De la notion de dérivée à la notion de différentielle

Fjord, du forum Futura-Science

Mardi 23 Septembre 2008

Table des matières

1 Notion de dérivée : étude pour les fonctions d'une seule variable

1.1 Cas général

Soit une fonction d'une seule variable x.

On définit la **dérivée** de cette fonction comme étant la *pente locale* de la courbe représentative de cette fonction (voir figure 1) :

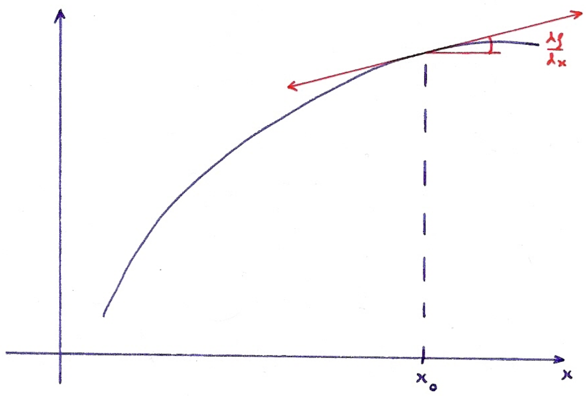

FIGURE 1 – Représentation de la dérivée d'une fonction

On note la dérivée $\frac{df}{dx}$: nous verrons la cohérence de cette notation dans la section suivante.

1.2 Cas d'une fonction linéaire

La courbe représentative est alors une droite, et la pente locale est la même en tout point, égale à la pente de la droite (voir figure 2) :

$$\frac{df}{dx} = constante = pente\ de\ la\ droite$$

1.3 Linéarisation

La linéarisation est une approximation d'une fonction autour d'un point x_0.

Elle consiste à supposer que si l'on reste suffisament proche du point x_0, la courbe peut être approximée par une droite.

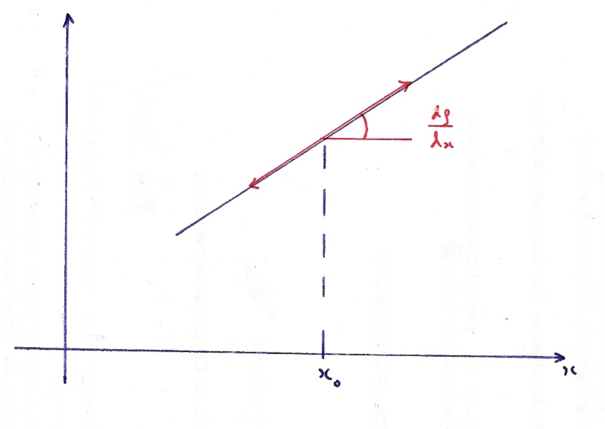

FIGURE 2 – Représentaton de la dérivée d'une fonction linéaire

La pente de cette droite, appelée **tangente**, est égale à la pente locale en x_0 de la courbe représentative de la fonction : elle est donc égale à la dérivée de la fonction en x_0.

L'équation de la tangente se déduit alors des deux conditions suivantes :
- la droite vaut $f(x_0)$ en x_0 ;
- sa pente est égale à $\frac{df}{dx}_{x_0}$, la dérivée en x_0.

Son équation est donc :

$$y = f(x_0) + \frac{df}{dx}_{x_0}(x - x_0)$$

2 Vers la notion de différentielle : étude pour les fonctions d'une seule variable

2.1 Cas d'une fonction linéaire

Soit deux points x et x_0.

On définit deux grandeurs :
- $\Delta f = f(x) - f(x_0)$
- $\Delta x = x - x_0$

Ici, Δf et Δx peuvent être positifs ou négatifs.

Dans le cas d'une fonction linéaire :

$$\frac{df}{dx} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = pente\ de\ la\ droite$$

Cette relation est vraie quelque soit x et x_0.

Cela se visualise sur le graphe présenté en figure 3.

