Critique de la violation des inégalités de Bell par Joy Christian

Didier Lauwaert

But

Joy Christian prétend que l'usage d'une certaine algèbre (par exemple, l'algèbre de Clifford) pour les variables cachées locales permet de violer les inégalités de Bell.

Nous affirmons qu'il n'en est rien et le but de cette critique est de pointer les erreurs qui l'ont amené à cette fausse conclusion.

Théorème de Bell

Nous allons commencer par redonner une dérivation du théorème de Bell. Cela servira de base.

Le principe consiste à considérer que l'état d'un système, par exemple une particule, n'est pas décrit complètement par sa fonction d'onde ψ mais nécessite certains paramètres additionnels désignés collectivement par λ afin d'expliquer les propriétés du système et les résultats définis des mesures.

En termes d'une telle description de l'état, on devrait être capable de mathématiquement représenter les valeurs définies des mesures en utilisant une fonction $V_\lambda(O)$ pour chaque opérateur (observable) correspondant à une mesure et rendant la valeur mesurée.

Nous considérons deux particules intriquées dans l'état singulet du spin et l'observable de spin σ_x. La valeur de l'état de spin sur la première particule avec σ_x donnera la valeur propre 1/2 ou -1/2 avec des probabilités identiques de 1/2. La valeur de l'état de spin sur la deuxième particule avec σ_x donnera également la valeur 1/2 ou -1/2. La valeur mesurée sera la même que sur la première particule avec le signe inversé. Si l'on utilise un observable correspondant à une autre direction, disons σ_y, on obtient le même résultat.

Puisque nous considérons un système avec un état ψ fixé, plus précisément l'état singulet du spin, aucune dépendance à ψ n'a besoin d'être inclue dans la fonction V.

En 1965, John S.Bell a présenté un fameux théorème qui traitait de la possibilité d'une telle fonction sur les observables du spin. Bell fut capable de montrer que cette formulation doit être en conflit avec les prédictions statistiques de la mécanique quantique pour différentes mesures du spin.

Notons d'abord qu'aucune hypothèse particulière n'est faite sur les variables λ, sur l'algèbre à laquelle elles devraient obéir ou sur la forme la fonction V.

Fixons d'abord nos notations. Pour noter les directions de l'espace, nous écrirons les vecteurs unités comme $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$. Plutôt que d'utiliser la forme $V_\lambda(O)$, nous écrirons $A(\lambda, a)$ et $B(\lambda, \hat{b})$ pour représenter les fonctions sur les composantes du spin des particules 1 et 2, respectivement. Puisque les deux particules sont de spin 1/2, nous aurons $A = \pm\frac{1}{2}$ et $B = \pm\frac{1}{2}$, cependant, par simplicité, nous les changeons en $A = \pm 1$ et $B = \pm 1$. Cela ne change pas le résultat et, en particulier, nous ne voulons pas dire que nous considérons des particules de spin différent. Nous multiplions seulement le résultat par 2 pour alléger l'écriture.

Le théorème de Bell est concerné par une fonction de corrélation qui est essentiellement une mesure de la corrélation statistique entre les résultats des mesures des composantes du spin des deux particules. La fonction de corrélation est déterminée comme suit : nous disposons l'appareil mesurant la particule 1 pour sonder la composante dans la direction $\hat{a}$ et l'appareil mesurant 2 est disposé pour la direction $\hat{b}$. Nous effectuons une série de mesures des paires singulet de spin en utilisant cette configuration, enregistrant le produit $\sigma_a^{(1)}\sigma_b^{(2)}$ des résultats de chaque essai. La moyenne de ces produits sur la série de mesures est la valeur de la fonction corrélation.

