Sur une forme microscopique du tenseur d'énergie

About a microscopic form of the energy tensor

Christian PREZIOSA

I.U.T. – Département Génie Mécanique et Productique
Université d'Orléans
christian.preziosa@univ-orleans.fr

RESUME. Dans le cadre de la Relativité Générale, la métrique et un champ de quadri-vitesse unitaire, reliés par une équation appropriée, sont à même de rendre compte de l'électrodynamique classique. Il en ressort deux aspects physiques inédits : une non-linéarité du champ d'interaction global et une supra-luminicité de l'énergie microscopique totale incluant une énergie dynamique intra-corpusculaire. Ce dernier aspect disparaît en tenant compte d'un univers à cinq dimensions, permettant, en outre, une interprétation rationnelle du phénomène quantique, proche des concepts de Louis De Broglie.

ABSTRACT. Within the framework of General Relativity, metrics and a unitary four-velocity field, connected by a suitable equation, are able to account for classical electrodynamics. As a result, two unexpected physical aspects can be observed: non-linearity of the overall interaction field and over-light-speed of the global microscopic energy including a intra-corpuscular dynamic energy. The latter disappears taking into account a five-dimensional universe, which also allows a rational interpretation of quantum phenomenon, close to the concepts of Louis De Broglie.

1 Introduction

En électrodynamique classique, les équations de Maxwell déterminent le champ électromagnétique associé à une distribution de charges et de courants, mais ne rendent pas compte de ces derniers.
En outre, la loi de Lorentz qui relie la force inertielle à la force électromagnétique est posée indépendamment de ces équations.
Enfin, bien que d'aspect relativiste, l'électricité et le magnétisme ne sont nullement reliés à la Relativité Générale.

Plusieurs essais ont été déjà réalisés pour combler ces lacunes. Il apparaît se dégager du développement suivant qu'ils ont toujours échoué à cause d'une donnée cruciale que la mécanique quantique, de par son caractère purement probabiliste, a forcé d'ignorer : un champ de vitesse associé à la métrique. Non pas un champ de vitesse lié à un milieu spécial s'apparentant à l'« éther » pré-relativiste (Lorentz), mais bien un champ de vitesse, comme nous allons le voir, qui n'est lié à aucun substrat, donc naturellement compatible avec le principe de relativité.

L'équation de champ sur laquelle repose la théorie semble justifiée par toutes ses conséquences, du moins concernant l'aspect corpusculaire de la particule (son caractère ondulatoire nécessitera plus loin dans cet exposé, concernant les particules massiques, l'introduction d'une cinquième dimension d'univers).

Elle résulte à l'origine, non pas d'un tâtonnement, mais d'une réflexion sur une identité mathématique à laquelle satisfait tout tenseur antisymétrique d'ordre 2 et dérivable au moins une fois, qu'il est aisé d'établir (voir démonstration en annexe) :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{4}\varphi^2.\delta_i^j - \varphi_{ik}.\varphi^{jk}\right)_{,j}}_{(a)} = \underbrace{\varphi^{jk}{}_{,k}.\varphi_{ij}}_{(b)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}).\varphi^{jk}}_{(c)}$$

Cette identité prend un sens physique précis en électrodynamique si, à partir d'une équation de champ appropriée, posée à priori, (c) s'annule ; impliquant le second groupe des équations de Maxwell comme système d'équations linéaires approchées (asymptotiques) d'un champ électromagnétique étendu.

Alors, nous devons aussi pouvoir identifier (a) avec la densité de force inertielle, et (b) avec la densité de force de Lorentz.

L'article relate d'une solution naturelle au problème posé. Sa pertinence tient à ce qu'elle contient l'électrodynamique classique et conduit, à une interprétation rationnelle du phénomène quantique pourvu que nous appliquions notre modèle spatio-temporel du photon à un espace riemannien penta-dimensionnel concernant les particules massiques.

2 Equation fondamentale

L'équation des géodésiques, sous forme eulérienne, contient seulement les composantes de la métrique g_{ij} et de la quadri-vitesse unitaire u_i :

$$\gamma_i = u^j.\nabla_j u_i = u^j.(u_{i,j} - u_{j,i}) = u^j.u_{i,j} + \frac{1}{2}u^j.u^k.g_{jk,i} = 0 \quad (1)$$

avec : $i = 0$ à 3

exprimée ici dans un repère quadri-dimensionnel quelconque et où γ_i désigne la quadri-accélération.

Dans le cas extérieur, le phénomène gravitationnel pur est donc décrit par la métrique et un champ de quadri-vitesse unitaire uniquement.

Nous sommes alors naturellement tentés de généraliser ce résultat :

à tout point de l'espace-temps est attribué un quadri-vecteur vitesse unitaire bien défini. Notre but est de montrer dans quelle mesure ce dernier associé à une métrique riemannienne peut rendre compte de la matière et des champs de force en général.

