

Les torseurs

Note liminaire : La présentation est dans l'ensemble hérétique, ou au minimum hétérodoxe. Le vocabulaire utilisé n'est pas celui usuel, et peu d'efforts ont été faits (pour le moment) pour aider à faire le lien avec l'orthodoxie du domaine.

1 Introduction

Selon une première définition, un torseur est un champ de vecteurs équiprojectif :

Champ de vecteurs : La donnée d'un vecteur $\vec{T}(X)$ pour chaque point X de l'espace; on notera $(X \rightarrow \vec{T}(X))$;

équiprojectif : $\vec{T}(A) - \vec{T}(B)$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

2 Le mouvement d'un solide

2.1 Le torseur des vitesses

L'exemple essentiel d'un torseur selon cette définition est le champ des vitesses d'un solide. Quelle est la relation entre l'équiprojectivité et un solide? L'équiprojectivité implique que la distance entre A et B ne change pas. On se convaincra qu'un objet est solide si et seulement si la distance entre deux quelconques de ses points est invariante.

Par ailleurs, la donnée du champ de vitesse d'un solide décrit totalement son mouvement à un instant donné. (Ce qui est vrai pour tout système mécanique!)

Un torseur est donc une espèce particulière de champ de vecteurs, directement adaptée à la description du mouvement instantané d'un solide, de la même manière que le vecteur vitesse décrit le mouvement instantané d'un point matériel.

La somme de deux champs de vecteurs, ou la multiplication d'un champ de vecteur par un réel, ont un sens, et donnent des champs de vecteurs. Ainsi, l'ensemble des champs de vecteurs peut être muni d'une structure d'espace vectoriel. L'addition et la multiplication par un réel conserve la propriété d'équiprojectivité. En d'autres termes, les torseurs forment un espace vectoriel, un sous-espace de l'espace vectoriel des champs de vecteurs.

Note: Ici comme ailleurs, on se trouve en face de deux sens différents au mot "vecteur". Le sens général est celui d'un élément d'un espace vectoriel quelconque. Un sens un peu plus étroit, utilisé dans la première partie de ce document, réserve le mot vecteur à des objets à

3 paramètres, reliés à la structure tridimensionnelle de l'espace. La flèche supérieure usuelle indiquera un tel objet à trois paramètres, sans plus de précision.

Un solide possède six degrés de liberté : trois en translation, comme dans le cas d'un point matériel, et trois en rotation. Une autre manière d'exprimer la même idée est qu'un torseur est défini par seulement six paramètres. Du point de vue de l'algèbre linéaire, alors que l'espace des champs de vecteurs est un espace de dimensions infinies, l'espace des torseurs est un espace à six dimensions.

Note: Ce nombre 6 est spécifique à la dimension spatiale 3. Avec une dimension spatiale de 2, les torseurs ont 3 paramètres, et avec une dimension spatiale (ou spatio-temporelle) de 4, les torseurs ont 10 paramètres.

La présentation usuel des torseurs passe par la formule, valable pour le champ de vitesse d'un solide ($X \rightarrow \vec{v}(X)$) :

$$\vec{v}(X) = \vec{v}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AX}$$

qui montre que le champ est entièrement connu une fois données la valeur en un point, et un vecteur particulier, $\overrightarrow{\Omega}$, qui encode la vitesse de rotation du solide (plus exactement, une *opération* particulière, $\overrightarrow{\Omega} \wedge$, qui encode la rotation). Notons que le point A peut être choisi quelconque, et donc que sa vitesse ne peut pas être interprétée comme la translation du solide. Nous verrons plus loin comment donner un sens à la notion de vitesse de translation d'un solide.

On notera que la dimension de $\overrightarrow{\Omega}$ est T^{-1} . Son unité usuelle, conforme à l'idée que cela représente une vitesse de rotation, est le radian par seconde, et non pas le Hertz.

On parlera des *éléments* d'un champ équiprojectif en un point A la donnée de la valeur en A du champ, et de $\overrightarrow{\Omega}$. Ces éléments déterminent de manière unique le champ.

