incluant les composantes longitudinale (ΔS_{pr}) et transverse (ΔX).
- ΔX est le **déplacement transverse** dans les directions (X, Y, Z) .
- ΔS_{pr} est le **déplacement de P_r** le long de W^+ , normalisé à 1 (Hypothèse 1.6).

Interprétation géométrique :

- L représente la **longueur apparente** d'un segment transverse ΔX dans un repère R en mouvement relatif par rapport à P_r .
- Cette contraction résulte de la **structure discrète et orientée de G** et de la **propagation de P_r** (Hypothèses 1.2 et 1.5).
- Dans un repère au repos ($\Delta X = 0$), on a $L = L_T = \Delta S_{pr}$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de contraction apparente.

Exemple : Pour un déplacement transverse $\Delta X = 0.5$ et $\Delta S_{pr} = 1$, on a :

$$L_T = \sqrt{1^2 + 0.5^2} = \sqrt{1.25} \approx 1.118, \quad \text{donc} \quad L \approx 1.118 - 0.5 = 0.618.$$

Cela montre que la longueur apparente L est plus courte que ΔX , reflétant une contraction similaire à celle observée en relativité restreinte.

2.4.13 Contraction apparente des longueurs

Partons de l'invariance dans P_r :

$$dt^2 - L^2 = dt_1^2 - L_1^2.$$

Choix de mesure (analogue de la « simultanéité »). Pour mesurer une longueur purement transverse dans R , on impose une *mesure synchronisée* :

$$dt = 0 \quad (\text{pas de composante longitudinale dans } R).$$

L'invariance donne alors

$$-L^2 = dt_1^2 - L_1^2 \implies L^2 = L_1^2 - dt_1^2.$$

Forme compacte. En posant le rapport

$$u = \frac{dt_1}{L_1},$$

on obtient la **contraction apparente** :

$$L = L_1 \sqrt{1 - u^2}.$$

Lecture géométrique. Dans R_1 , le même segment possède une part transverse L_1 et une part longitudinale dt_1 . La mesure synchronisée dans R (i.e. $dt = 0$) projette ce déplacement sur la seule direction transverse : la composante longitudinale dt_1 “mange” une portion de la longueur perçue, d’où le facteur $\sqrt{1 - u^2}$.

Conclusion. *Par simple projection géométrique*, on retrouve formellement la même écriture que la forme standard de la contraction des longueurs, symétrique de la « dilatation apparente » obtenue précédemment pour la composante longitudinale.

2.4.14 Définition de la contraction des longueurs

Dans la géométrie du modèle, un segment de la grille G possède toujours deux composantes :

- une composante **longitudinale** selon W^+ , associée à la propagation de P_r , notée ΔS_{pr} ;
- une composante **transverse** dans les directions (X, Y, Z) , notée ΔX .

Ces deux composantes forment un déplacement total dans P_r dont la longueur géométrique est :

$$L_T = \sqrt{(\Delta S_{pr})^2 + (\Delta X)^2}.$$

où L_T est la **longueur intrinsèque** dans P_r , mesurant la distance géométrique totale entre nœuds avant toute perception dans R . Cette expression provient directement du caractère euclidien de la métrique locale dans P_r : les déformations longitudinales et transverses sont orthogonales et s’additionnent quadratiquement.

Lorsqu’un observateur associé à une région R ne perçoit que la partie transverse ΔX , la longueur apparente qu’il attribue au segment est :

$$L = L_T - \Delta X.$$

Cette différence traduit la **contraction apparente des longueurs** : une partie du déplacement réel est “cachée” dans la propagation de P_r , et n’est donc pas perçue dans R .

Lien avec la forme classique : si l’on définit un rapport transverse

$$v = \frac{\Delta X}{\Delta S_{pr}},$$

alors :

$$L = \Delta S_{pr} (\sqrt{1 + v^2} - v).$$

Pour des petites valeurs de v , cette expression se comporte comme une contraction proportionnelle à $v^2/2$, et pour les grandes valeurs, la dépendance devient non linéaire. Dans le cadre perceptif de R , cette relation joue le rôle analogue à la **contraction des longueurs relativiste**, mais elle provient ici d’une simple **projection géométrique** dans la grille G , sans recours au temps ni à l’espace-temps.

2.4.15 Projection longitudinale et dilatation apparente

$$dt_1 = dt \sqrt{1 - v^2}$$

ou, sous sa forme équivalente :

$$dt = \frac{dt_1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

2.4.16 Contraction apparente des longueurs

$$L = L_1 \sqrt{1 - v^2}$$

ou, de manière équivalente :

$$L_1 = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

2.4.17 Lien géométrique entre P_r , ΔX et la contraction apparente

La contraction des longueurs ne provient pas ici d'un effet dynamique ou temporel, mais d'une **géométrie de projection** entre la direction de propagation de P_r et les directions transverses dans S . Lorsqu'un repère R se déplace dans P_r , ses axes ne restent plus strictement orthogonaux à la direction W^+ . L'orientation relative entre R et W^+ devient **non orthogonale**, ce qui modifie la projection des longueurs transverses ΔX sur la trajectoire effective de P_r .

Ainsi, la longueur L mesurée dans R traduit une simple **projection géométrique** :

$$L = L_T - \Delta X,$$

où la différence entre la longueur totale L_T et le déplacement transverse ΔX correspond à la contraction apparente observée dans R .

Cette approche montre que la contraction résulte directement de la géométrie discrète et orientée de G , sans faire appel à la notion de temps ni à des effets cinématiques. Elle prépare naturellement la correspondance avec la **formule relativiste classique**, où le même phénomène prend une expression temporelle.

Remarque. On reconnaît ici la structure formelle des transformations dites de Lorentz, obtenue sans recours à la notion de vitesse ni à aucune grandeur autre que la longueur [L].

Analogies entre les grandeurs : Pour établir un lien formel entre les deux modèles, nous posons les correspondances suivantes :

Modèle géométrique	Relativité restreinte (RR)	Relation
ΔX	L_0 (longueur propre)	$\Delta X \leftrightarrow L_0$
ΔS_{pr}	$c \Delta t$ (déplacement temporel)	$\Delta S_{pr} \leftrightarrow c \Delta t$
$L_T = \sqrt{\Delta S_{pr}^2 + \Delta X^2}$	$\sqrt{(c \Delta t)^2 + \Delta x^2}$	$L_T \leftrightarrow \sqrt{(c \Delta t)^2 + \Delta x^2}$
$L = L_T - \Delta X$	$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$	Voir section 2.4.14
$V = \Delta X / \Delta S_{pr}$	v/c (vitesse relative normalisée)	$V \leftrightarrow v/c$

2.4.18 Démonstration de l'équivalence dans la limite des faibles vitesses

Pour vérifier la cohérence du modèle avec la relativité restreinte dans le domaine des faibles vitesses ($v \ll 1$), développons les relations obtenues pour la contraction des longueurs et la dilatation du temps.

Rappels des relations fondamentales :

$$L_1 = L \sqrt{1 - v^2}, \quad dt_1 = \frac{dt}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Développement pour $v \ll 1$: En utilisant l'approximation du premier ordre au second terme de Taylor :

$$\sqrt{1-v^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2}.$$

On obtient alors :

$$L_1 \approx L \left(1 - \frac{v^2}{2}\right), \quad dt_1 \approx dt \left(1 + \frac{v^2}{2}\right).$$

Interprétation :

- La longueur observée dans le repère en mouvement est légèrement plus courte ($-\frac{v^2}{2}$).
- La durée mesurée dans le repère en mouvement est légèrement plus longue ($+\frac{v^2}{2}$).

Conclusion : Ces deux corrections sont analogues à celles que prévoit la relativité restreinte dans la limite des vitesses faibles. Autrement dit, dans cette limite, le modèle géométrique et la RR donnent des résultats **analogues**.

2.4.19 Implications théoriques et conclusion

Cette section a montré que la relation $L = L_T - \Delta X$, dérivée de la structure discrète de la grille G , constitue une **formulation géométrique discrète** de la contraction des longueurs en relativité restreinte. Bien que les expressions mathématiques diffèrent, les deux modèles traduisent des **effets similaires** — une contraction des longueurs en mouvement relatif — et convergent vers des résultats comparables dans la limite des faibles vitesses.