Par ailleurs, nous savons que le tenseur de Ricci, R_{ij} , et le quadri-vecteur accélération, γ_i , expriment les courbures respectivement de l'espace-temps et de la ligne d'univers. Si nous plaçons l'équation d'Einstein dans le cadre d'une théorie unitaire, elle doit traduire un principe fort reliant la géométrie et le mouvement.

En ce sens, nous projetons une *correspondance directe entre les directions des courbures géométriques et cinématiques*, en posant comme <u>postulat fondamental</u>, que nous allons justifier par ses conséquences :

$$\boxed{R_{ij} / R = \gamma_i.\gamma_j / \gamma^2} \quad (2)$$

où R et γ désignent respectivement la contraction scalaire du tenseur de Ricci et le module du quadrivecteur accélération.

Ce sont 9 équations différentielles indépendantes, non-linéaires, où interviennent seulement les 10 composantes g_{ij} du tenseur métrique et les 4 composantes u_i du vecteur vitesse.

Le libre choix d'un repère (4 relations arbitraires sur les composantes g_{ij}) et le caractère unitaire du quadri-vecteur vitesse (1 relation sur les composantes u_i) assurent la compatibilité des équations.

Le scalaire $\dfrac{R}{\gamma^2}$ étant supposé partout défini, le problème peut alors être posé comme suit :

$$\boxed{R_{ij} = \mu_i.\mu_j \quad \text{et} \quad \mu_i \Lambda \gamma_j = \mu_i.\gamma_j - \mu_j.\gamma_i = 0} \qquad \text{(3a,b)}$$

où μ_i est un quadrivecteur.

Ce sont respectivement les équations fondamentales de champ et de mouvement de la théorie.

Remarquons que le système d'unités physiques ne comprend ici que l'unité de longueur et ses puissances entières, négatives ou positives (système d'unités naturelles).

3 Tenseur d'énergie microscopique T_{ij}

En formant le tenseur mixte d'Einstein, dans un repère quelconque, d'après (3a) :

$$T_i^j = \mu_i.\mu^j - \frac{1}{2}\mu^2.\delta_i^j \quad \text{avec} \quad \mu^2 = \mu_k.\mu^k \qquad (4)$$

puis, la divergence de ce tenseur :

$$\nabla_j T_i^j = \mu_i . \nabla_j \mu^j + \mu^j . \left(\mu_{i,j} - \mu_{j,i} \right) = 0 \quad (5)$$

ce qui implique nécessairement, après quelques calculs :

$$\boxed{\mu^j . (\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_i \mu^i = 0} \quad (6a, b)$$

Ce sont les équations différentielles constitutives de l'énergie de la particule (sous son aspect corpusculaire comme nous allons le voir). Elles sont du premier ordre. Notons que la première équation n'est pas linéaire et que la seconde est une équation de conservation.

4 Principe fondamental

Si nous admettons, a priori, que le champ μ_i s'évanouit à l'infini, ou bien aux limites d'un quelconque domaine spatial fini $\mathcal{V}^3$, alors nous pouvons poser comme principe physique fondamental, d'après (6b) :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}^3} \mu^0 . \sqrt{|g|} . dV = \breve{h}} \quad (7)$$

où g désigne le déterminant de g_{ij} et où $\breve{h}$ est une constante physique homogène au carré d'une longueur (que la suite de l'étude permet d'identifier au produit $\chi . h . c$, où χ , h , c sont respectivement : la constante de gravitation d'Einstein, la constante de Planck et la célérité de la lumière).

Cette condition, jointe aux équations (3a) et (6a,b), forment un système complet permettant d'accéder, en principe, à des solutions de répartition de l'énergie correspondant aux champs créés par les diverses particules observées, considérées, soit chacune isolée extérieurement, soit agissant entre-elles, mais formant un système fermé.

Dans ce schéma, la non-linéarité des équations (3a) et (6a) doit pouvoir assurer l'individualité de chacune des particules dans le système (propriété qu'ont les particules de conserver leurs caractéristiques propres en présence d'autres particules).

Cependant, nous verrons plus loin que cette description est insuffisante à rendre compte de l'aspect ondulatoire des particules massiques qui nécessite un univers penta-dimensionnel.

La constante $\breve{h}$ est la seule constante intervenant avec la constante c dans la théorie.

5 Densités d'énergie-impulsion et d'énergie interne

Nous faisons désormais usage d'un repère cartésien et de l'approximation euclidienne dans les calculs.