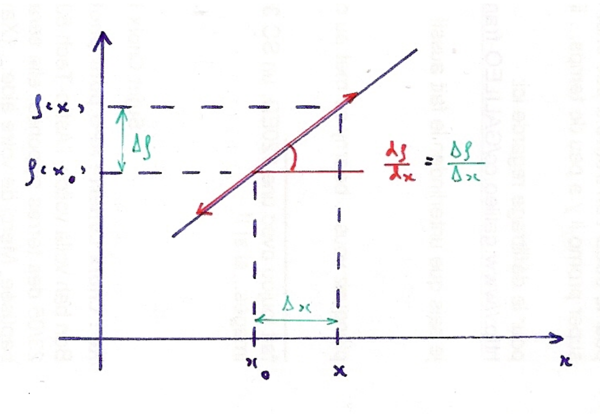

Figure 3 – Lien entre la dérivée et le rapport des variations de f et x, dans le cas d'une fonction linéaire

2.2 Cas général

Soit deux points x et x_0.

La pente de la corde entre x et x_0 vaut $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (voir figure suivante).

La dérivée vaut la pente locale de la droite en x_0 : il s'agit de la limite de la pente de la corde entre x et x_0, lorsque $x \rightarrow x_0$ (voir figure 4) :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

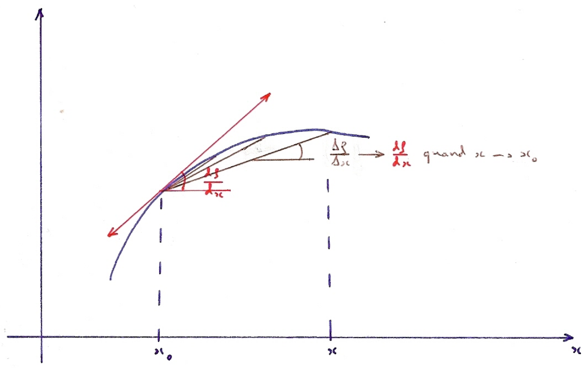

Figure 4 – La dérivée est la limite de la pente de la corde lorsque x s'approche de x_0

Pour une fonction linéaire, la tangente et la corde sont confondues, et la limite est atteinte pour tout x.

2.3 Explication de la notion de différentielle

La signification des différentielles dx et df apparaît alors :
- $dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$
- $df = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0))$

On a donc :

$$df = \frac{df}{dx}_{x_0} dx$$

Le point délicat est ici de ne pas dire que ces limites sont nulles.

Physiquement, on les considère comme étant des variations infinitésimales (infiniment petites) de f ou de x au voisinage de x_0.

Il est vrai que si l'on compare ces différentielles à des grandeurs finies (qui ne sont pas infiniment petites), on peut les considérer comme rigoureusement nulles : par exemple, $2 + dx = 2$.

Mais quand on utilise les différentielles, on compare toujours des différentielles entre elles : on compare donc un infiniment petit à un autre infiniment petit ; les expressions sont donc des *formes indéterminées.*

Par exemple, si on passait à la limite dans l'équation $df = \frac{df}{dx}_{x_0} dx$, on aurait $0 = 0$.

Mais on n'effectue pas ce passage à la limite qui n'apporte aucune information : on garde les différentielles et on les manipule.

2.4 Retour sur la linéarisation

Les différentielles sont normalement valables pour des variations infinitésimales.

On a alors une autre approche de la linéarisation, équivalente à la précédente : elle consiste à assimiler une variation petite mais non infinitésimale à une différentielle.

On a alors :

$$df = \frac{df}{dx}_{x_0} dx \Rightarrow \Delta f \approx \frac{df}{dx}_{x_0} \Delta x$$

L'égalité stricte n'étant vrai que pour une fonction linéaire.

On a alors, en remplaçant Δf et Δx par leurs expressions :

$$f(x) - f(x_0) \approx \frac{df}{dx}_{x_0}(x - x_0) \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}_{x_0}(x - x_0)$$

On retrouve bien la formule de la linéarisation du paragaphe 1.3.