Résumé des points clés :

- La relation $L = L_T - \Delta X$ exprime une **contraction des longueurs transverses** dans un repère en mouvement, analogue à la contraction des longueurs en relativité restreinte.
- Les deux modèles prédisent une **réduction des longueurs** avec la vitesse, mais selon des dépendances différentes (linéaire dans le modèle, quadratique en RR).
- Dans la limite des **faibles vitesses**, les deux modèles **convergent strictement** vers les mêmes résultats, suggérant que le modèle peut être vu comme une **discrétisation** de la RR.
- Cette équivalence ouvre des perspectives sur la façon dont les **propriétés relativistes** pourraient émerger de structures géométriques discrètes plus fondamentales.

Perspectives :

- Le modèle suggère que les **transformations de Lorentz** peut émerger de principes géométriques premiers.
- Il propose une **interprétation géométrique** de la contraction des longueurs, où cet effet découle directement de la structure discrète de G et de la propagation de P_r .

2.5 Transformation des rapports de propagation et des vitesses

Distinction fondamentale

- Dans P_r : $V = \frac{dX}{dS_{pr}}$ est un **rapport de déplacement transverse** (adimensionné).
- Dans R : $v = \frac{dX}{dt}$ est une **vitesse classique**, où t est le temps propre (Section 2.4).

2.5.1 Étapes de la démonstration

Nous partons des transformations déjà établies dans la Section 2.4 :

$$t' = \gamma(t - vX), \quad (2.1)$$

où

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

La coordonnée spatiale se transforme simplement par :

$$X' = X - vt, \quad (2.2)$$

car R_1 se déplace à vitesse v par rapport à R le long de X .

2.5.2 Transformation du rapport V

Pour une perturbation I avec $V = \frac{dX}{dS_{pr}}$ dans R , le rapport transformé V' dans R_1 s'obtient comme suit : 1. Exprimons dX' et dS'_{pr} en fonction de dX et dS_{pr} :

$$dX' = dX - v dt \quad \text{et} \quad dS'_{pr} = dS_{pr} \quad (\text{car } S_{pr} \text{ est invariant}).$$

2. Comme $dt = dS_{pr}$ dans R (car t perception le déplacement de P_r), nous avons :

$$V' = \frac{dX'}{dS'_{pr}} = \frac{dX - v dt}{dS_{pr}} = \frac{dX/dS_{pr} - v}{1} = V - v.$$

Mais cette étape est incomplète car elle ignore la dilatation du temps géométrique.

3. En utilisant la transformation complète de t (Éq. 2.1), nous écrivons :

$$dS'_{pr} = dt' = \gamma(dt - v dX).$$

Le rapport V' devient alors :

$$V' = \frac{dX'}{dS'_{pr}} = \frac{dX - v dt}{\gamma(dt - v dX)} = \frac{V - v}{1 - Vv}. \quad (2.3)$$

2.5.3 Interprétation

- La formule (2.3) est dérivée directement de la structure de G .
- Elle préserve la limite $V' \leq 1$ (Hypothèse 1.10).
- Elle est formellement analogue la transformation de la RR, mais ici V et V' sont des rapports géométriques dans P_r .

Pèges de lecture à éviter

Cette courte section rassemble les confusions les plus fréquentes auxquelles un lecteur non familier avec cette géométrie pourrait être exposé. Chaque réponse rappelle la position exacte du modèle.

1. Ce modèle reproduit-il la relativité restreinte ?

Non. Il produit des expressions mathématiques formellement similaires, mais les grandeurs manipulées (longueurs internes, projections de déformations, paramètre d'avancement dans W) n'ont aucune signification physique. Il ne s'agit pas d'une théorie relativiste.

Le paramètre t est-il un temps physique ?

Non. t représente une *longueur interne* mesurée dans la direction W^+ . Il sert de paramètre d'évolution car il mesure le déplacement du front P_r . Aucune notion temporelle physique ne lui est associée.

La constante $C = 1$ est-elle une vitesse limite ?

Non. $C = 1$ est une *borne géométrique* : une déformation transverse ne peut dépasser l'avancement longitudinal du front. Ce n'est pas une vitesse et n'a aucune interprétation cinématique physique.

Le modèle fait-il des prédictions expérimentales ?

Non. Le modèle est un cadre géométrique conceptuel. Les ressemblances formelles avec des théories physiques n'impliquent aucune équivalence physique et ne conduisent à aucune prédiction testable.

2.6 Questions et réponses sur les transformations de Lorentz

Cette section regroupe plusieurs clarifications techniques concernant les transformations formelles qui apparaissent dans le modèle. Les réponses se limitent strictement aux conséquences internes des hypothèses géométriques. Toute mention de phénomènes connus de la physique n'apparaît que sous forme d'analogie de structure.

FAQ — Conditions d'émergence des transformations de Lorentz

Quelles conditions la grille doit-elle satisfaire pour que les transformations de Lorentz émergent ?

Réponse : Les transformations de Lorentz émergent automatiquement dès que la grille G satisfait simultanément les quatre propriétés suivantes :

1. **Homogénéité locale** Toutes les demi-barres ont la même longueur de tension et obéissent aux mêmes règles de déformation. Cela garantit l'invariance de l'expression interne :

$$S_{pr} = dt^2 - L^2,$$

qui sert ici de *norme géométrique* pour la construction du chemin réel.

2. **Propagation régulière du front** P_r L'avancement de P_r le long de W^+ est régulier. Cette régularité définit une échelle longitudinale utilisée comme « paramètre d'évolution » dans chaque repère géométrique R .
3. **Orthogonalité entre W et (X, Y, Z)** Les déformations se décomposent naturellement en composantes longitudinales et transverses, permettant la reconstruction géométrique :

$$L = L_T - \Delta X.$$

4. **Borne géométrique sur les déformations** Une déformation transmise d'un nœud au suivant ne peut excéder l'avancement longitudinal associé au déplacement de P_r . Cette contrainte introduit une borne géométrique notée $C = 1$ dans le modèle, sans interprétation de vitesse physique.

Sous ces quatre conditions — et sans aucune hypothèse physique — la forme mathématique des transformations de Lorentz apparaît automatiquement.

Pourquoi $C = 1$ apparaît-il comme une borne géométrique ?

Réponse : La valeur $C = 1$ n'est pas une vitesse physique. Elle exprime simplement que la part transverse d'une déformation ne peut excéder la part longitudinale permise par l'avancement du front P_r .

C'est une contrainte de cohérence interne qui empêche une perturbation de sortir de la région où les règles du modèle sont définies.

Analogie formelle : Le rôle d'une constante limite rappelle celui rencontré en relativité, mais ici la correspondance est purement structurelle.

Comment interpréter t s'il ne s'agit pas d'un temps ?

Réponse : La grandeur t représente une *longueur interne* mesurée dans la direction W^+ . Elle sert de paramètre d'évolution car elle mesure l'avancement du front P_r .

Elle ne possède aucune interprétation temporelle physique. Son rôle est analogue à celui d'un « temps propre » dans des théories continues, mais uniquement par analogie formelle.

Que signifie la relation $L = L_T - \Delta X$?

Réponse : Cette expression décrit la manière dont une déformation du réseau se répartit entre composantes longitudinales et transverses. Lorsque la perturbation se déplace dans un repère incliné, la composante transverse ΔX doit être compensée dans la reconstruction :

$$L = L_T - \Delta X.$$

Ce n'est pas une contraction physique : c'est une simple règle de *projection géométrique interne*.

Analogie formelle : La structure de cette expression évoque des formules de type relativiste, mais les mécanismes sous-jacents sont différents.

Pourquoi obtient-on des formules identiques à celles de Lorentz ?

Réponse : Les transformations de Lorentz apparaissent comme une conséquence mathématique des trois ingrédients internes suivants :

- l'invariance locale de la norme interne

$$dt^2 - L^2;$$

- les règles de projection entre directions longitudinales et transverses ;
- la borne géométrique $C = 1$ sur les déformations.

Ces conditions suffisent pour que les facteurs de type $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ apparaissent automatiquement.

Important : Ces structures n'ont aucune interprétation physique dans ce cadre.

Quel est le lien avec la relativité restreinte ?

Réponse : Le lien est strictement *formel*.

- Dans la relativité restreinte, les quantités concernent des mesures d'espace-temps physiques.
- Ici, il s'agit de longueurs internes de la grille et de déformations géométriques.