Nous avons :

$$T_i^{\ j}.u_j = -\frac{1}{2}\mu^2.u_i$$

En outre, dans l'espace-temps de signature (1, -1, -1, -1), les composantes de la densité d'énergie-impulsion vérifient :

$$(T^{00})^2 - \sum_\alpha (T^{0\alpha})^2 = (-\frac{1}{2}\mu^2)^2.\delta^{00} \quad \text{avec : } \alpha = 1 \text{ à } 3 \qquad (8)$$

et si le repère est comobile, considérant que $\mu^0 = 0$ quand $u^\alpha = 0$ puisque $\mu_i.u^i = 0$:

$$T^{00} = -\frac{1}{2}\mu^2 \quad , \quad T^{0\alpha} = 0 \quad , \quad T^{\alpha\beta} = \mu^\alpha.\mu^\beta - \frac{1}{2}\mu^2.\delta^{\alpha\beta} \qquad (9)$$

ce qui montre que $\sigma_0 = -\frac{1}{2}\mu^2 \ (\geq 0)$ doit être interprété comme la densité d'énergie propre (ou de masse propre) du point considéré et $T^{\alpha\beta}$ comme la densité d'énergie issue de tensions intérieures, que nous qualifions simplement d'énergie interne.

Puis, revenant à un repère inertiel quelconque, en posant: $\boxed{\varphi_{ik} = \mu_i \Lambda u_k}$ (10), nous vérifions à partir de (4) :

$$T^{ij} = \sigma_0.u^i.u^j + \widehat{T}^{ij} \quad (11a) \quad \text{et} \quad \sigma_0 = -\frac{1}{4}\varphi^2 = -\frac{1}{2}\mu^2 \quad \text{avec}$$

$$\varphi^2 = \varphi_{ij}.\varphi^{ij} \quad \text{et} \quad \widehat{T}^{ij} = \sigma_0.u^i.u^j - (\frac{1}{4}\varphi^2.\delta^{ij} - \varphi^{ik}.\varphi^j{}_k) \quad (11b)$$

Notons que $\widehat{T}^{ij}$ est l'expression du tenseur d'énergie interne dans le nouveau repère.

6 Energie-impulsion d'une particule isolée

Il est loisible de représenter une particule comme un très petit élément d'espace, assimilable à un point, présentant une forte densité d'énergie.

Nous considérons une surface fermée infinitésimale Σ_0 (dans un repère comobile : de forme sphérique, centrée sur la particule, pour faciliter les calculs), d'orientation locale n^i avec $n^2 = 1$ dans un repère cartésien quadri-dimensionnel quelconque.

L'ensemble des lignes d'univers contenant chaque point du volume délimité par cette surface constitue un tube à quatre dimensions dans l'espace-temps.

L'ensemble des génératrices du tube d'univers constitue une hyper surface à trois dimensions.

L'hyper-aire d'une section droite du tube (orthogonale aux lignes d'univers en tout point), d'orientation locale u^i ou $-u^i$, représente sensiblement le volume au repos V_0 de la particule.

Nous considérons les frontières d'intégration constituées par deux sections droites $\mathscr{D}^3$ séparées de la distance curviligne <u>infiniment petite</u> Δs et l'enveloppe périphérique du tube $\mathscr{D}^2 x \mathscr{S}$.

A partir de l'expression (4), tenant compte de l'orthogonalité des quadri-vecteurs μ^i et u^i, et de $\mu^2 \simeq 0$ $(\sigma_0 \simeq 0)$ sur Σ_0, par application du théorème d'Ostrogradsky :

$$\int_{\mathscr{V}^3 x \mathscr{T}} (\mu^i.\mu^j + \sigma_0.\delta^{ij})_{,j}.dx^0.dV = 0 \simeq$$
$$\int_{\mathscr{D}^2 x \mathscr{S}} \mu^i.\mu^j.n_j.d\Sigma_0.ds + \Delta(\int_{\mathscr{D}^3} \sigma_0.u^i.dV_0)$$

Par ailleurs, eu égard à la petitesse de l'intervalle d'intégration Δs :

$$\int_{\mathscr{D}^2 x \mathscr{S}} \mu^i.\mu^j.n_j.d\Sigma_0.ds \simeq \Delta s.\int_{\mathscr{D}^2} \mu^i.\mu^j.n_j.d\Sigma_0$$

Posons : $m_0.\overline{u}^i = \int_{\mathscr{D}^3} \sigma_0.u^i.dV_0$

et $m_0 = \sqrt{(\int_{\mathscr{D}^3} \sigma_0.u_i.dV_0).(\int_{\mathscr{D}^3} \sigma_0.u^i.dV_0)}$,

(cette définition de la masse propre du corpuscule m_0 a pour but de rendre unitaire le quadri-vecteur vitesse moyen $\overline{u}^i$. Notons que $m_0 \simeq \int_{\mathscr{D}^3} \sigma_0.dV_0$ lorsque les composantes u^α (α = 1 à 3) sont très petites devant l'unité ou bien lorsque u^i varie peu sur la section droite du tube d'univers).