2.2 Le torseur de déplacement infinitésimal

Le déplacement d'un point de vitesse $\vec{v}$ pendant un temps infinitésimal dt est $\vec{dP} = \vec{v}dt$. Le champ de déplacement infinitésimal d'un solide est un torseur ($X \rightarrow \vec{dX}$), que l'on peut associer à l'équation

$$\vec{dX} = \vec{dA} + (\overrightarrow{\Omega} dt) \wedge \overrightarrow{AX}$$

avec l'abus de notation consistant à noter $\vec{dA}$ le déplacement infinitésimal du point A. On peut noter $\overrightarrow{\Omega} dt = d\vec{\alpha}$ l'angle de rotation infinitésimale. Nous reviendrons sur cette notion d'un angle "vectoriel", qui inclut à la fois une valeur angulaire (angle usuel) et le plan de rotation (qui correspond, en 3D, au plan perpendiculaire à l'axe de rotation).

3 Les forces, et le dual d'un torseur

Le torseur des vitesses, ou celui des déplacements infinitésimaux, est le pendant, respectivement, de la vitesse d'un point matériel ou du déplacement infinitésimal d'un point matériel. Le mouvement d'un point matériel s'étudie à partir du principe fondamental de la dynamique, qui relie la variation de la vitesse à la force. Le propos ici est de trouver l'équivalent pour un solide.

L'ensemble des forces s'exerçant sur un solide peut se voir comme un champ de force. On est obligé de distinguer différents aspects, les forces ponctuelles, les forces surfaciques et les forces volumiques; pour simplifier, on ne parlera que de forces ponctuelles, mais la même approche fonctionne dans tous les cas.

Si on écrit le PFD pour tous les points du solide, on obtient un nombre infini d'équations, rien de bien intéressant.

Nous allons prendre une route différente, qui est d'étudier les échanges d'énergie. A partir du PFD, on montre que le travail infinitésimal fourni par une force à un point matériel est

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

où $\vec{F}$ est la force ponctuelle s'exerçant au point A, et $d\vec{A}$ le déplacement infinitésimal du point A.

En se limitant aux forces extérieures ponctuelles s'exerçant sur un solide, on peut écrire

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{A}_i$$

dans laquelle A_i est le point d'application de la force $\vec{F}_i$. On peut voir cette expression comme une application portant sur le champ des déplacements infinitésimaux.

$$\delta W = [\sum \vec{F}_i \cdot \cdot](A \rightarrow d\vec{A})$$

Cette application est linéaire : si on l'applique à une combinaison linéaire de champs de déplacements infinitésimaux, on obtient la combinaison linéaire des travaux infinitésimaux.

Or, les champs de déplacements infinitésimaux sont des torseurs, qui forment un espace vectoriel de dimension 6. L'algèbre linéaire nous dit que les applications linéaires portant sur les torseurs se structurent alors aussi en un espace vectoriel de dimension 6, l'espace dual de celui des torseurs.

L'application notée ci-dessus $[\sum \vec{F}_i \cdot \cdot]$ est alors un élément de l'espace dual des torseurs de déplacement. Cette application est entièrement définie par les forces et leurs points d'application. Du fait qu'elle appartient à un espace vectoriel à 6 dimensions, elle est, aussi, déterminée par seulement 6 paramètres.

La question est alors, à quoi ressemble un objet de cet espace dual, comment faire des calculs avec, et comment le calculer à partir des forces et de leurs points d'application?

A la première question, une réponse simple à donner, moins simple à argumenter : un élément de l'espace dual ressemble à un torseur; nous allons l'appeler un cotorseur (et non pas un torseur, comme il est usuel). A la seconde : on fait les calculs à partir des 6 paramètres déterminant le cotorseur. Et à la troisième : en calculant les 6 paramètres à partir des forces et leurs points d'application, calcul sujet de la suite du texte.

Un cotorseur ressemble à un torseur, en particulier on peut le présenter comme un champ. Un très important caveat est nécessaires :

Le cotorseur des forces se dérive des forces, mais n'est pas un champ de force.