La similarité des équations est une coïncidence structurelle due au choix des règles internes.

Comment cela prépare-t-il l'introduction des potentiels ?

Réponse : Les transformations formelles obtenues garantissent que les quantités telles que la phase interne φ ou le vecteur $\mathbf{A}$ se transforment de manière cohérente entre repères R .

Ceci est indispensable pour l'écriture :

- d'équations différentielles internes, - de structures similaires à des équations de jauge, - et de la dynamique EMmod.

Aucune interprétation physique n'est introduite.

Pourquoi le modèle n'utilise-t-il pas la notion d'observateur ?

Réponse : Le modèle ne définit jamais d'observateurs physiques. Il se contente de repères géométriques R associés à des perturbations internes.

Cela permet de rester *strictement interne* à la grille, sans introduire de concepts extérieurs.

Quelles sont les limites de ce lien formel avec Lorentz ?

Réponse :

- Les transformations obtenues ne portent aucune signification physique.
- Les grandeurs manipulées sont des longueurs internes, pas des mesures d'espace-temps.
- Le modèle ne fournit aucune prédiction testable.
- Toute ressemblance avec la relativité restreinte est purement mathématique, liée à la structure du feuillet P_r .

Chapter 3

Définition des potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ à partir des hypothèses 1-12

3.1 Introduction

Ce document suit une **démarche géométrique** qui examine comment certaines **structures internes de la grille** peuvent conduire, par analogie formelle, à des expressions rappelant les **équations classiques de l'électromagnétisme**. Ci-dessous, la **stratégie suivie** pour y parvenir.

1. **Postuler une structure discrète** : Imaginer un réseau 4D régulier (grille G) comme support des phénomènes physiques (Hypothèse 1.1 et Hypothèse 1.2).
2. **Définir les éléments fondamentaux** :
 - Introduire une perturbation P_r se propageant dans ce réseau (Hypothèse 1.5)
 - Définir des potentiels scalaires φ et vectoriels $\mathbf{A}$ représentant les états du réseau (Hypothèse 1.3 et Hypothèse 1.8)
3. **Établir les règles de propagation** :
 - Décrire comment ces potentiels se propagent dans le réseau (Hypothèse 1.10)
 - Imposer des conditions de continuité aux nœuds (Hypothèse 1.4)
4. **Identifier les relations fondamentales** :
 - Trouver la relation entre φ et $\mathbf{A}$ via une condition de jauge (Hypothèse 1.11)
 - Définir les champs dérivés $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ (Hypothèse 1.3 et Hypothèse 1.2)
5. **Construire le tenseur fondamental** :
 - Combiner les champs pour former le tenseur $F_{\mu\nu}$
 - Montrer que sa structure correspond à celle de l'électromagnétisme

Cette approche illustre que, sur la base de principes géométriques élémentaires, il est possible de faire apparaître une structure qui partage formellement les équations de l'électromagnétisme, sans prétendre décrire les phénomènes physiques réels.

3.1.1 Définition du potentiel scalaire φ (issue de l'Hypothèse 1.3)

- **Origine** : Le potentiel scalaire φ est associé à la tension T dans les demi-barres de P_r sur W (Hypothèse 1.3 : $T = T_0 \epsilon$).
- **Interprétation** : φ représente les variations de tension le long des demi-barres, liées à la compression de P_r le long de W^+ .
- **Équation d'onde** :

$$\partial_{S_{pr}}^2 \varphi - C^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

où $\nabla^2 = \partial_X^2 + \partial_Y^2 + \partial_Z^2$ (Laplacien transverse dans P_r).

Analyse dimensionnelle : Voir Annexe ??.

3.1.2 Définition du potentiel vectoriel $\mathbf{A}$ (issue de l'Hypothèse 1.8)

- **Origine géométrique** : Le potentiel vecteur $\mathbf{A} = (A_X, A_Y, A_Z)$ décrit les déformations transverses des demi-barres dans les directions (X, Y, Z) (Hypothèse 1.8 : mouvement actif des perturbations I).
- **Interprétation** :
 - Chaque composante A_X, A_Y, A_Z représente une déformation transverse dans une direction de P_r .
 - $\mathbf{A}$ permet de décrire la polarisation des ondes.
- **Équation d'onde** :

$$\partial_{S_{pr}}^2 \mathbf{A} - C^2 \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Analyse dimensionnelle : Voir Annexe ??.

3.2 Contrainte de jauge (issues des Hypothèses 1.11 et 1.3)

3.2.1 Contrainte de cohérence locale des potentiels (issue de l'Hypothèse 1.11)

- **Origine** : L'Hypothèse 1.11 introduit une notion d'énergie géométrique liée aux variations de tension dans les demi-barres.
- **Contrainte** : Pour assurer la conservation de l'énergie géométrique et la cohérence des potentiels :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(n)} \partial_{n_e} (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{t}_e) + \frac{1}{C^2} \partial_{S_{pr}} \varphi = 0,$$

où $\mathbf{t}_e$ est le vecteur tangent à la demi-barre e .

- **Interprétation** :
 - Établit un couplage entre φ et $\mathbf{A}$ afin d'éviter les degrés de liberté redondants.
 - Garantit la **cohérence interne** de la propagation des déformations et la **conservation locale de l'énergie géométrique** dans P_r .

3.2.2 Lien avec l'Hypothèse 1.11

- **Conservation de l'énergie géométrique** : La tension T dans les demi-barres s'exprime, à la limite continue, comme la somme des variations longitudinales et transverses :

$$T = T_0 (\partial_{S_{pr}} \varphi + \alpha \nabla \cdot \mathbf{A}),$$

où α est un coefficient de couplage sans dimension caractérisant la sensibilité transverse des demi-barres.

- **Rôle de la jauge** : Cette contrainte couple φ et $\mathbf{A}$ de façon à assurer que l'énergie géométrique associée aux tensions locales reste conservée dans chaque cellule de P_r .

3.3 Polarisation des ondes (issue de l'Hypothèse 1.8)

3.3.1 Définition de la polarisation

- **Origine (Hypothèse 1.8)** : Les perturbations I dans P_r ont un mouvement actif dans (X, Y, Z) .
- **Polarisation** : La direction et l'amplitude de $\mathbf{A}_\perp$ définissent la polarisation :

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{k}},$$

où $\hat{\mathbf{k}}$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation.

3.3.2 Types de polarisation

Type	Description
Linéaire	$\mathbf{A}_\perp$ a une seule composante dominante
Circulaire	Deux composantes de $\mathbf{A}_\perp$ avec un déphasage de $\pi/2$ et amplitudes égales
Elliptique	Deux composantes avec un déphasage quelconque et amplitudes différentes

3.3.3 Lien avec la grille G (issue de l'Hypothèse 1.2)

- **Structure discrète (Hypothèse 1.2)** : La polarisation est définie par les composantes de $\mathbf{A}$ le long des arêtes de G , reflétant l'anisotropie discrète de la grille.

3.4 Champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ géométrique

3.4.1 Champ électrique géométrique $\mathbf{E}$ (issue de l'Hypothèse 1.3)

- **Définition** :

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial_{S_{pr}} \mathbf{A}$$

- **Interprétation** :

- $\nabla \varphi$: Gradient du potentiel scalaire (lié aux variations de tension, (Hypothèse 1.3)).
- $\partial_{S_{pr}} \mathbf{A}$: Variation spatiale dans P_r du potentiel vecteur (lié aux déformations locales, Hypothèse 1.8).

3.4.2 Champ magnétique géométrique $\mathbf{B}$ (issues des Hypothèses 1.2 et 1.4)

- **Rotationnel discret** : Dans une grille cubique, le rotationnel est défini par :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

- **Interprétation** : $\mathbf{B}$ représente les rotations des déformations transverses dans G , liées aux courants de déformation (H8).

Remarque : Les grandeurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ n'ont ici aucun statut fondamental. Seuls les potentiels $(\varphi, \mathbf{A})$ décrivent la structure géométrique élémentaire. Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ relèvent d'une **convention géométrique pratique**, au même titre que les unités arbitraires introduites pour décrire des perceptions.

Analyse dimensionnelle : Voir Annexe ??.

3.5 Tenseur de cohérence $F_{\mu\nu}$ (issues des Hypothèses 1.3 et 1.8)

3.5.1 Définition et construction

- **Origine géométrique** : Les potentiels φ et $\mathbf{A}$ traduisent deux modes de déformation complémentaires de la grille G : le mode **longitudinal** selon W et le mode **transverse** dans (X, Y, Z) .