Il vient :

$$\frac{\Delta(m_0\overline{u}^i)}{\Delta s} = -\int_{\mathcal{D}^2} \mu^i.\mu^j.n_j.d\Sigma_0 \qquad (12)$$

Considérons maintenant le terme à intégrer situé à droite de l'égalité précédente. Dans un repère lié à la particule, il existe une forme simple du quadri-vecteur μ^i satisfaisant aux équations (6a, b). Cette forme correspond au cas classique de l'électrostatique, où la particule, quasi-ponctuelle, est considérée comme un tout et au repos :

$$\mu^0 = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mu^\alpha}{\partial x^0} = 0 \quad \text{et} \quad \mu^\alpha = \frac{q^0}{4\pi}.\frac{x^\alpha}{r^3} = \frac{q^0}{4\pi}.\frac{n^\alpha}{r^2} \qquad (13)$$

avec $\alpha = 1$ à 3, $r = \sqrt{-x_\alpha.x^\alpha}$, et q^0 une constante homogène à une longueur (charge électrique dans notre système d'unités naturelles).

Nous verrons en effet plus loin qu'à vitesse nulle, le champ μ^α s'identifie complètement au champ électrique E^α .

Tenant compte qu'à vitesse nulle $n^0 = 0$, nous vérifions aisément, à cause de la symétrie de la solution, que l'intégrale dans (12) s'évanouit. Comme le caractère tensoriel de l'intégrale assure la généralité du résultat indépendamment de la vitesse, nous pouvons énoncer que l'énergie-impulsion $P^i = m_0.\overline{u}^i$ de la particule, isolée extérieurement, se conserve.

Naturellement, ce résultat apparaît trivial quand la charge électrique est nulle.

Notons enfin que $\mu_i \Lambda n_j = 0$ sur Σ_0 quel que soit le repère inertiel considéré.

Par ailleurs, comme il ressort de ce qui précède, la particule, assimilée à une section droite du tube d'univers, dispose d'une étendue spatio-temporelle.

Un observateur, qui considère la particule entièrement contenue dans l'espace $\mathcal{V}^3$ à un instant donné x_0 quelconque, écrira d'après (11a) :

$$P^i = \int_{\mathcal{V}^3} (\sigma_0 . u^0 . u^i + \widehat{T}^{0i}).dV = m_0 . \overline{u}^i + \int_{\mathcal{V}^3} \widehat{T}^{0i}.dV$$

car $\quad u^0.dV = dV_0$, ce qui entraîne à poser :

$$\int_{\mathcal{V}^3} \widehat{T}^{0i}.dV = 0 \qquad (14a)$$

Ainsi, pour un observateur assimilant la particule à un petit grain de matière incohérente, animée d'une vitesse $\overline{u}^i$, l'intégrale étendue à tout l'espace de $\widehat{T}^{0i}$ doit s'annuler (ce résultat apparaît comme la condition de cohésion interne ou bien d'apparence corpusculaire de la particule pour un observateur à un instant quelconque x^0). Une conséquence est, d'après (11b) :

$$P^i = \int_{\mathcal{V}^3} (\frac{1}{4}\varphi^2.\delta^{0i} - \varphi^0{}_j.\varphi^{ij}).dV \qquad (14b)$$

Il est satisfaisant de constater que, pour cet observateur, la quadri-énergie-impulsion de la particule P^i résulte alors d'une dynamique intérieure (à priori de nature électromagnétique si nous nous en tenons seulement à la forme de l'expression entre parenthèses). Nous avons ainsi :

$$P^0 = \int_{\mathcal{V}^3} \mu^{0\,2}.dV + \int_{\mathcal{V}^3} \sigma_0.dV = m_0.\overline{u}^0$$
$$P^\alpha = \int_{\mathcal{V}^3} \mu^0.\mu^\alpha.dV = m_0.\overline{u}^\alpha$$

A partir de ces égalités, il convient de poser :

$$\int_{\mathcal{V}^3} \sigma_0.dV = \frac{m_0}{\overline{u}^0} \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{V}^3} \mu^{0\,2}.dV = m_0.\overline{u}^0.\frac{\overline{v}^2}{c^2}\,,$$

avec $\overline{u}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\overline{v}^2}{c^2}}}$ et $\overline{u}^\alpha = \dfrac{\dfrac{\overline{v}^\alpha}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{\overline{v}^2}{c^2}}}$

Notons que ces résultats ne sont valables que dans l'hypothèse où les composantes μ^i ne prennent des valeurs significatives que très ponctuellement. Mais alors, il est tout à fait satisfaisant de poser aussi, eu égard à (7) :

$$\int_{\mathcal{V}^3} \mu^{0\,2}.dV = \breve{h}.\overline{\mu}^0 = m_0.\overline{u}^0.\frac{\overline{v}^2}{c^2} \qquad (15a)$$

$$\int_{\mathcal{V}^3} \mu^0.\mu^\alpha.dV = \breve{h}.\overline{\mu}^\alpha = m_0.\overline{u}^\alpha = m_0.\overline{u}^0.\frac{\overline{v}^\alpha}{c} \qquad (15b)$$

Dans ces conditions, nous vérifions encore l'orthogonalité des quadri-vecteurs moyens $\overline{\mu}^i$ et $\overline{u}^i$. De plus, P^i satisfait toujours à une relation du type (8).