Le torseur dual est un champ de "moments". Rien d'informatif ici, c'est juste une définition : le torseur dual des déplacements infinitésimaux, qui donne le travail infinitésimal pour un champ de déplacements infinitésimaux donné, se dérive des forces et est appelé un champ de moments.

Quelle est la signification physique du moment en un point? La réponse n'est pas simple du tout. Dans le cas d'un torseur de vitesse ou de déplacement, le champ a une signification physique : c'est la vitesse, le déplacement, de ce point. Mais pour le cotorseur de forces, rien de tel. Le moment en un point n'est que cela, la valeur en ce point du cotorseur considéré comme champ.

Nous reviendrons à la signification physique plus loin, quand on pourra regarder à quelle grandeur physique correspondrait ce champs.

Le cotorseur a, lui, une signification physique : il résume comment l'ensemble des forces extérieures agissent sur le mouvement du solide, sur son mouvement en translation comme sur son mouvement en rotation. L'aspect important est le cotorseur en lui-même, en tant qu'application linéaire sur l'espace des torseurs. Et la possibilité de le décrire avec seulement six paramètres.

Repartons de

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{dA}_i$$

Comme le déplacement est un torseur, on peut le décrire entièrement comme sa valeur en un point A (choisi arbitrairement) et l'opérateur de rotation $\vec{\Omega}$. Remplaçons donc les $\vec{dA}_i$ par leurs expressions selon une telle description. Il vient:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot (\vec{dA} + d\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AA_i})$$

$$\delta W = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{dA} + \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AA_i}$$

Nous allons utiliser une propriété générale du produit mixte, impliquée par son antisymétrie,

à savoir

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$$

On a alors

$$\delta W = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{dA} + \sum d\vec{\alpha} \cdot (\overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i)$$

$$\delta W = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{dA} + (\sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i) \cdot d\vec{\alpha}$$

Sous cette forme, on voit qu'il s'agit d'une application linéaire sur les éléments du torseur des déplacements $(\vec{dA}, d\vec{\alpha})$. Cette application est elle-même décrite par deux éléments, correspondant à 6 paramètres, $(\sum \vec{F}_i, \sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i)$.

Ces éléments ont été définis pour un point A particulier. Y-a-t-il une relation entre les éléments en A et les éléments en B? On a

$$\sum \overrightarrow{BA_i} \wedge \vec{F}_i = \sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i + \sum \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_i$$

$$\sum \overrightarrow{BA_i} \wedge \vec{F}_i = \sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i + \overrightarrow{BA} \wedge (\sum \vec{F}_i)$$

On se retrouve avec une relation similaire à celle définissant les torseurs, ce qui justifie l'idée que le cotorseur ressemble à un torseur (et est appelé usuellement un torseur).

Mais attention! Si on note (e_1, e_2) les éléments d'un torseur, et (f_1, f_2) les éléments d'un cotorseur, l'application correspondante est $z = f_1 \cdot e_1 + f_2 \cdot e_2$. Il est important de noter la relation liant les éléments en des points différents permute l'indice 1 et l'indice 2. L'élément indépendant du point, qui est, dans la notation utilisée, le second pour les torseurs, est le premier pour les cotorseurs. Pour éviter l'ambiguïté, nous allons noter $|e_1, e_2\rangle$ les éléments d'un torseur, et $\langle f_1, f_2|$ les éléments d'un cotorseur, avec, dans les deux cas, l'élément dépendant du point A celui près de la barre verticale.

Note: Cette notation est vraisemblablement spécifique à l'auteur de ce document, du moins quand à son application aux torseurs. L'utilisation qui en est faite ici est cohérente avec l'application de cette notation en physique quantique.