En général, nous nous attendons à ce que la valeur de la moyenne déterminée de cette manière dépende des directions $\hat{a}$, $\hat{b}$ par rapport auxquelles les composantes du spin sont mesurées. Selon le formalisme quantique, nous pouvons prédire la moyenne, ou valeur moyenne, de tout observable

en utilisant la formule $E(O) = \langle \psi | O\psi \rangle$. Pour les séries d'expériences décrites, nous prenons la valeur moyenne du produit des observables appropriés des composantes du spin, ce qui donne :
(1) $P_{MQ}(\hat{a},\hat{b}) = \langle \sigma_a^{(1)} \sigma_b^{(2)} \rangle = -\hat{a} \cdot \hat{b}$

Dans le cas de valeurs prédéterminées, la moyenne du produit des deux composantes du spin $\sigma_a^{(1)} \sigma_b^{(2)}$ est obtenue en prenant une moyenne sur λ :
(2) $P(\hat{a},\hat{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda,\hat{a}) B(\lambda,\hat{b})$
où $\rho(\lambda)$ est la distribution de probabilité sur λ. $\rho(\lambda)$ est normalisé par :
(3) $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$

A nouveau, ici, peu importe la nature exacte des variables λ et leur algèbre, ce qui compte est la distribution de probabilité et la valeur des fonctions A et B, prenant tous leur valeur dans les réels puisqu'ils correspondent aux résultats des mesures.

Nous allons maintenant examiner la question de savoir si la fonction de corrélation donnée par (2) est compatible avec la prédiction de la mécanique quantique (1) pour cette fonction.

L'intrication implique qu'il y a une corrélation parfaite entre les résultats de la mesure de toute composante du spin de la particule 1 dans une direction donnée avec la mesure de la même composante du spin de la particule 2, tel que les résultats sont de signe opposé. Pour prendre en compte cela, la fonction de corrélation doit donner
(4) $P(\hat{a},\hat{a}) = -1 \quad \forall \hat{a}$

Il est facile de voir que la fonction de corrélation quantique satisfait cette condition. Si la prédiction utilisant les valeurs prédéterminées en est le reflet, nous devons avoir :
(5) $A(\lambda,\hat{a}) = -B(\lambda,\hat{a}) \quad \forall \hat{a}, \lambda$

A ce stade, nous avons assez d'information pour dériver la conclusion du théorème. En utilisant (2) avec (5) et le fait que $[A(\lambda,\hat{a})]^2 = 1$, nous écrivons

$$(6)\quad \begin{aligned} P(\hat{a},\hat{b}) - P(\hat{a},\hat{c}) &= -\int d\lambda \rho(\lambda)\left[A(\lambda,\hat{a})A(\lambda,\hat{b}) - A(\lambda,\hat{a})A(\lambda,\hat{c})\right] \\ &= -\int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda,\hat{a})A(\lambda,\hat{b})\left[1 - A(\lambda,\hat{b})A(\lambda,\hat{c})\right] \end{aligned}$$

En utilisant $A, B = \pm 1$, nous obtenons

(7) $\left|P(\hat{a},\hat{b}) - P(\hat{a},\hat{c})\right| \leq \int d\lambda \rho(\lambda)\left[1 - A(\lambda,\hat{b})A(\lambda,\hat{c})\right]$

Ensuite, en utilisant la normalisation (3) et (5), nous avons

(8) $\left|P(\hat{a},\hat{b}) - P(\hat{a},\hat{c})\right| \leq 1 + P(\hat{b},\hat{c})$

et cette relation, qui est habituellement appelée "inégalité de Bell", est la conclusion du théorème.

Il est facile de voir que pour certaines directions (1) viole les inégalités (8).

Insistons sur le fait que nous n'avons pas fait la moindre hypothèse sur les valeurs λ et leur algèbre mais seulement sur les fonctions donnant les valeurs définies, des nombres réels, avec une certaine densité de probabilité.

Articles de Joy Christian

Les numéros de formules se référant aux articles de Christian seront préfixés par jc.

Article 1

Concerne, Joy Christian, *Disproof of Bell's Theorem by Clifford Algebra Valued Local Variables*, ArXiv, quant-ph 0703179.

Résumé de l'article :

- Au début de l'article, il pose la situation : Einstein rêvait de compléter la mécanique quantique par des variables cachées donnant les résultats définis mesurés... Le théorème de Bell a mit du plomb dans l'aile à cet espoir en montrant que toute théorie à variables cachées locales donne un résultat incompatible avec la mécanique quantique. Les résultats de la mécanique quantique ayant un bon support expérimental.