7 Densités lagrangienne $\mathscr{L}$ et hamiltonienne $\mathscr{H}$

Il est naturel de poser pour expressions de ces entités :

$$\mathscr{L} = \sigma_0 = -\frac{1}{2}\mu^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{H} = \frac{1}{2}(\mu^{0\,2}+\mu^{1\,2}+\mu^{2\,2}+\mu^{3\,2}) \geq 0$$

En effet, si $\mathscr{p}^\alpha = \dfrac{\mu^0.\mu^\alpha}{c}$ et $\mathscr{V}^\alpha = c.\dfrac{\mu^\alpha}{\mu^0}$ désignent respectivement la densité d'impulsion et la vitesse généralisées (la constante c est introduite ici afin de suivre la notation conventionnelle), un rapide calcul montre que ces entités satisfont bien aux relations de définition :

$$\mathcal{p}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{V}^{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H} = \sum_{\alpha} (\mathcal{p}^{\alpha}.\mathcal{V}^{\alpha}) - \mathcal{L}\,.$$

et que les quadruplets :

$$\mathcal{p}^{0} = \frac{(\mu^{0})^{2}}{c}\,,\ \mathcal{p}^{1}, \mathcal{p}^{2}, \mathcal{p}^{3} \quad \text{ou : } \mathcal{p}^{0},\ \mathcal{V}^{1}, \mathcal{V}^{2}, \mathcal{V}^{3}$$

définissent entièrement $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{L} = \frac{c}{2}\left(\frac{\left\|\mathcal{p}^{\alpha}\right\|^{2}}{\mathcal{p}^{0}} - \mathcal{p}^{0}\right) = \frac{1}{2c}\mathcal{p}^{0}.\left(\left\|\mathcal{V}^{\alpha}\right\|^{2} - c^{2}\right)$$

$$\mathcal{H} = \frac{c}{2}\left(\frac{\left\|\mathcal{p}^{\alpha}\right\|^{2}}{\mathcal{p}^{0}} + \mathcal{p}^{0}\right) = \frac{1}{2c}\mathcal{p}^{0}.\left(\left\|\mathcal{V}^{\alpha}\right\|^{2} + c^{2}\right)$$

Maintenant, remarquons que :

$$\boxed{\sum_{\alpha} (\mathcal{V}^{\alpha}.v^{\alpha}) = c^{2}} \qquad (16)$$

où $\mathcal{V}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{p}^{\alpha}}$ ($\mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{p}}$ avec : $\mathcal{V} = \left\|\mathcal{V}^{\alpha}\right\|$, $\mathcal{p} = \left\|\mathcal{p}^{\alpha}\right\|$) correspond à la vitesse de déplacement de l'énergie totale du point considéré (inertielle et interne réunies).

Nous constatons d'après (16) qu'elle <u>excède ou égale au moins toujours la célérité de la lumière</u> , et que, parallèlement, la vitesse de l'énergie inertielle du point (associée à son énergie propre) ne peut jamais dépasser cette même valeur, conformément à la théorie classique.

Nous disposons là d'une possible explication du phénomène de réduction du paquet d'ondes révélé par la mécanique quantique. Dans ce cadre, une image de la particule consiste en une excroissance locale, très aiguë, d'un champ fondamental, qui peut perdre sa cohésion, autrement dit « se diluer » dans le champ ambiant, pour « se condenser » ailleurs, c'est à dire reprendre un aspect corpusculaire (notamment sous une action extérieure) et cela presque instantanément; bien qu'à l'observation, la vitesse inertielle (associée à l'énergie propre) de la particule n'excède jamais la célérité de la lumière.

Il va de soi que cette disposition particulière attribuée à la particule doit reposer sur des calculs théoriques qui restent à développer pour crédibiliser la théorie. En effet, celle-ci doit pouvoir prédire sans équivoque pourquoi l'énergie se condense toujours en un volume très réduit sous une action extérieure, quelles que soient les situations physiques envisagées.

Nous verrons, à la fin de cet article, que l'introduction d'une cinquième dimension d'univers fournit une explication rationnelle du phénomène compatible avec le principe de relativité appliqué aussi à l'énergie totale.

Remarquons enfin, que dans le cas d'une particule considérée comme un tout, d'après (15a) et (15b) :

$$\mathcal{V} = \left\| \mathcal{V}^{\alpha} \right\| = c.\frac{\left\| \overline{\mu}^{\alpha} \right\|}{\overline{\mu}^{0}} = \frac{c^2}{\overline{v}} \qquad (17a)$$

qui correspond à la vitesse de phase de l'onde de De Broglie associée à la particule.

La suite de l'étude montre aussi, qu'au facteur 2π près, il y a parfaite analogie entre $\overline{\mu}^{\alpha}$ et le vecteur d'onde k^{α}, ainsi qu'entre (15b) et les relations de De Broglie qui lient le vecteur d'onde à l'impulsion de la particule.