3 Cas d'une fonction de plusieurs variables

3.1 Notion de dérivée partielle

On considère ici une fonction de trois variables x, y et z.

On définit les **dérivées partielles** par rapport à x, y ou z comme étant les pentes locales, en un point (x_0, y_0, z_0), dans les directions $0x$, $0y$ ou $0z$ (respectivement).

Ces dérivées partielles sont notées $\frac{\partial f}{\partial x}_{x_0,y_0,z_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y}_{x_0,y_0,z_0}$ ou $\frac{\partial f}{\partial z}_{x_0,y_0,z_0}$ (respectivement).

3.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

La formule dans le cas d'une seule variable :

$$df = \frac{df}{dx}_{x_0} dx$$

Se généralise à une fonction de plusieurs variables, comme suit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}_{x_0,y_0,z_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y}_{x_0,y_0,z_0} dy + \frac{\partial f}{\partial z}_{x_0,y_0,z_0} dz$$

3.3 Linéarisation d'une fonction de plusieurs variables

La formule dans le cas d'une seule variable :

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx}_{x_0} \Delta x$$

Se généralise à une fonction de plusieurs variables, comme suit :

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}_{x_0,y_0,z_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}_{x_0,y_0,z_0} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}_{x_0,y_0,z_0} \Delta z$$

3.4 Application au calcul de l'incertitude

Pour calculer la variation maximale, on choisit les sens de Δx, Δy et Δz en fonction des signes des dérivées partielles de telle sorte que la contribution de chacune des directions $0x$, $0y$ et $0z$ soient de même signe.

Si on définit les incertitudes **positives** $\Delta f_{incertitude}$, $\Delta x_{incertitude}$, $\Delta y_{incertitude}$ et $\Delta z_{incertitude}$, on a alors :

$$\Delta f_{incertitude} \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x}_{x_0,y_0,z_0} \right| \Delta x_{incertitude} + \left| \frac{\partial f}{\partial y}_{x_0,y_0,z_0} \right| \Delta y_{incertitude} + \left| \frac{\partial f}{\partial z}_{x_0,y_0,z_0} \right| \Delta z_{incertitude}$$

4 Introduction des différentielles logarithmiques

4.1 Expression de la différentielle d'un logarithme

Soit la fonction logarithme népérien : on connait l'expression de sa dérivée :

$$\frac{dln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

On en déduit l'expression de la différentielle d'un logarithme, en multipliant par dx :

$$dln(x) = \frac{dx}{x}$$

Si on considére la dérivée du logarithme d'une fonction, on a de même :

$$\frac{dln(f(x))}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}}{f}$$

On en déduit l'expression de la différentielle d'un logarithme, en multipliant par dx :

$$dln(f) = \frac{df}{f}$$

4.2 Application au calcul de la différentielle d'une fonction puissance de plusieurs variables

Les dérivées logaritmiques sont un outil très utile lorsque l'on cherche la différentielle d'une fonction puissance de plusieurs variables, c'est à dire une fonction de la forme $f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

On a en effet alors $ln(f) = \alpha ln(x) + \beta ln(y) + \gamma ln(z)$, d'où :

$$dln(f) = \alpha dln(x) + \beta dln(y) + \gamma dln(z) \Rightarrow \frac{df}{f} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$$

Cette formule est cohérente avec la formule de calcul de la différentielle d'une fonction établi dans le paragraphe 3.2, car on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{x_0, y_0, z_0} = \alpha x_0^{\alpha-1} y_0^\beta z_0^\gamma = \alpha\frac{f}{x}$$

Le calcul de l'incertitude se fait alors de façon similaire à la section précédente :

$$\frac{\Delta f_{incertitude}}{f} = \mid \alpha \mid \frac{\Delta x_{incertitude}}{x} + \mid \beta \mid \frac{\Delta y_{incertitude}}{y} + \mid \gamma \mid \frac{\Delta z_{incertitude}}{z}$$