- Puis il dérive le résultat (1) de la mécanique quantique.
- Ensuite, il pose le cas des variables cachées mais ne dérive le résultat (8) que dans le cas d'un modèle simple imaginé par Bell. Ce n'est en soit pas critiquable car il veut simplement s'inspirer de ce modèle.
- Il s'inspire aussi de l'algèbre des observables de spin, une algèbre de Clifford, pour essayer de la reproduire au niveau des variables cachées.
- Il définit avec beaucoup de détail son modèle avec variables obéissant à l'algèbre de Clifford puis dérive les résultats. Tous les calculs effectués jusqu'à ces résultats (jc18) et (jc19) sont corrects. Ces résultats montrent la violation des inégalités de Bell et leur conformité avec la mécanique quantique.

Le problème est dans (jc16). Il définit les fonctions A et B par :
$A_{\mathbf{n}}(\mu) = B_{\mathbf{n}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{n}$ "avec valeurs ± 1 "
où μ est la variable cachée, ici un trivecteur unité.

Cette quantité n'est pas un scalaire mais un pseudo scalaire ou, pour être exact, comme indiqué dans (jc15) un bivecteur unité, la valeur μ se faisant par référence à la 1-forme volume unité $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z$. Et **ce ne sont pas des bivecteurs que l'on mesure mais bien des nombres réels et c'est sur ces nombres que l'on calcule les corrélations, pas sur un éventuel bivecteur**. La valeur mesurée, scalaire, pourrait résulter de (jc16) mais c'est avec ces valeurs que l'on doit calculer les corrélations, pas avec (jc16).

Par exemple, puisque $A_{\mathbf{n}}(\mu)$ est une valeur mesurée réelle, on doit avoir $[A_{\mathbf{a}}(\mu) A_{\mathbf{b}}(\mu)] = 0$. Or (jc17) montre que $[A_{\mathbf{a}}(\mu) A_{\mathbf{b}}(\mu)] = -2\mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Plus loin, il l'affirme d'ailleurs lui-même "en pointant l'erreur' dans la démonstration du théorème de Bell. Il dit que l'on suppose la commutation de $A_{\mathbf{n}}(\lambda)$ et $A_{\mathbf{n}'}(\lambda)$ ce qui est faux si ces quantités obéissent à une algèbre de Clifford.

En effet, le résultat (6) dérivé plus haut ne serait plus valable, la commutation a été implicitement supposée. Mais c'est faux. En effet, si λ est bien une variable dont l'algèbre peut être quelconque, $A_{\mathbf{n}}(\lambda)$ et $A_{\mathbf{n}'}(\lambda)$ sont des fonctions à valeurs réelles, c'est ce qui est mesuré, et donc elles commutent toujours. Le choix (jc16) est bien une erreur.

Voilà ce qui arrive quand on se focalise sur les propriétés mathématiques des variables en oubliant qu'il y a de la physique derrière et ici, en particulier, la signification physique des variables qui correspondent à des mesures.

Article 2

Concerne, Joy Christian, *Disproof of Bell's Theorem : Reply to Critics*, ArXiv, quant-ph 0703244

La plus part des critiques auquel répond Joy Christian sont sans rapport avec la critique précédente. Philippe Grangier (réponse #3) et Tun Ten Yong (réponse #6) semblent avoir presque touché du doigt le problème. Mais le premier parle des moyennes sur les variables commutantes ou non commutantes et le deuxième la fonction de corrélation. Joy Christian démonte facilement et avec raison ces critiques.

Malheureusement, comme signalé plus haut, le problème est plus basique que ça. Et on continue à voir dans ces réponses aux critiques la même confusion entre une quantité locale λ pouvant obéir à une certaine algèbre et les valeurs mesurées, réelles, avec une algèbre évidemment commutante, qui servent de base au calcul de la corrélation. Nul besoin de calculs sophistiqués de corrélations, de mesures séquentielles du spin, etc. Ce qui sert dans le calcul des corrélations est une quantité réelle donnée par les appareils de mesure, c'est tout.