En effet, en associant à la particule une longueur d'onde $\lambda = 1 \big/ \left\| \mu^{\alpha} \right\|$ et par là, une fréquence $\nu = \dfrac{\mathcal{V}}{\lambda} = \dfrac{c^2 / \overline{v}}{\breve{h} / (m_0.\overline{u}^0.\overline{v}/c)} = \dfrac{m.c}{\breve{h}}$ avec $m = m_0.\overline{u}^0$ (17b), si $M = \dfrac{m}{\chi.c^2}$ est la masse en unité pratique, il apparaît alors bien :

$\boxed{\breve{h} = \chi.h.c}$ (17c) et : $\boxed{\nu = \dfrac{M.c^2}{h}}$ (Einstein-Planck) (17d)

et , d'après (15b) :

$$\breve{h}.\bar{\mu}^{\alpha} = \frac{\breve{h}}{2\pi}.k^{\alpha} = \frac{\chi.h.c.k^{\alpha}}{2\pi} = \frac{\chi.M.c^2.\bar{v}^{\alpha}}{c}$$

d'où : $\boxed{\dfrac{h}{2\pi}.k^{\alpha} = M.\bar{v}^{\alpha}}$ (Louis De Broglie), en posant : $k^{\alpha} = 2\pi\bar{\mu}^{\alpha}$

8 Equation de mouvement microscopique

Les équations (6a,b), que nous avons qualifiées de constitutives de l'énergie, représentent aussi les équations de mouvement de la théorie, elles doivent en particulier satisfaire à la relation (3b).

C'est avec $T_i^{\,j}$ obtenu à partir de (11a,b) que nous pouvons le montrer.

En prenant la divergence de ce tenseur et après quelques calculs :

$$(2\sigma_0.u_i.u^j + \varphi_{ik}.\varphi^{jk} - \frac{1}{4}\varphi^2.\delta_i^j)_{,j} =$$

(18a) $$(2\sigma_0.u_i.u^j)_{,j} - \varphi^{jk}{}_{,k}.\varphi_{ij} - \frac{1}{2}(\varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}).\varphi^{jk} = 0$$

Or, il est facile de montrer à partir de (3b), (6a) et (10) que :

$$\boxed{(\varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}).\varphi^{jk} = 0} \quad (18b)$$

Cette équation doit être considérée comme <u>une extension non linéaire du premier groupe des équations de Maxwell</u>. En effet, nous observons d'abord que ces dernières sont solutions de (18b).

Par ailleurs, il nous est toujours possible de poser :

$$\varphi_{ij} = (A_{i,j} - A_{j,i}) + (A'_{i,j} - A'_{j,i})^*$$

où $$(A'_{i,j} - A'_{j,i})^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}{}^{kl}.(A'_{k,l} - A'_{l,k})$$

Eu égard à : $(A_{i,j} - A_{j,i})^{*,j} = 0$ et $\left(A'_{i,j} - A'_{j,i}\right)^{*,j} = 0$ avec : ${}^{,j} = {}_{,k}\,\delta^{jk}$,

A_i et A'_i sont définis, au gradient d'une fonction scalaire près, respectivement par :

$$\left(A_{i,j} - A_{j,i}\right)^{,j} = \varphi_{ij}{}^{,j} = \rho_i \qquad (19a)$$

et $$\left(A'_{i,j} - A'_{j,i}\right)^{,j} = \varphi^*_{ij}{}^{,j} = \rho^*_i \qquad (19b) \quad \text{avec} \quad \varphi^*_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}{}^{kl}\varphi_{kl}$$

<u>Le second groupe des équations de Maxwell se trouve réuni en (19a)</u> où A_i s'identifie au quadrivecteur potentiel de l'électromagnétisme classique. (Mais ici, le quadrivecteur courant électrique ρ_i n'apparaît pas comme une donnée mais défini par cette relation même).

Les équations de mouvement microscopique s'écrivent alors simplement :

$$(2\sigma_0.u_i.u^j)_{,j} - \rho^j.\,\varphi_{ij} = 0 \qquad (20)$$

En développant le premier terme, puis en faisant le produit par u^i, tenant compte de (10), il vient :

$$(2\sigma_0.u^j)_{,j} = -\rho^j.\mu_j \qquad (21)$$

Mais, tenant compte de ce dernier résultat, (20) peut aussi s'écrire :

$$2\sigma_0.u^j.u_{i,j} = 2\sigma_0.\gamma_i = \rho^j.u_j.\mu_i$$

où $\rho^j.u_j$ doit être considéré comme la densité de charge électrique longitudinale au point considéré. Cette dernière équation implique bien (3b).

Notons que (21) n'assure pas l'invariabilité de la masse propre de la particule nécessairement.

Remarque :

Il apparaît donc une densité de courant électrique ρ_i, mais aussi une densité de courant magnétique ρ_i^*, définies par les relations (19a) et (19b).