- **Définition** : Le tenseur $F_{\mu\nu}$ exprime la **non-commutativité** des variations locales de ces déformations :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

où les indices μ, ν parcourent les directions (W, X, Y, Z) .

- **Nature géométrique** : $F_{\mu\nu}$ n'est pas un objet d'espace-temps, mais le **tenseur de couplage des directions** dans le feuillet P_r . Il mesure la torsion interne du réseau, c'est-à-dire le défaut de compatibilité entre déformations longitudinales et transverses.
- **EMmod** : Dans la suite du document on appellera $EMmod$ l'électromagnétisme au sens du modèle.

3.5.2 Lien avec les hypothèses du modèle

- **Hypothèse 1.3** : établit la base géométrique des déformations locales dans G .
- **Hypothèse 1.8** : introduit la tension et la directionnalité des perturbations, donnant sens aux composantes de $F_{\mu\nu}$.
- **Hypothèse 1.10** : fixe la constante C , reliant les échelles des déformations longitudinales et transverses pour assurer la cohérence de $F_{\mu\nu}$.

3.5.3 Condition de cohérence locale

- **Formulation compacte** :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

interprétée ici comme une **condition de continuité** des déformations couplées dans P_r .

- **Rôle géométrique** : Cette relation garantit la **propagation cohérente** des perturbations géométriques, sans faire appel à des sources ni à une métrique spatio-temporelle.

3.6 Invariance du tenseur de cohérence entre régions R

3.6.1 Principe d'invariance

- **Postulat** : Le tenseur $F_{\mu\nu}$ conserve sa forme dans le passage d'une région R_i à une autre R_j , quelle que soit l'orientation locale de le feuillet P_r .
- **Justification géométrique** : Les opérateurs différentiels ∂_μ et les potentiels A_μ sont définis par la structure interne de la grille G , indépendante du repère associé à chaque R . Ainsi, les permutations ou rotations des directions locales de P_r ne modifient pas les composantes antisymétriques de $F_{\mu\nu}$.

3.6.2 Conséquence géométrique

- L'invariance de $F_{\mu\nu}$ traduit la **continuité topologique** du couplage entre régions : chaque R hérite du même schéma de corrélation entre directions (W, X, Y, Z) .
- Cette propriété assure la **compatibilité globale** des déformations propagées dans l'espace S , garantissant la stabilité géométrique du modèle à grande échelle.

3.7 Invariance du tenseur de cohérence entre régions R

3.7.1 Idée générale

La grille G n'est pas rigide : différentes régions R_i et R_j peuvent être localement réorientées ou légèrement dilatées sans altérer la physique. Ce qui compte n'est pas la position absolue des nœuds, mais la façon dont les directions W, X, Y, Z sont couplées entre elles.

Autrement dit, deux régions sont équivalentes si elles conservent :

- la connectivité locale (chaque nœud reste relié aux mêmes voisins),
- la distinction entre direction longitudinale W et directions transverses,
- et les rapports d'échelle entre les demi-barres.

Une telle correspondance locale s'appelle ici une *transformation admissible*. Elle agit comme une rotation ou une homothétie à l'intérieur de P_r .

3.7.2 Définition intuitive du tenseur F

Chaque nœud porte un potentiel scalaire φ (lié à la tension longitudinale) et un vecteur $\mathbf{A}$ (lié aux tensions transverses). Lorsqu'on compare deux nœuds voisins, on peut mesurer la différence entre leurs valeurs dans deux directions μ et ν . La combinaison antisymétrique de ces différences définit le **tenseur de cohérence** :

$$F_{\mu\nu} = \Delta_\mu A_\nu - \Delta_\nu A_\mu.$$

Il décrit comment les tensions changent d'une direction à l'autre, et joue dans le modèle le même rôle que le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ dans la théorie classique.

3.7.3 Pourquoi F reste invariant

Si une région est tournée ou légèrement dilatée, les directions X, Y, Z changent d'orientation, mais les différences entre nœuds se transforment dans le même sens que les potentiels qu'elles relient. Ainsi, les deux effets se compensent exactement dans $F_{\mu\nu}$: les rotations et homothéties modifient les vecteurs, mais pas leur *couplage antisymétrique*. Le contenu physique de F — c'est-à-dire les relations entre directions — reste donc inchangé.

3.7.4 Conséquence

Deux régions R_i et R_j reliées par une transformation admissible décrivent la même organisation de tensions. Les équations écrites uniquement en termes de F gardent la même forme dans toutes les régions du réseau : le modèle est localement invariant par réorientation et changement d'échelle uniforme.

Remarque. Aux interfaces entre régions différemment orientées, seuls des signes ou des changements de convention apparaissent. Ils n'affectent pas la cohérence globale, car le tenseur F est antisymétrique par construction.

3.8 Déformations normalisées et rotations des déformations transverses dans P_r

Dans cette section, nous définissons les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ comme des grandeurs géométriques dérivées des potentiels φ et $\mathbf{A}$, en garantissant la cohérence dimensionnelle avec le reste du modèle.

- **Origine** : Les grandeurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont des **perceptions dans R** des déformations géométriques se produisant dans le feuillet P_r . Elles ne possèdent aucune existence propre dans la grille G ni dans P_r : elles traduisent simplement, dans R , les effets apparents de ces déformations.

3.8.1 Champ $\mathbf{E}$ géométrique : Déformation normalisée

Le champ $\mathbf{E}$ est défini comme une **perception normalisée des déformations locales** dans P_r , en introduisant une charge de référence q_0 (sans dimension) pour conserver l'analogie avec l'électromagnétisme classique :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{q_0} (\nabla\varphi + \partial_{S_{pr}}\mathbf{A}).$$

- **Dimensions** :
 - $[\varphi] = [L]$ (longueur),
 - $[\mathbf{A}] = [L]$ (longueur),
 - $[q_0] = 1$ (sans dimension),
 - $[\mathbf{E}] = [L]$ (longueur).
- **Interprétation** : $\mathbf{E}$ représente un **champ de déformation géométrique**, analogue au champ électrique classique, mais exprimé en unités de longueur. La division par q_0 permet de normaliser ce champ pour qu'il soit analogue aux équations de Maxwell tout en restant dans un cadre purement géométrique.
- **Rôle de q_0** : q_0 est une constante arbitraire qui facilite l'analogie avec l'électromagnétisme, sans introduire de dimensions physiques supplémentaires. Elle peut être fixée à $q_0 = 1$ pour simplifier les calculs, mais est conservée pour clarifier la correspondance avec les théories classiques. Le même facteur q_0 assure la cohérence d'échelle entre les composantes longitudinales et transverses.

3.8.2 Champ $\mathbf{B}$ géométrique : Rotation des déformations transverses

Le champ $\mathbf{B}$ est défini comme la **rotation normalisée** du potentiel vecteur $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{q_0} \nabla \times \mathbf{A}.$$

- **Dimensions :**

- $[\mathbf{A}] = [L]$,
- $[\nabla \times \mathbf{A}] = 1$ (sans dimension, car $[\nabla] = 1/[L]$),
- $[\mathbf{B}] = [L]$ (après normalisation par q_0).

- **Interprétation :** $\mathbf{B}$ représente les **rotations locales des déformations transverses** dans P_r , analogues au champ magnétique classique. Comme pour $\mathbf{E}$, la normalisation par q_0 permet de conserver une dimension de longueur $[L]$.
- **Cohérence avec $\mathbf{E}$:** Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont tous deux exprimés en unités de longueur, ce qui garantit que les équations de Maxwell dérivées ultérieurement (comme $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_{S_{pr}} \mathbf{B}$) restent homogènes en $[L]$.

Remarque : Ces deux grandeurs ne sont pas fondamentales : elles offrent une écriture compacte des corrélations internes du réseau, facilitant les comparaisons formelles avec le formalisme de l'électromagnétisme classique.

3.8.3 Forme locale dans P_r

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_X & -E_Y & -E_Z \\ E_X & 0 & -B_Z & B_Y \\ E_Y & B_Z & 0 & -B_X \\ E_Z & -B_Y & B_X & 0 \end{pmatrix}$$

Cette représentation organise simplement les **relations croisées** entre les directions de P_r sans introduire de métrique temporelle ni d'espace-temps sous-jacent.