Je n'ai pas lu toutes les critiques originales. Est-ce que personne n'a pointé ce simple fait ? C'est surprenant ! Peut-être que Joy Christian a simplement mal compris la cible visée par ses détracteurs ? Difficile d'en juger.

Article 3

Concerne, Joy Christian, *Disproof of Bell's Theorem : Further Consolidations*, ArXiv, quant-ph 0707.1333

Rien de nouveau. Joy Christian approfondi ses résultats, les précises, les étend... Mais la même erreur conceptuelle reste.

Par exemple, page 3, section II, il dit "Dans la démonstration du théorème de Bell, il prétend que la localité nécessite que les observables tels que $A_{\mathbf{a}}(\mu)$ et $B_{\mathbf{b}}(\mu)$ doivent être de simples fonctions ordinaires".

Il critique les attaques contre son modèle en disant que cela est basé sur une mauvaise appréciation des concepts algébriques de Clifford...

Mais il rate le point. La phrase ci-dessus devrait avoir un préliminaire, non précisé par Bell, et on le comprend (tellement c'est élémentaire et évident) : $A_{\mathbf{a}}(\mu)$ et $B_{\mathbf{b}}(\mu)$ sont des fonctions à valeurs réelles, de simples suites de nombres réels (dans une série de mesures indépendantes). Et étant donné la localité, ces résultats mesurés doivent être indépendants. Et étant donné également l'indépendance des mesures sur des systèmes différentes (la suite de mesures sur des paires intriquées) cela implique forcément la commutation de ces deux fonctions. La puissance et l'utilité de l'algèbre de Clifford sont indéniables et les résultats calculés par Joy Christian sont mathématiquement corrects, mais en attribuant à ces deux fonctions des propriétés de non-commutation, il remet en cause :

- Soit la signification physique de ces deux quantités.
- **Soit il considère leurs valeurs comme réellement mesurées et, dans ce cas, il introduit un effet non local à travers la non-commutation. C'est bien caché : les valeurs $A_{\mathbf{a}}(\mu)$, parfaitement mesurables et calculables, dépendent de l'ordre (sur un intervalle spatial) dans lequel les mesures sont faites**. Et, bien entendu, après la prise des intégrales avec sa mesure $d\rho(\mu)$ ce n'est plus apparent. Mais **toutes les mesures ne sont pas statistiques** ! Il semble oublier que $A_{\mathbf{a}}(\mu)$ est avant tout une mesure individuelle et que, avant tout calcul statistique, cette fonction doit avoir toutes les propriétés physiques expérimentales requises.
- Soit (étant donné la dernière remarque), si toutes les mesures ne peuvent se faire qu'à travers ces calculs statistiques, alors les quantités $A_{\mathbf{a}}(\mu)$ et $B_{\mathbf{b}}(\mu)$ ne représentent plus des valeurs

directement mesurées mais des variables internes avec relation de non-commutation.... comme en mécanique quantique ! On retombe sur le premier point (signification physique de ces deux quantités) et le modèle de Joy Christian n'est qu'une reformulation alambiquée de la mécanique quantique et certainement pas un modèle à variables cachées locales (où $A_{\mathbf{a}}(\mu)$ et $B_{\mathbf{b}}(\mu)$ sont des quantités réelles, mesurables et commutantes). Alambiquée car les seules quantités correspondant à des quantités physiquement mesurées sont ces statistiques, sur des variables internes, cachant ainsi le caractère probabiliste de la mécanique quantique. Il faut tout de même avouer que c'est une construction astucieuse. L'aspect caché de ce caractère probabiliste est visible sur la remarque faites plus haut où l'indépendance des mesures successives ou, dans un modèle à variable cachée, le fait que deux systèmes dans l'état μ doivent donner les mêmes résultats de mesure alors que $[A_{\mathbf{a}}(\mu), B_{\mathbf{b}}(\mu)] \neq 0$. Les mesures ne sont plus indépendantes ou ne dépendent plus entièrement de μ mais aussi de l'ordre.