Le cotorseur de forces agit sur le torseur $|\vec{dA}, d\vec{\alpha}\rangle$, et est décrit par deux éléments, soit 6 paramètres, $\langle \sum \vec{F}_i, \sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i|$, et on notera :

$$\delta W = \langle \sum \vec{F}_i, \sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i | \vec{dA}, d\vec{\alpha} \rangle = (\sum \vec{F}_i) \cdot \vec{dA} + (\sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i) \cdot d\vec{\alpha}$$

Note : On s'attend à ce que le résultat ne dépendent pas du choix du point A. Bien que le point A apparaisse dans l'expression, on pourra vérifier que le résultat est bien le même en prenant un autre point et en appliquant les formules qui permettent de passer des éléments en un point aux éléments en un autre points sur le torseur et le cotorseur.

Cette opération entre un cotorseur et un dual est appelé le “comoment de deux torseurs”, une appellation trompeuse, puisse qu’elle laisse penser qu’on peut l’appliquer entre deux torseurs quelconques, ce qui n’est pas le cas.

La permutation des rôles des éléments fait que les éléments $\langle \sum \vec{F}_i, \sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i \rangle$ du dual sont respectivement celui correspondant aux translations et celui correspondant aux rotations. Mais c’est le premier (translation) qui est indépendant du point de référence, et le second (rotation) variable, ce qui est l’inverse de ce qu’on voit dans les éléments du torseurs de déplacements. Avec la notation proposée, l’élément variable est celui près de $|$, et le comoment est $\langle f_1, f_2 | e_1, e_2 \rangle = f_1 e_1 + f_2 e_2$, comme un produit scalaire usuel.

La formule reliant les paramètres du cotorseur en divers points est bien entendue celle qui amène la vision du cotorseur comme un champ, avec la valeur en un point l’élément variable du cotorseur, c’est à dire, $\sum \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{F}_i$, le moment en A. Voyons quelle peut être la signification physique de cette valeur, au-delà de celle, littérale, dérivée de la vision “champ” de ce cotorseur.

D’un point de vue dimensionnel, on fait le produit scalaire d’un moment par $d\vec{\alpha}$, un angle, pour obtenir une énergie, la dimension du moment est donc celle d’une énergie par angle. L’unité naturelle serait le Joule par radian, ou J/rad. La tradition oublie l’angle (qui peut être vu comme une grandeur sans dimension), et préconise le Newton mètre, N.m, égal au Joule, mais dont la dénomination distincte est sensé limiter la confusion (à chacun de juger). Le Newton mètre rappelle que le moment est obtenu comme une somme de produits (vectoriels) entre une force et un vecteur longueur, comme un bras de levier.

La dimension des éléments du torseur de déplacements est $|L, \alpha \rangle$, la dimension des éléments du cotorseur de forces est $\langle MLT^{-1}, MLT^{-2}\alpha^{-1} \rangle$ (ceux gênés par l’usage d’une dimension d’angle la remplaceront mentalement par 1, cela ne rendra pas le texte faux).

En résumé, on a déterminé que le travail infinitésimal des forces extérieures, une variation d’énergie, δW pouvait se calculer comme l’application d’un cotorseur (le cotorseur de force) au torseur de déplacements infinitésimaux. Le calcul est aisé, à partir des éléments du cotorseur, qui sont facilement calculables à partir des forces et de leurs points d’application. La présentation a été faite pour des forces ponctuelles, mais s’étend sans difficulté aux forces surfaciques et volumiques.

4 Du calcul de l’énergie cinétique à l’équation de mouvement

4.1 L’énergie cinétique

Peut-on utiliser des torseurs pour le calcul de la variation de l’énergie cinétique? La réponse est oui.

En notant $dm(P)$ la masse volumique au point P, l’énergie cinétique d’un solide s’écrit

$$E_c = \frac{1}{2} \int dm(P) \vec{v}(P) \cdot \vec{v}(P)$$

Une variation infinitésimale du champ de vitesse induira une modification infinitésimale de l'énergie cinétique de

$$dE_c = \int dm(P) d\vec{v}(P) \cdot \vec{v}(P)$$

Ceci peut se voir comme une application linéaire agissant sur le champ $(P \rightarrow \vec{v}(P))$:

$$dE_c = [\int dm(P) d\vec{v}(P) \cdot] (P \rightarrow \vec{v}(P))$$

Comme l'expression entre [] est une application linéaire sur un toreur, c'est un cotorseur. Comment l'écrire comme tel? Développons le toreur $(P \rightarrow \vec{v}(P))$:

$$dE_c = \int dm(P) d\vec{v}(P) \cdot \vec{v}(P)$$

$$dE_c = \int dm(P) d\vec{v}(P) \cdot (\vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP})$$

$$dE_c = (\int dm(P) d\vec{v}(P)) \cdot \vec{v}(A) + (\int dm(P) d\vec{v}(P) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}))$$