3.8.4 Conséquences pour le modèle

- **Compatibilité avec les équations de Maxwell :** Les définitions ci-dessus permettent de retrouver les équations de Maxwell sous une forme géométrique, où toutes les grandeurs sont exprimées en termes de longueurs. Par exemple, l'équation d'onde pour $\mathbf{E}$:

$$\partial_{S_{pr}}^2 \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0,$$

reste homogène en $[L]$.

- **Transition vers l'électromagnétisme :** Ces définitions préparent directement la dérivation des équations de Maxwell dans la [Partie 2.6](#), où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont utilisés pour construire le tenseur $F_{\mu\nu}$.
- **Avantage du modèle :** En exprimant $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en unités de longueur, ce modèle montre comment les propriétés électromagnétiques peuvent émerger d'une **structure géométrique pure**, sans recourir à des concepts physiques classiques comme la force ou la charge.

3.9 Rôle des potentiels φ et $\mathbf{A}$ comme grandeurs fondamentales

Dans ce modèle, les **seules grandeurs physiques réelles** sont les potentiels φ et $\mathbf{A}$, qui décrivent respectivement :

- φ : La **déformation longitudinale** des demi-barres (liée à la compression/extension le long de W),
- $\mathbf{A}$: Les **déformations transverses** des demi-barres (dans les directions X, Y, Z).

Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, bien que pratiques pour les calculs et les analogies avec l'électromagnétisme classique, sont des **constructions mathématiques dérivées** sans réalité physique intrinsèque dans ce modèle. Voici pourquoi :

3.9.1 Pourquoi φ et $\mathbf{A}$ suffisent

- **Complétude de la description** : Les potentiels φ et $\mathbf{A}$ contiennent **toute l'information physique** du système :

- φ décrit les déformations **longitudinales** (le long de W),
- $\mathbf{A}$ décrit les déformations **transverses** (dans X, Y, Z).

Ces deux potentiels suffisent à décrire entièrement l'état de la grille G et de la perturbation P_r .

- **Équations d'onde indépendantes** : φ et $\mathbf{A}$ obéissent à des équations d'onde **indépendantes** et complètes :

$$\partial_{S_{pr}}^2 \varphi - C^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad \partial_{S_{pr}}^2 \mathbf{A} - C^2 \nabla^2 \mathbf{A} = 0.$$

Ces équations capturent toute la dynamique du système sans nécessiter $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$.

- **Énergie géométrique et conservation** : L'énergie géométrique du système est entièrement exprimable en termes de φ et $\mathbf{A}$ (cf. [Section 4.1.5](#)) :

$$U = \frac{1}{2T_0 D^2} |\mathcal{T}|^2 + \frac{T_0 D^2}{2} |\nabla \times \mathbf{A}|^2, \quad \text{où } \mathcal{T} = \partial_{S_{pr}} \mathbf{A} + \nabla \varphi.$$

3.9.2 Rôle dérivé de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$

Bien que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ soient souvent utilisés en électromagnétisme classique, ils n'ont dans ce modèle qu'un rôle de **simplification mathématique** :

- **Définitions** : $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont définis à partir de φ et $\mathbf{A}$ comme :

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial_{S_{pr}} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Ces définitions sont **purement mathématiques** et n'ajoutent pas d'information physique supplémentaire par rapport à φ et $\mathbf{A}$.

- **Utilité pratique** : $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ permettent de :

- Simplifier l'écriture des équations (par exemple, les équations de Maxwell),
- Faciliter les analogies avec l'électromagnétisme classique,
- Utiliser des méthodes de calcul éprouvées (comme les conditions aux limites ou les symétries).

- **Limites** : Dans ce modèle, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont des **outils intermédiaires** sans réalité physique propre. Ils émergent des potentiels φ et $\mathbf{A}$, mais ne sont pas nécessaires pour décrire la physique sous-jacente.

Concept	Dans le modèle	Lien avec les hypothèses
Potentiel φ	Tension T dans les demi-barres	Hypothèses 3, 11
Potentiel $\mathbf{A}$	Déformations transverses (X, Y, Z)	Hypothèses 2, 8
Jauge de Lorenz	Contrainte discrète sur φ et $\mathbf{A}$	Hypothèses 3, 11
Polarisation	Composantes transverses de $\mathbf{A}$	Hypothèses 2, 8
Tenseur $F_{\mu\nu}$	$\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ dérivés de $\varphi, \mathbf{A}$	Hypothèses 4, 10

3.10 Effet Doppler pour les potentiels φ et $\mathbf{A}$ (Hypothèses 1.12, 1.8, et 1.10)

D'après l'Hypothèse 1.12, les repères R sont associés à des perturbations I_r se déplaçant à vitesse constante V_r le long de W dans P_r . Les transformations entre ces repères, décrites par l'Hypothèse 1.8, modifient les coordonnées S_{pr} et les longueurs transverses (X, Y, Z) , tandis que l'Hypothèse 1.10 fixe la vitesse maximale des ondes à $C = 1$.

3.10.1 Transformation des potentiels

Considérons une onde plane progressive dans P_r , décrite par les potentiels :

$$\varphi = \varphi_0 \cos(kS_{pr} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(kS_{pr} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

où $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$, $k = \omega/C$ est le nombre d'onde, et $C = 1$ d'après l'Hypothèse 1.10. Dans un repère R en mouvement relatif à vitesse V_r par rapport à P_r , les transformations des coordonnées sont données par :

- Pour la coordonnée longitudinale S_{pr} :

$$S'_{pr} = \frac{S_{pr} - V_r X}{\sqrt{1 - V_r^2}}$$

- Pour les coordonnées transverses :

$$Y' = Y, \quad Z' = Z$$

- Pour la composante longitudinale X :

$$X' = \frac{X - V_r S_{pr}}{\sqrt{1 - V_r^2}}$$

Ces transformations impliquent que la fréquence ω' mesurée dans R est :

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - V_r}{1 + V_r}},$$

et le vecteur d'onde $\mathbf{k}'$ se transforme selon :

$$k'_X = \frac{k_X - V_r \omega}{\sqrt{1 - V_r^2}}, \quad k'_Y = k_Y, \quad k'_Z = k_Z.$$

3.10.2 Transformation des potentiels

Les potentiels se transforment comme suit dans le repère R :

- Pour le potentiel scalaire φ :

$$\varphi' = \varphi_0 \cos(k' S'_{pr} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')$$

où $k' = \omega'/C$ et $\mathbf{r}' = (X', Y', Z')$.

- Pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}$, ses composantes se transforment selon :

$$A'_X = \frac{A_X - V_r \varphi}{\sqrt{1 - V_r^2}}, \quad A'_Y = A_Y, \quad A'_Z = A_Z$$

ce qui garantit la covariance de l'équation d'onde.

3.10.3 Décalage Doppler

Le décalage Doppler se manifeste comme suit :

- Si $V_r > 0$ (source s'éloignant), alors $\omega' < \omega$ (décalage vers le rouge).
- Si $V_r < 0$ (source se rapprochant), alors $\omega' > \omega$ (décalage vers le bleu).

3.10.4 Conservation de la vitesse $C = 1$

Il est important de noter que la relation de dispersion $\omega' = C|\mathbf{k}'|$ reste vérifiée dans le repère R . En effet, nous avons :

$$|\mathbf{k}'|^2 = \left(\frac{k_X - V_r \omega}{\sqrt{1 - V_r^2}} \right)^2 + k_Y^2 + k_Z^2 = \frac{\omega'^2}{C^2}.$$

Cette relation montre que la vitesse de propagation $C = 1$ est préservée dans tous les repères R .

3.10.5 Cas d'une onde sphérique

Pour une onde sphérique de la forme :

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r} e^{i(kr - \omega S_{pr})},$$

le décalage Doppler s'applique localement en chaque point de l'espace. La fréquence ω' en un point donné est toujours donnée par la formule :

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - V_r}{1 + V_r}}.$$

3.10.6 Effet sur l'énergie géométrique

L'énergie géométrique transportée par l'onde, qui est proportionnelle à $|\mathcal{T}|^2$ où $\mathcal{T} = \partial_{S_{pr}} \mathbf{A} + \nabla \varphi$, est modifiée dans le repère R selon :

$$U' \propto |\mathcal{T}'|^2 = \frac{|\mathcal{T}|^2}{1 - V_r^2}.$$

Cette transformation de l'énergie géométrique est cohérente avec la modification des amplitudes des potentiels dans le repère en mouvement.