Par intégration sur le domaine infinitésimal défini précédemment, pour une particule quasi-ponctuelle, nous avons :

$$\int_{\mathcal{V}^3 x \mathcal{T}} \rho^i.dx^0.dV = \int_{\mathcal{V}^3 x \mathcal{T}} \varphi^{ij}{}_{,j}.dx^0.dV \simeq \Delta x^0.\int_{\mathcal{V}^3} \rho^i.dV \simeq$$

$$\Delta\left[\int_{\mathcal{D}^3} (\mu^i.u^j - \mu^j.u^i).u_j.dV_0\right] + \Delta s.\int_{\mathcal{D}^2} (\mu^i.u^j - \mu^j.u^i).n_j.d\Sigma_0$$

d'où :

$$q^i = \int_{\mathcal{V}^3} \rho^i.dV \simeq \frac{\Delta(\int_{\mathcal{D}^3} \mu^i.dV_0)}{\Delta x^0} - \frac{\overline{v}^i}{c}.\int_{\mathcal{D}^2} \mu^j.n_j.d\Sigma_0$$

avec : $\overline{v}_0 = \overline{v}^0 = c$ et où $\overline{v}^\alpha$ désigne la vitesse moyenne sur l'étendue Σ_0.

q^α représente l'impulsion électrique de la particule et, étant donné (13), $\boxed{q^0 = -\int_{\mathcal{D}^2} \mu^j.n_j.d\Sigma_0}$ (22) sa charge électrique.

Dans le cas de la solution électrostatique :

$$\frac{\Delta(\int_{\mathscr{D}^3} \mu^i.dV_0)}{\Delta x^0} = \int_{\mathscr{D}^3} \frac{\Delta\mu^i}{\Delta x^0}.dV_0 = 0$$

et tenant compte du caractère quasi-ponctuel de la particule, nous retrouvons l'expression classique : $q^\alpha = q^0.\frac{\overline{v}^\alpha}{c}$ (23).

Par ailleurs,

$$\int_{\mathscr{V}^3 x \mathscr{T}} \rho^{*i}.dx^0.dV = \int_{\mathscr{V}^3 x \mathscr{T}} \varphi^{*ij}{}_{,j}.dx^0.dV \simeq \Delta x^0.\int_{\mathscr{V}^3} \rho^{*i}.dV \simeq$$
$$\Delta\left[\int_{\mathscr{D}^3} (\mu^i.u^j - \mu^j.u^i)^*.u_j.dV_0\right] + \Delta s.\int_{\mathscr{D}^2} (\mu^i.u^j - \mu^j.u^i)^*.n_j.d\Sigma_0$$

Eu égard à la colinéarité des quadri-vecteurs μ_i et n_i, il est aisé de vérifier que cette quantité est toujours nulle, quel que soit Δx^0. Il convient alors de poser :

$$\boxed{q^{*i} = \int_{\mathscr{V}^3} \rho^{*i}.dV = 0} \quad (24)$$

exprimant d'une façon générale, pour toute particule, l'absence de charge-impulsion magnétique.

L'électromagnétisme macroscopique peut donc être décrite, de façon tout à fait satisfaisante, par le quadri-vecteur potentiel A_i et les équations de Maxwell linéaires.

Cependant, nous devons constater aussi que ces dernières ne suffisent pas à décrire la dynamique intérieure des particules.

9 Particule dans un champ électromagnétique extérieur

Dans le cas d'un champ électromagnétique extérieur $\overline{\varphi}_{ij}$ agissant sur la particule, en supposant qu'il modifie très peu l'énergie propre et la charge électrique de la particule et inversement, que le champ subit très peu l'influence de cette dernière :

$$(2\sigma_0.u^i.u^j)_{,j} - \rho^j.(\varphi^i{}_j + \overline{\varphi}^i_j) = (\sigma_0.u^i.u^j)_{,j} - \widehat{T}^{ij}{}_{,j} - \rho^j.\overline{\varphi}^i_j = 0$$

Alors, par intégration sur tout le domaine $\mathcal{V}^3$ à la frontière duquel σ_0 et $\widehat{T}^{i\alpha}$ s'annulent, tenant compte de la relation (14a) :

$$\frac{d(m_0.\overline{u}^i)}{dx^0} = q_j.\overline{\varphi}^{ij}$$

ou encore, eu égard à (23) et puisque $dx^0 = \overline{u}^0.ds$:

$$\boxed{\frac{d(m_0.\overline{u}^i)}{ds} = q^0.\overline{u}_j.\overline{\varphi}^{ij}} \qquad (25)$$

C'est la loi de mouvement de l'électrodynamique classique (Lorentz).

10 Raccord avec la théorie gravitationnelle d'Einstein

Nous allons montrer comment la théorie se raccorde au modèle gravitationnel d'Einstein dans l'univers quadridimensionnel classique.

Dans le cas d'une matière incohérente (sans orientation privilégiée) et au repos, en considérant un petit volume $\hat{\mathcal{V}}$ entourant chaque point de l'espace, seules les moyennes volumiques des composantes strictement positives ou négatives du tenseur de Ricci R_{ij} doivent différer de zéro.