Et la magie du produit mixte agit encore :

$$dE_c = (\int dm(P) d\vec{v}(P)) \cdot \vec{v}(A) + (\int dm(P) \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{AP} \wedge d\vec{v}(P)))$$

$$dE_c = (\int dm(P) d\vec{v}(P)) \cdot \vec{v}(A) + (\int dm(P) \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{v}(P)) \cdot \vec{\Omega}$$

On reconnaît là un comoment avec le toreur des vitesses, que l'on peut écrire :

$$dE_c = \langle \int dm(P) d\vec{v}(P), \int dm(P) (\overrightarrow{AP} \wedge d\vec{v}(P)) | \vec{v}(A), \vec{\Omega} \rangle$$

Le calcul a été fait avec le toreur des vitesses. On a le même résultat avec le toreur des déplacements infinitésimaux, en partant de

$$dE_c = \int dm(P) \frac{d}{dt} \vec{v}(P) \cdot \vec{d}P$$

On obtient alors la formule qui va nous servir dans la section suivante :

$$dE_c = \langle \int dm(P) \frac{d}{dt} \vec{v}(P), \int dm(P) (\overrightarrow{AP} \wedge \frac{d}{dt} \vec{v}(P)) | \vec{d}(A), \vec{\Omega} \rangle$$

Le cotorseur qui apparaît là est le "torseur dynamique", que nous noterons (notation non orthodoxe) $\langle \frac{d}{dt} \mathbf{P} |$. L'expression ci-dessus s'écrit alors

$$dE_c = \langle \frac{d}{dt} \mathbf{P} | dX \rangle$$

4.2 Le PFD

Le principe fondamental de la dynamique implique de la variation infinitésimale de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures. C'est à dire

$$\langle \frac{d}{dt} \mathbf{P} | dX \rangle = \langle F | dX \rangle$$

Ce qui est le cas si

$$\langle \frac{d}{dt} \mathbf{P} | = \langle F |$$

C'est à dire l'égalité du cotorseur de force et du cotorseur dynamique.

Pour prédire l'évolution du mouvement d'un solide, il faut donc procéder comme suit :

- On calcule le cotorseur des forces à tout moment (on en calcul les éléments);
- On applique le PFD, qui nous donne donc le cotorseur dynamique;
- On intègre le cotorseur dynamique pour obtenir le cotorseur $\langle \mathbf{P} |$ (pour en obtenir les éléments);
- On calcule le torseur des vitesses $|v\rangle$ à partir de $\langle \mathbf{P} |$, par inversion de l'opérateur d'inertie.

La dernière étape sera le sujet de la prochaine section, qui sera aussi le sujet de réflexions sur la notion d'inertie.

Auparavant, voilà quelques remarques générales, qui se présentent en prenant un peu de recul sur ce qui a été fait. Le lecteur pourra sauter ces remarques, qui ne sont pas nécessaires pour la suite du texte.