Article 4

Concerne, Joy Christian, *Can Bell's Prescription for Physical Reality Be Considered Complete ?*, ArXiv, quant-ph 0806.3078

Après avoir parlé de ses résultats précédents, il reparle du modèle de Bell où λ est un vecteur et affirme que $\lambda \cdot \mathbf{n}$ ne doit pas être un scalaire mais un pseudo scalaire. C'est exactement ce que nous avions signalé plus haut. Il passe donc du groupe $O(3)$ à $SO(3)$ pour le vecteur pour éviter la symétrie par réflexion.

Après avoir signalé que $SO(3)$ n'a de représentations que tensorielles et pas spinorielles, il passe au groupe de recouvrement $SU(2)$ qui admet bien des représentations spinorielles.

Puis il continue ses développements pour parvenir aux mêmes conclusions que dans ses articles précédents.

Tout cela est bien joli. Mais :

- Il justifie le passage à $SO(3)$ à l'aide de ce que nous avons déjà signalé comme un défaut.

- Il justifie le passage à $SU(2)$ par le fait que $SO(3)$ n'admet pas de représentation spinorielle. Il justifie cela par sa parabole avec le rocher tournant d'un angle 2π ou 4π . Mais doit-on rappeler que le théorème de Bell est général ? Il ne concerne pas que les fermions et peut s'appliquer à des bosons. Ce problème n'est donc pas nécessaire.
- En outre, il faut rappeler qu'il y a un changement de signe lors de l'échange de deux fermions. Voilà une bonne raison de passer à $SU(2)$ pour des variables internes ou pour les états de la mécanique quantique... mais pas pour les variables cachées ! En effet, ce faisant, il admet une symétrie d'échange sur les variables cachées, ce qui n'est certainement pas quelque chose de local. C'est une autre manière de justifier le changement de signe lors de la commutation de $A_{\mathbf{a}}(\mu)$ et $B_{\mathbf{b}}(\mu)$ (ou bien à cause de l'ordre des mesures ou bien par symétrie d'échange).

Ce jeu avec les groupes introduit la non localité, ce que Joy Christian n'a certainement pas vu. C'est encore une confusion entre un jeu purement mathématique, certes astucieux, et la physique qui se cache derrière (les mesures, le sens physique des fonctions).

Conclusion

Suite à cette grosse confusion entre variables cachées internes pouvant obéir à une algèbre spécifique et variables mesurées réelles, Joy Christian aboutit à la fausse conclusion que le théorème de Bell est violé dans ce cas.

Par cette construction mathématique, il introduit en fait une non localité très bien cachée.

Entendons nous bien. Ce qui est critiqué ici n'est pas le modèle de Joy Christian et son usage de l'algèbre de Clifford. Des modèles à variables cachées non locales existent bel et bien, il n'est que rappeler la théorie de Bohm. Qui plus est, le modèle de Joy Christian est particulièrement simple, élégant et astucieux. Mais ne nous emballons pas. Rappelons qu'il ne s'applique que dans le cas de la mesure d'un état singulet pour une paire de fermions. Il reste à voir s'il peut se généraliser. Et je doute en plus qu'une formulation relativiste soit aisée à réaliser (bien qu'il ne soit pas prouvé que c'est impossible). D'autant que le défaut de son modèle, la confusion entre une quantité mathématique et une quantité mesurée, est rédhibitoire. Lever cette anomalie ne peut certainement pas se faire sans complication et l'apparition d'une non localité explicite et non plus cachée.

Non, ce n'est pas son modèle qui est critiqué. Ce qui est critiqué ici est l'interprétation qu'il en fait, c'est-à-dire affirmer qu'il s'agit d'un modèle à variables cachées locales.

Il se défend en affirmant que ses détracteurs n'ont pas compris son modèle, ne comprennent pas bien l'algèbre de Clifford ou son usage et se contente de justifier ses développements par d'autres développements plus complexes, plus poussés, montrant d'autres résultats en accord avec la mécanique quantique. Tout cela serait une défense parfaitement justifié si l'erreur s'était effectivement logée là. Malheureusement pour son modèle, ce n'est pas là que se situe l'erreur mais simplement dans l'interprétation physique des variables, avant même d'effecteur le moindre calcul utilisant l'algèbre de Clifford.