3.10.7 Principe de moindre action géométrique (issues des Hypothèses 1.3, 1.8 et 1.10)

Idée. Dans P_r , il n'y a pas de variable « temps » fondamentale : on paramètre la progression par un scalaire s le long de P_r . Les champs fondamentaux sont les potentiels géométriques : φ (longitudinal selon W) et $\mathbf{A}$ (transverse dans (X, Y, Z)).

Lecture « action » adaptée au modèle. En mécanique analytique, l'action mesure un compromis entre deux contributions (cinétique – potentielle). Ici, on remplace ces notions par des **mesures de déformation** de la grille : variations longitudinales et variations transverses. Le « principe de moindre action » devient alors un **principe de déformation minimale** : la configuration réelle est celle qui minimise la déformation cumulée le long de P_r .

Mécanique classique	Modèle géométrique
Énergie géométrique cinétique $\frac{1}{2}mv^2$	Variation longitudinale $(\partial_s\varphi)^2$
Énergie géométrique potentielle $V(x)$	Variation spatiale $\ \nabla\varphi\ ^2$ et $(\partial_W\varphi)^2$
Action $\int(T - V) dt$	Déformation cumulée (long. – transv.) le long de P_r

Démarche en trois étapes. (1) *Mesures locales.* On évalue les variations longitudinales $(\partial_s\varphi)$ et transverses $(\partial_s\mathbf{A})$, $\nabla\varphi$, $\partial_W\varphi$ dans chaque cellule. (2) *Agrégation.* On somme ces contributions sur une portion de P_r (déformation cumulée). (3) *Stabilité.* La configuration observée est celle pour laquelle une petite variation locale de φ ou $\mathbf{A}$ n'abaisse plus cette déformation : condition de stationnarité.

Stationnarité Exiger la stationnarité ($\delta\mathcal{S} = 0$, au sens des variations) fournit les **équations de cohérence locales** : elles relient φ et $\mathbf{A}$ et fixent leur couplage longitudinal/transverse, conformément aux Hypothèses 1.3 et 1.8.

Cohérence (jauge). Une reparamétrisation locale $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$, $\varphi \rightarrow \varphi - \eta \partial_s\chi$ laisse inchangée la déformation cumulée (à un terme de bord près) : c'est la **contrainte de cohérence** entre φ et $\mathbf{A}$ (§3.2).

Conservation. Les termes de bord associés à la stationnarité expriment la **conservation locale de l'« énergie géométrique de déformation »** dans P_r (Hyp. 1.10) : aucune création ni perte nette au sein d'une cellule, seulement des transferts entre directions.

Ce qu'il faut retenir. Le principe de « moindre action » du modèle n'introduit ni masses ni temps : il sélectionne la configuration qui **minimise la déformation** de la grille. Les équations obtenues sont l'analogue géométrique des équations d'Euler-Lagrange, et fondent le lien structurel entre φ (longitudinal) et $\mathbf{A}$ (transverse).

3.10.8 Monopoles magnétiques et cohérence topologique

Dans le cadre du modèle géométrique, le champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ résulte du cisaillement transverse des demi-barres dans P_r . La structure régulière de la grille G impose que toutes les boucles locales se referment : aucune arête ne possède d'extrémité libre. Cette propriété entraîne naturellement la condition :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

non comme un postulat, mais comme une **conséquence topologique** de la continuité du réseau. Autrement dit, les monopoles magnétiques ne peuvent pas exister dans un espace P_r parfaitement cohérent.

Piste exploratoire (non formalisée) Cependant, deux mécanismes géométriques pourraient permettre l'apparition de *quasi-monopoles* :

1. **Défaut local de grille** : si une cellule de G est rompue ou absente, la circulation de $\mathbf{A}$ autour de ce défaut ne se referme plus, créant un flux sortant ou entrant sans contrepartie immédiate.
2. **Courbure de P_r** : dans une région où P_r se tord ou se contracte fortement, les boucles fermées deviennent localement non homologues. Le flux magnétique y apparaît alors comme *source* ou *puits* d'origine géométrique, sans violation des lois internes du modèle.

Ainsi, dans ce modèle, la non-existence des monopoles magnétiques est un signe de **cohérence géométrique parfaite**, tandis que leur apparition signalerait une rupture de topologie ou une transition de phase locale dans la structure de G .

Pèges de lecture à éviter

Cette courte section rassemble les confusions les plus fréquentes auxquelles un lecteur non familier avec cette géométrie pourrait être exposé. Chaque réponse rappelle la position exacte du modèle.

Les potentiels $(\Phi, \mathbf{A})$ représentent-ils des champs physiques ?

Non. Ils décrivent des déformations internes de la grille, pas des champs mesurables. Les équations qui les gouvernent ressemblent formellement à celles de l'électromagnétisme, mais cette analogie est purement mathématique.

Chapter 4

L'énergie géométrique dans P_r

4.1 l'énergie géométrique dans P_r

4.1.1 Introduction

Les hypothèses géométriques définies dans les sections 1.3 (tension dans les demi-barres) et 1.8 (perturbation locale I) permettent de décrire les déformations de la grille G en termes de potentiels scalaires φ et vectoriels $\mathbf{A}$. L'objectif de cette section est de montrer comment une **quantité conservée**, associée aux échanges de tension entre les demi-barres longitudinales (W) et transverses (X, Y, Z), émerge naturellement de cette structure et correspond à l'énergie classique de l'électromagnétisme. Une attention particulière est portée à la **cohérence dimensionnelle** entre les grandeurs discrètes de G et les champs continus de l'électromagnétisme.

4.1.2 Tensions dans les demi-barres et potentiels

Tensions longitudinales (W)

D'après l'**Hypothèse 1.3**, la tension dans une demi-barre longitudinale est donnée par :

$$T_W = T_0(k_W - 1),$$

où k_W est le facteur de déformation le long de W . En identifiant $k_W = 1 + \frac{\varphi}{T_0}$, on obtient :

$$T_W = \varphi.$$

Le potentiel scalaire φ représente donc directement la **tension longitudinale** dans les demi-barres selon W . Sa dimension est celle d'une **tension géométrique élémentaire**, caractéristique de la cellule de G , et non d'une force newtonienne. —

Tensions transverses (X, Y, Z)

Les déformations transverses sont décrites par le potentiel vecteur $\mathbf{A} = (A_X, A_Y, A_Z)$, où $[\mathbf{A}] = [L]$. Pour une cellule C_n de G , les tensions transverses sont liées aux **rotations locales** des demi-barres, calculées via le rotationnel discret de $\mathbf{A}$.

4.1.3 Énergie géométrique et analogies électromagnétiques

Définition géométrique sur le front Pr

Sur le front d'onde Pr , on considère la longueur locale ℓ des demi-barres. Seules deux variations indépendantes interviennent :

- la variation longitudinale suivant la direction W^+ ;
- la variation transverse dans la grille G , orthogonale au front.

Aucune autre déformation n'est admise.

Densité d'énergie géométrique

On définit la densité locale :

$$e := (\partial_{W^+} \ell)^2 + \|\nabla_{\perp} \ell\|^2,$$

où ∂_{W^+} désigne la dérivée le long du front et $\nabla_{\perp}$ le gradient transverse.

Additivité et invariance

La symétrie locale des cellules (Hypothèse 1.3) et le confinement du front (Hypothèse 1.5) assurent :

$$\sum_{\text{front}} e = \text{constante},$$

c'est-à-dire que la somme (ou intégrale) des contributions de chaque cellule reste invariante lorsque le front se déplace dans G . Ainsi la quantité

$$\mathcal{E}_{\text{geo}} := \int_{\text{Pr}} e \, d\mu$$

est additive sur Pr et invariante lors du déplacement global du front.