4.2.1 Retour sur le PFD appliqué au point matériel

L'écriture sur les torseurs ne fait pas intervenir l'accélération. Nous verrons plus loin pourquoi les accélérations ne sont pas un "bon outil". Si on suit l'approche obtenue pour les torseurs, le PFD s'écrit sans référence à l'accélération, mais avec référence à la quantité de mouvement $\vec{F} = d\vec{p}$. Ensuite, $\vec{F}$ et $\vec{p}$ ne sont pas des vecteurs au même sens que la vitesse, mais des covecteurs. Enfin, la formule $\vec{p} = m\vec{v}$ n'est pas une simple multiplication par un scalaire, mais une application qui à un vecteur associe un covecteur. La prédiction de l'évolution du mouvement d'un point matériel se lit alors comme suit :

- On calcule le covecteur de force à tout moment (on en calcul les éléments, c'est à dire les coordonnées);

- On applique le PFD, qui nous donne donc le covecteur $d\vec{p}/dt$;
- On intègre $d\vec{p}/dt$ pour obtenir la quantité de mouvement $\vec{p}$;
- On déduit du covecteur $\vec{p}$ le vecteur vitesse $\vec{v}$ en inversant l'application qui à la vitesse associe la quantité de mouvement, ce qui consiste, dans ce cas, à multiplier les coordonnées du covecteur quantité de mouvement par $1/m$ pour obtenir les coordonnées du vecteur vitesse.

Rien de neuf par rapport à ce qui est fait naturellement à partir de $\vec{F} = m\vec{a}$, sauf le vocabulaire utilisé. L'inconvénient de cette approche est l'introduction de distinctions conceptuelles fines dans les notions de vecteurs ou scalaires, distinctions inutiles aux calculs en 3D, et qui pourraient même apparaître artificielles et somme toute sans intérêt pratique à certains.

L'avantage de ce “nouveau” vocabulaire est que l'on obtient un parallèle parfait avec ce qu'on fait avec les torseurs, ce qui est beaucoup plus difficile avec les notions usuelles de vecteur force et d'accélération. Cet avantage deviendra plus évident encore si on réalise que cette approche se généralise à n'importe quel nombre de degrés de liberté pour un système mécanique, et par la suite, à la mécanique quantique, et (via la relativité) à la 4D.

4.2.2 La notion de tourneur, et d'angle “avec plan”

L'opération $\vec{\alpha}$ est $\vec{v} \rightarrow \vec{\alpha} \wedge \vec{v}$. Elle fait tourner d'un angle α la partie de $\vec{v}$ projetée sur un certain plan orienté. Le tableau de nombres $\vec{\alpha}$ encode à la fois le plan en question et une valeur angulaire. La valeur angulaire est le module, et le plan l'orthogonal de la direction vectorielle donnée par le tableau de nombres. Les tourneurs forment un espace vectoriel, et le tableau de nombres en questions correspond aux coordonnées dans une certaine base.

Il est plus usuel de parler d'axe de rotation que de plan de rotation. Mais cette notion d'axe est spécifique à la dimension 3, alors que la notion de plan de rotation est indépendante de la dimension. Prenons la dimension 2 : l'angle est alors encodé sur un tableau d'un seul réel, parce qu'il n'y a qu'un seul plan possible. Le module de ce réel est l'angle, le signe de l'angle dépend de l'orientation du plan.

En dimension 4, un angle est encodé par un tableau de 6 chiffres, parce que c'est ce qui est nécessaire, si on veut laisser le module libre, pour décrire un plan (e.g., la données de deux directions du plan, et en 4D une direction demande 3 paramètres).

On voit donc que la notion d'“angle avec plan” est une généralisation aux dimensions supérieures à deux (et pas seulement à la dimension 3) de l'angle en deux dimensions, dont le caractère “scalaire” n'est dû qu'à la petitesse de la dimension.

4.2.3 La notion de vecteur

La notion de vecteur la plus générale est celle d'élément d'un espace vectoriel. Un usage plus étroit, spécifique à la mécanique dans l'espace, est d'y voir un tableau de trois nombres. Dans la présentation qui précède, quatre types d'objet, de propriétés différentes, se sont présentés comme des vecteurs en géométrie 3D : les translations et ce qui en dérive (vitesse, accélération); les covecteurs (forces, quantité de mouvement), les “angles avec plan et ce qui en dérive ($\vec{\alpha}$, $\vec{\Omega}$), et enfin les moments, qui apparaissent comme étant aux covecteurs ce que les “angles avec plan” sont aux vecteurs.

