DIMENSIONS DE PLANCK

Il convient de nous attarder un moment sur la constante de Planck (car beaucoup d'ouvrages font mention de ce que nous allons voir sans les précautions de rigueur). Nous venons de voir que la mesure des objets dépend du principe d'indétermination de Heisenberg. Cette précision joue tant sur les mesures du temps que sur la trajectoire des particules ou la densité d'énergie de l'Univers. Voyons que cela à par extension d'autres implications.

Nous avons démontré précédemment qu'une des relations d'incertitudes est donnée par (de l'ordre de la constante de Planck donc à un facteur près):

$$\left\| \left[x, p_x \right] \right\| = \hbar$$

Grossièrement, nous pouvons donc dire qu'à une fluctuation λ de l'espace (à ne pas confondre avec la notation de la longueur d'onde), nous pouvons associer la quantité de mouvement :

$$p_x = \frac{\hbar}{\lambda}$$

À celle-ci correspond, d'après nos résultats en mécanique relativiste, la relation l'énergie $E = Mc^2 = p \cdot c$, ou la masse équivalente (en divisant par c^2) p / c . En désignant par M cette masse associée à la perturbation λ , nous avons donc :

$$M = \frac{\hbar}{c \cdot \lambda}$$

La gravitation due à cette masse est caractérisée par une longueur R que nous déterminerons en ordre de grandeur en écrivant que l'énergie potentielle qui lui est associée (cela suppose que la gravitation classique et quantique sont régies par les mêmes lois...), GM^2 / R (voir chapitre de mécanique classique), est égale à la masse-énergie Mc^2. Cela donne:

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

ou, en remplaçant M par son expression précédente :

$$R = \frac{G\hbar}{c^3 \lambda}$$

Pour qu'il n'y ait pas auto-amplification (et donc divergence) du phénomène de fluctuation quantique du vide, nous devons avoir de préférence $R = \lambda$. En écrivant l'égalité entre ces deux grandeurs, nous aboutissons donc à une quantité qui représente la dimension minimale (en ordre de grandeur) que puisse concevoir la physique. C'est la fameuse "longueur de Planck" :

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \cong 2 \cdot 10^{-35} \; [m]$$

pour laquelle il correspond la période ou "temps de Planck" $t = \lambda / c$ d'où :

$$t_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \cong 9 \cdot 10^{-42} \; [s]$$

Nous pouvons maintenant revenir à une autre expression plus intéressante de la masse fluctuante. Puisque :

$$M = \frac{\hbar}{c \cdot \lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\hbar}{c \cdot M} \quad \text{et} \quad \lambda = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

nous avons dès lors la "masse de Planck" :

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \cong 10^{100} \quad \left[kg \cdot m^{-3}\right]$$

L'analyse dimensionnelle nous donne (à une constant près bien sûr ! - théorème du Viriel) :

$$E = kT$$

et donc :

$$E = mc^2 = pc = kT \Rightarrow \frac{p}{c} = \frac{kT}{c^2} = M_P \Rightarrow \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \frac{kT}{c^2}$$

d'où la "température de Planck" :

$$T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{Gk}} \cong 1.42 \cdot 10^{32} \quad [K]$$

et encore "l'énergie de Planck" :

$$E_P = M_P c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.956 \cdot 10^9 \, [J]$$

Après tout cela, nous obtenons facilement la "densité de Planck" :

$$\rho_P = \frac{M_P}{\lambda_P^3} = \frac{\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}}{\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}^3} = \frac{\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}\sqrt{\frac{c^3}{G\hbar}}}{\frac{G\hbar}{c^3}} = \sqrt{\frac{c^4}{G^2}}\frac{c^3}{G\hbar} = \sqrt{\frac{c^{10}}{G^4\hbar^2}} = \frac{c^5}{G^2\hbar} = \cong 5.1 \cdot 10^{96} \quad \left[kg \cdot m^{-3}\right]$$

Nous pouvons nous amuser à obtenir encore d'autres valeurs de Planck encore mais qui ne veulent plus dire grand chose à force (et nous pourrions continuer ainsi longtemps avec énormément d'autres grandeurs) :

La force de Planck :

$$F_P = M_P \frac{\lambda_P}{t_P^2} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \frac{\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}}{\left(\sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}\right)^2} = \frac{c^4}{G} \cong 1.21 \cdot 10^{44} \, [N]$$

La puissance de Planck :

$$P_P = \frac{E_P}{t_P} = \frac{c^5}{G} = 3.629 \cdot 10^{52} \left[W\right]$$

La pulsation de Planck :

$$\omega_P = 2\pi f_P = \frac{1}{t_P} = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} = 1.855 \cdot 10^{43} \left[rad \cdot s^{-1}\right]$$

En procédant avec le même raisonnement intitial fait avec la masse mais en utilisant l'énergie potentielle électrostatique au lieu de l'énergie potentielle gravitationnelle nous pouvons obtenir la charge de Planck :

$$q_P = \sqrt{c\hbar 4\pi\varepsilon_0} = 1.875 \cdot 10^{-18} \left[C\right]$$

Dès lors nous pouvons calculer un courant de Planck :

$$I_P = \frac{Q_P}{T_P} = \sqrt{\frac{c^6 4\pi\varepsilon_0}{G}} = 3.479 \cdot 10^{25} \left[A\right]$$

la tension de Planck :

$$U_P = \frac{E_P}{q_P} = \sqrt{\frac{c^4}{G 4\pi\varepsilon_0}} = 1.0432 \cdot 10^{27} \left[V\right]$$

et l'impédance de Planck (…) :

$$Z_P = \frac{V_P}{I_P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{Z_0}{4\pi} = 29.98 \left[\Omega\right]$$

Remarque : certains physiciens se sont servis (et se servent toujours) des résultats ci-dessus pour des raisonnements farfelus et dangereux qui ne sont que interprétation (je ne veux pas leur jetter la pierre mais il faut prendre mille et une précautions sans démonstrations rigoureuses). Il convient de prendre avec des pincettes toutes les informations relatives aux dimensions de Planck que vous pourriez trouver (même si celles-ci sont fort pertinentes). L'exemple le plus connu est donné par la longueur d'onde de Compton λ_C (voir chapitre de physique nucléaire) qui dépend de la masse-énergie du photon. Si cette longueur d'onde est égale au rayon de Schwarzschild classique pour la même masse-énergie (voir chapitre d'astrophysique), alors dans ce cas sa valeur est celle de la longueur de Planck et sa masse est égale à la masse de Planck. Il est alors tentant de dire que la particule forme alors un trou noir. Mais il s'agit d'une analogie car dans ce cas, rien ne nous dit que l'expression du rayon de Schwarzschild s'applique à la physique quantique.