Correspondance avec l'énergie électromagnétique

Toute grandeur quadratique, additive sur le front et invariante sous les transformations qui préservent Sp_r , possède nécessairement la même structure fonctionnelle que $\mathcal{E}_{\text{geo}}$. L'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_{\text{EM}}$ classique satisfait ces propriétés ; elle ne peut donc différer que par un facteur constant κ :

$$\mathcal{E}_{\text{EM}} = \kappa \mathcal{E}_{\text{geo}}.$$

Choix de normalisation et conclusion

On fixe l'échelle des longueurs ℓ (ou de la perception $d\mu$) de sorte que $\kappa = 1$. Cette convention revient à poser :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{EM}} = \mathcal{E}_{\text{geo}}}$$

dans le cadre du présent modèle : l'énergie géométrique apparaît comme la traduction physique directe de la cohérence géométrique du front Pr .

Dans la suite du document, les deux expressions $\mathcal{E}_{\text{EM}}$ et $\mathcal{E}_{\text{geo}}$ ne seront pas distinguées. On adoptera la notation unique $\mathcal{E}$ pour désigner cette énergie, qu'elle soit interprétée géométriquement ou électromagnétiquement.

4.1.4 Rotationnel discret et cohérence géométrique

Définition du rotationnel sur G

Sur la grille G de maille D , le rotationnel discret de $\mathbf{A}$ mesure la différence de déformation transverse entre directions voisines. Pour une cellule C_n , on écrit par exemple :

$$(\nabla \times \mathbf{A})_Z = \frac{A_{Y,n+e_X} - A_{Y,n} - A_{X,n+e_Y} + A_{X,n}}{D^2},$$

et de manière analogue pour les autres composantes.

Interprétation géométrique. Le rotationnel discret évalue la **rotation locale des déformations transverses**. Lorsque $\mathbf{A}$ varie régulièrement, il tend vers le rotationnel continu usuel. Sa dimension est celle de l'inverse d'une longueur : $[\nabla \times \mathbf{A}] = [L]^{-1}$.

Énergie transverse et cohérence dimensionnelle

Les variations transverses s'opposent aux rotations trop fortes des demi-barres. On peut leur associer une **énergie géométrique de cohérence** :

$$U_{\mathbf{A}} \propto |\nabla \times \mathbf{A}|^2.$$

Lecture. Cette quantité mesure la stabilité locale du champ transverse :

- Si $|\nabla \times \mathbf{A}|$ est nul, les demi-barres restent coplanaires : la cellule est stable.
- Si $|\nabla \times \mathbf{A}|$ croît, la rotation des déformations devient significative : la cellule emmagasine une tension géométrique.

Cohérence. Ainsi, le terme $|\nabla \times \mathbf{A}|^2$ traduit la **résistance de la grille** aux rotations transverses. Il joue un rôle analogue à celui du champ magnétique dans l'électromagnétisme classique, mais sans qu'aucune force ni unité physique ne soit introduite : seules les variations géométriques de $\mathbf{A}$ interviennent. —

4.1.5 Quantité conservée : échanges de tension

Énergies locales dans une cellule

Chaque cellule C_n accumule deux formes de **tension géométrique** :

1. **Longitudinale** (selon W) :

$$U_{\varphi} = \frac{1}{2T_0} \varphi^2,$$

représentant la variation interne de longueur le long de W .

2. **Transverse** (dans X, Y, Z) :

$$U_{\mathbf{A}} = \frac{T_0 D^2}{2} |\nabla \times \mathbf{A}|^2,$$

décrivant la résistance de la cellule aux rotations locales des demi-barres.

La somme

$$U = U_{\varphi} + U_{\mathbf{A}}$$

constitue une **énergie de cohérence géométrique** stockée dans la cellule.

Couplage longitudinal-transverse

Les variations de φ et $\mathbf{A}$ ne sont pas indépendantes. L'Hypothèse 1.8 relie leurs évolutions par la combinaison :

$$\mathcal{T} = \partial_{S_{pr}} \mathbf{A} + \nabla \varphi.$$

Elle mesure comment une variation longitudinale (φ) s'accompagne d'une rotation transverse ($\mathbf{A}$). Son carré,

$$|\mathcal{T}|^2,$$

représente l'intensité totale des échanges de tension entre directions longitudinales et transverses.

Lecture géométrique. Si $\mathcal{T} = 0$, la cellule est en équilibre : la déformation le long de W se compense exactement avec la rotation dans (X, Y, Z) . Si $\mathcal{T} \neq 0$, une **énergie locale de couplage** apparaît, traduisant un déséquilibre temporaire entre directions.

4.1.6 Correspondance avec l'électromagnétisme classique

Identification. En posant

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathcal{T}}{D}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

on retrouve les structures formelles des champs électrique et magnétique. Les deux grandeurs géométriques $(\varphi, \mathbf{A})$ jouent alors le même rôle que les potentiels électromagnétiques classiques, mais dans un cadre purement géométrique.

Énergie conservée. L'énergie totale par cellule s'écrit :

$$U = \frac{1}{2T_0 D^2} |\mathcal{T}|^2 + \frac{T_0 D^2}{2} |\mathbf{B}|^2,$$

soit une forme analogue à la densité d'énergie électromagnétique :

$$u_{\text{EM}} = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2,$$

à condition d'identifier

$$\epsilon_0 = \frac{1}{T_0 D^2}, \quad \mu_0 = \frac{1}{T_0}.$$

Sens physique. Cette correspondance ne suppose aucun champ physique : elle découle directement des propriétés géométriques de la grille. L'énergie stockée dans les tensions et rotations locales des demi-barres est l'analogue structurel de l'énergie électromagnétique classique, ce qui unifie les deux concepts dans un même cadre géométrique discret.

4.1.7 Conservation géométrique de l'énergie

Origine de la conservation

Dans la grille G , chaque cellule échange continuellement de la tension avec ses voisines. Ces échanges se font le long des demi-barres, sans perte ni création d'énergie globale. L'**Hypothèse 1.11** impose que la variation totale de la tension géométrique dans P_r soit nulle à chaque itération de propagation.

Forme différentielle de la conservation

Cette propriété s'écrit sous forme d'un bilan local :

$$\partial_{S_{pr}} U + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0,$$

où :

- U est l'énergie géométrique locale (voir Sec. 4.1.5),
- $\mathbf{S}$ décrit le flux d'énergie transporté d'une cellule à l'autre.

Lecture géométrique. Le vecteur $\mathbf{S}$ représente le **courant de tension propagée** dans la grille :

$$\mathbf{S} \propto \mathcal{T} \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Il exprime comment une déformation longitudinale ($\mathcal{T}$) engendre une rotation transverse ($\nabla \times \mathbf{A}$), et réciproquement. Leur produit vectoriel décrit le transfert orienté de tension — l'équivalent géométrique du flux d'énergie dans une onde.

Analogie avec l'électromagnétisme

Si l'on introduit les notations

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathcal{T}}{D}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

le flux $\mathbf{S}$ prend la même forme que le vecteur de Poynting classique :

$$\mathbf{S} = \frac{D}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Mais ici, il ne traduit pas un transport d'énergie électromagnétique : il exprime la **continuité des échanges de tension** à travers la grille, c'est-à-dire la stabilité géométrique de la propagation dans P_r .

4.1.8 Conclusion : électromagnétisme

Concept	Dans le modèle géométrique	En électromagnétisme classique
Potentiel scalaire φ	Tension longitudinale $T_W = \varphi$	Potentiel électrique φ
Potentiel vecteur $\mathbf{A}$	Déformations transverses $\mathbf{A}$	Potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$
Combinaison $\mathcal{T}$	$\mathcal{T} = \partial_{S_{pr}} \mathbf{A} + D^2 \nabla \varphi$	$\mathbf{E} = -\frac{\mathcal{T}}{D}$
Rotationnel $\nabla \times \mathbf{A}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	Champ magnétique $\mathbf{B}$
Énergie U	$U = \frac{1}{2T_0 D^2} \mathcal{T} ^2 + \frac{T_0 D^2}{2} \nabla \times \mathbf{A} ^2$	$u_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} ^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} ^2$
Constantes ϵ_0, μ_0	$\epsilon_0 = \frac{1}{T_0 D^2}, \mu_0 = \frac{1}{T_0}$	Permittivité et perméabilité du vide
Vecteur de Poynting $\mathbf{S}$	$\mathbf{S} = T_0 \mathcal{T} \times (\nabla \times \mathbf{A})$	$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Table 4.1: Correspondance entre le modèle géométrique et l'électromagnétisme classique, avec cohérence dimensionnelle.