Cette distinction n'a rien de fortuite ou d'artificielle. Elle est parfaitement formalisée en algèbre linéaire. Celle-ci, même si on n'en a pas utilisé le vocabulaire dans ce qui précède, est en arrière-plan de toute la présentation. Pour mémoire, dans le langage de l'algèbre linéaire, les quatre catégories sont respectivement de vecteurs, de formes (éléments de l'espace dual des vecteurs), de tenseurs antisymétriques de rang 2 (de tourneurs), et d'éléments de l'espace dual de l'espace vectoriel des tenseurs antisymétrique de rang 2 (cotourneurs). Les deux dernières catégories sont des opérateurs qui agissent sur un vecteur pour donner un vecteur, ou sur une forme pour donner une forme.

Note: Le terme “tourneur” est emprunté à J. Lavau, terme de meilleur aloi que les tentatives lexicales de l'auteur de ce texte.

Si on mélange tout cela comme des vecteurs, certaines opérations binaires portent un nom particulier:

opération	résultat	opération entre vecteurs
application d'une forme à un vecteur	réel	produit scalaire
application d'un vecteur à une forme	réel	produit scalaire
application d'un tourneur à un cotourneur	réel	produit scalaire
application d'un cotourneur à un tourneur	réel	produit scalaire
application d'un tourneur à un vecteur	vecteur	produit vectoriel
application d'un tourneur à une forme	forme	produit vectoriel
“angle” entre vecteur et forme	tourneur	produit vectoriel

Ce n'est pas complet, mais même en complétant n'apparaîtra pas à ce stade le produit scalaire de deux translations, ou de deux formes, par exemple. Si on reprend toute la présentation, on réalisera qu'on ne l'a très peu utilisé. Un cas où on pourrait penser qu'il apparaît est le calcul de l'énergie cinétique vu comme $\frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}$, mais il est aisé de voir que cela s'écrit $\frac{1}{2}\vec{p}.\vec{v}$, un produit entre un covecteur et un vecteur. Un autre, plus surprenant, est la notion même d'équiprojectivité, qui semble rétive à autre chose que le produit scalaire entre vecteurs.

4.2.4 Quel est la signification du point A dans les éléments d'un torseur ou d'un cotorseur?

Si on prend le point de vue de l'algèbre linéaire, un torseur (resp. un cotorseur) est un élément d'un espace vectoriel à 6 dimensions. Les éléments d'un torseur (resp. d'un cotorseur) sont les coordonnées de l'objet dans une base particulière. Le choix d'un point A est simplement le choix d'une base particulière. La formule donnant les éléments d'un torseur par rapport à un point B en fonction des éléments en un point A est un changement de base.

La formule du comoment n'est valable que si les éléments du cotorseur sont donnés dans la base duale de celle utilisée pour le torseur, ce qui consiste à utiliser le même point de référence.

4.2.5 La notion de réduction d'un champs de forme agissant sur un champs torsoriel

Soit un champ équiprojectif de vecteurs $X \rightarrow \vec{v}$, un torseur, donc, et un champ, quelconque, de formes $X \rightarrow \vec{f}$. Le champs de forme agit sur le champ de vecteurs pour donner $\int dX \vec{f} \cdot \vec{v}$. Cette opération se réduit sur l'espace de torseur à l'action d'un cotorseur qui est à un certain sens la réduction du champ de formes aux torseurs. Cette réduction est une projection, avec une perte d'information : l'objet obtenu n'est même pas un champ de formes. Sa seule parenté avec le champ de forme est l'effet identique sur les torseurs.

Le calcul des éléments du cotorseur obtenu par réduction (les "éléments de réduction" du champ de formes) est une simple généralisation de ce qui a été fait par deux fois, une pour les forces, l'autre pour la quantité de mouvement. On obtient le cotorseur $\langle \int dP f(P), \int dP (\overrightarrow{AP} \wedge f(P)) \rangle$. Le premier élément (fixe, non lié aux rotations) est une forme, le second (dépendant de A, lié aux rotations) est un tourneur (résultat du produit vectoriel entre un vecteur et une forme).