Cette démarche montre comment une **structure géométrique discrète** (la grille G) et des hypothèses sur les tensions dans ses demi-barres permettent de retrouver les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Les potentiels φ et $\mathbf{A}$, initialement introduits pour décrire les déformations de G , jouent le rôle des potentiels électromagnétiques classiques. La quantité conservée U , associée aux échanges de tension entre les demi-barres, correspond à l'énergie électromagnétique, et sa conservation découle directement des équations d'onde discrètes sur G . Les constantes ϵ_0 et μ_0 émergent naturellement des paramètres T_0 et D de la grille.

4.1.9 Remarque 1

La quantité $\mathcal{T} = \partial_{S_{pr}} \mathbf{A} + \frac{D^2}{T_0} \nabla \varphi$ établit un pont fondamental entre la géométrie discrète de G et les champs électromagnétiques classiques. Sa définition, où le terme $\frac{D^2}{T_0} \nabla \varphi$ assure l'homogénéité dimensionnelle avec $\partial_{S_{pr}} \mathbf{A}$, permet de retrouver les équations de conservation de l'énergie sous une forme compatible avec les principes de l'électromagnétisme. Cette approche montre comment une structure géométrique discrète peut engendrer des phénomènes physiques continus, tout en préservant les lois de conservation essentielles. Ces résultats pourraient servir de base aux développements ultérieurs sur la quantification de l'énergie.

Remarque 2 On reconnaît ici la structure formelle des transformations dites de Lorentz, obtenue sans recours à la notion de vitesse ni à aucune grandeur autre que la longueur $[L]$.

Pèges de lecture à éviter

Cette courte section rassemble les confusions les plus fréquentes auxquelles un lecteur non familier avec cette géométrie pourrait être exposé. Chaque réponse rappelle la position exacte du modèle.

EMmod est il un champ électromagnétique? où agit-il vraiment ?

Non. Les grandeurs φ , $\mathbf{A}$ et les champs qui en dérivent ne sont *pas* des champs physiques définis dans S , mais la description interne des déformations de tension du feuillet P_r telle qu'elle est perçue depuis P_r . Aucune force physique n'agit dans S : tout est strictement géométrique.

4.2 Localité dans P_r

Dans le modèle géométrique, la **localité** désigne le fait que toute interaction entre nœuds de la grille G se produit exclusivement à travers les **demi-barres adjacentes** appartenant à P_r . Chaque nœud ne « ressent » que les variations de tension ou de longueur transmises par ses voisins immédiats.

4.2.1 Définition

- La propagation d'une perturbation I dans P_r résulte d'échanges discrets de tension entre nœuds connectés, conformément aux Hypothèses 1.2 et 1.3.
- La vitesse maximale $C = 1$ impose que l'information ne puisse franchir plus d'une maille D de G par unité de S_{pr} (Hypothèse 1.10).

4.2.2 Conséquences

- Les phénomènes observables dans R (perception locale de P_r) sont strictement déterminés par la configuration immédiate des demi-barres voisines.
- Les notions de causalité et de propagation émergent naturellement de cette connectivité locale : aucune influence « à distance » n'est possible sans médiation continue dans la grille.
- En ce sens, la localité de P_r constitue le fondement géométrique des limitations causales connues dans la physique classique et relativiste.

Analyse dimensionnelle : Voir Annexe ??.

4.3 Analyse des biais potentiels de la formalisation géométrique

Bien que la formalisation du réseau G et des demi-barres repose sur une structure géométrique symétrique et isotrope, certaines approximations introduisent des asymétries implicites. Elles ne remettent pas en cause la cohérence du modèle mais peuvent, si elles ne sont pas surveillées, induire des effets de parité ou d'anisotropie indésirables.

4.3.1 Orientation privilégiée de la grille G

Le réseau G est défini dans l'espace affine continu S sans repère imposé. Cependant, la construction discrète des demi-barres selon les axes (x, y, z) implique une *orientation privilégiée* du maillage. En pratique, cette orientation peut briser l'isotropie globale :

$$U(\theta) \neq \text{constante}$$

si les rotations du réseau autour d'un axe de S modifient localement la distribution des déformations.

Conséquence : La métrique effective du réseau devient légèrement directionnelle, ce qui se traduit par une propagation différente des perturbations selon la direction. Ce biais peut être observé sous la forme d'un *effet de texture géométrique*.

4.3.2 Signe de la tension T et symétrie de parité

La définition actuelle $T = T_0(k-1)$ introduit une distinction explicite entre extension ($T > 0$) et compression ($T < 0$). Si le réseau n'est pas traité comme un ensemble de demi-barres appariées par symétrie centrale, l'inversion spatiale $r \rightarrow -r$ peut alors modifier les signes de certaines composantes de T .

Conséquence : Une inversion de parité peut provoquer un déséquilibre entre les directions opposées, produisant un champ $T(x)$ non symétrique sous réflexion.

4.3.3 Tension géométrique et gradient de potentiel W

Le couplage proposé $T \propto \nabla W$ est conceptuellement juste, mais il introduit une *direction privilégiée* dans l'espace. Le gradient est un vecteur polaire (P-odd) alors que la tension T est une grandeur géométrique (P-even) ; leur identification directe peut donc rompre la parité si l'on ne distingue pas les deux natures.

Conséquence : Les structures obtenues peuvent présenter une hélicité implicite (rotation préférée) sans que celle-ci provienne d'une condition initiale physique.

4.3.4 Anisotropie locale et liaison entre cellules

La symétrie centrale est bien respectée au niveau d'une cellule isolée, mais aucune contrainte ne garantit sa conservation globale lors du couplage entre cellules voisines. Une fluctuation de phase locale peut donc engendrer une anisotropie macroscopique.

Conséquence : Des zones du réseau peuvent présenter des états localement non compensés (où la compression et l'extension ne s'annulent plus sur un cycle complet).

4.3.5 Énergie élastique et dépendance au signe

L'énergie $U = \frac{1}{2}K\epsilon^2L_0$ est formellement parité-symétrique, mais si le coefficient K dépend du signe de la déformation ($K = K(\epsilon)$), on réintroduit implicitement une orientation mécanique. Cela revient à définir deux "élasticités" distinctes pour l'extension et la compression.

Conséquence : Le potentiel d'énergie perd son caractère quadratique symétrique, introduisant une dissymétrie qui peut biaiser les conditions de stabilité locale.

4.4 Proposition de correction et d'extension tensorielle

Pour éliminer les asymétries et formuler les grandeurs dans un cadre strictement géométrique et parité-symétrique, on propose une description tensorielle des déformations et de leurs couplages au relief W .

4.4.1 Déformation tensorielle du réseau G

Chaque cellule du réseau est caractérisée par un déplacement $u_i(x)$ et une métrique interne $g_{ij} = \delta_{ij}$ à l'équilibre. La déformation géométrique infinitésimale est définie par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

La tension géométrique associée s'écrit :

$$T_{ij} = K_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

où K_{ijkl} est le tenseur d'élasticité géométrique homogène à une longueur. En régime isotrope minimal :

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

avec (λ, μ) les paramètres d'élasticité géométrique du réseau.

Avantage : Cette écriture rend explicite la symétrie de parité : T_{ij} et ε_{ij} sont tous deux invariants sous inversion $r \rightarrow -r$.

4.4.2 Couplage isotrope au relief $W_{\pm}$

Le gradient du relief est un vecteur polaire, et son Hessian $H_{ij} = \partial_i \partial_j W$ est un tenseur symétrique. On définit des invariants scalaires (P-even) :

$$I_1 = |\nabla W|^2, \quad I_2 = \text{Tr}(H), \quad I_3 = \text{Tr}(H^2).$$

Les constantes d'élasticité locales deviennent fonctions de ces invariants :

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2, \quad \mu_{\text{eff}} = \mu_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2.$$

Ainsi, le réseau s'adapte au relief W sans briser la symétrie de parité. La raideur effective varie selon la structure du potentiel mais reste géométriquement isotrope.

4.4.3 Cohérence géométrique entre cellules

L'interaction entre cellules voisines est assurée par la continuité de la métrique locale. La condition de cohérence géométrique s'écrit :

$$\nabla_k T_{ij} = 0,$$

en l'absence de source interne. Cette contrainte garantit que toute fluctuation locale de phase n'induit pas d'asymétrie globale.

Note : ce document constitue une version de travail déposée sur Zenodo. Il pourra être mis à jour ou complété ultérieurement.