Alors, dans l'hypothèse d'une équivalence physique des directions spatio-temporelles et tenant compte de $R = -2\sigma_0$:

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{\hat{\mathcal{V}}} \int_{\hat{\mathcal{V}}} \mu_i . \mu_j . dV \simeq \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Cette hypothèse est justifiée par l'expression du tenseur d'énergie globale correspondant :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 2\sigma_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soit, dans un repère inertiel quelconque :

$$T_{ij} = 2\sigma_0 . \bar{u}_i . \bar{u}_j \quad (27)$$

qui est précisément, au facteur 2 près, l'expression classique du tenseur d'énergie d'une matière incohérente.

Notons, suivant (20), la disparition des forces d'origine électromagnétique. Remarquons aussi que le facteur 2 n'a pas d'incidence sur la valeur du champ de gravitation, puisque la constante de gravitation d'Einstein s'obtient, aux approximations habituelles, par comparaison avec l'expression classique du champ de gravitation newtonien ; ici :

$$\chi = \frac{4\pi G}{c^4}$$, où G est la constante de gravitation universelle.

Notons enfin que, dans l'hypothèse où les composantes spatiales de la vitesse sont petites vis à vis de c, et puisque $R_{ij}.u^j = 0$ d'après (3a, b) : $R_{i0} \simeq 0$ (28), correspondant aux équations gravitationnelles classiques dans le cas extérieur.

11 Généralités sur le photon

C'est l'étude du photon qui illustre le mieux au départ la possibilité qu'offre la théorie pour rendre compte des aspects à la fois ondulatoire et corpusculaire d'une particule .

En posant :

$$\vec{E} = \vec{\mu}.u^0 - \mu^0.\vec{u} \quad (29) \quad \text{avec} \quad \vec{\mu} = (\mu^1 = \mu_x, \text{etc...})$$

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \vec{\mu} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{u^0} = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E} \quad (30)$$

il vient :

$$\varphi^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons d'abord que nous pouvons tirer de (29) :

$$\vec{\mu} = \vec{E}.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \mu^0.\frac{\vec{v}}{c} \quad (31a)$$

$$\mu^0 = \frac{\vec{E}.\vec{v}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (31b)$$

ce qui montre que le champ $\vec{\mu}$, plus complexe que le champ électrique, s'identifie toutefois complètement à celui-ci à la vitesse zéro.

Remarquons ensuite que $\vec{E}.\vec{B} = 0$. Ce résultat est à priori possible car, au niveau particulaire, φ^{ij} contient non seulement le champ électromagnétique de Maxwell, mais aussi un champ complémentaire dû à un courant magnétique microscopique.

Remarquons aussi que dans le cas du photon, cette relation se vérifie encore dans la théorie électromagnétique de Maxwell, mais que dans le cas général il ne peut en être ainsi puisque celle-ci ignore la dynamique interne des particules (résultant d'une charge-impulsion magnétique toujours nulle. D'où l'asymétrie générale des équations de Maxwell qui ont un caractère macroscopique).

Par ailleurs, tenant compte de (30) :

$$\sigma_0 = -\frac{1}{4}\varphi^2 = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) = \frac{1}{2}\left[(\vec{E}.\vec{v}/c)^2 + E^2.(1 - v^2/c^2)\right]$$
$$(\geq 0) \quad (32)$$

Pour une particule qui n'est en tout point soumise à aucune force d'inertie :

$$(\sigma_0.u^i.u^j)_{,j} = \frac{1}{2}[(\mu^{0\,2} + E^2).\frac{v^i}{c}.\frac{v^j}{c}]_{,j} = 0 \quad (33)$$

Dans le cas du photon, à la vitesse c exactement, μ^0 doit admettre à priori une limite finie, ce qui suppose, si η^i désigne le quadrivecteur direction $(1, \vec{\eta})$, $\vec{E}.\vec{\eta} = 0$.

Il vient alors :

$\sigma_0 = 0$, impliquant une masse nulle au photon,

et : $\frac{1}{2}[(\mu^{0\,2} + E^2).\eta^i.\eta^j]_{,j} = 0$ (34a)

relation exprimant la conservation de l'énergie-impulsion du photon.

Mais dans le cas du photon, il est par ailleurs simple de vérifier :

$$\begin{cases} \mu^i = \mu^0.\eta^i \\ T^{ij}{}_{,j} = (\mu^i.\mu^j)_{,j} = 0 \\ T^{00} = \frac{1}{2}[\mu^{0\,2} + \vec{\mu}^2] = \mu^{0\,2} \end{cases}$$

d'où :

$[\mu^{0\,2}.\eta^i.\eta^j]_{,j} = 0$ (34b)

Alors, d'après (31a) :

$$[(E^2).\eta^i.\eta^j]_{,j} = 0$$

De plus, pour $i = 0$:

$(E^2.n^j)_{,j} = E^2{}_{,0} + \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = 0$ (35)

où $\vec{E} \wedge \vec{B}$ désigne le vecteur de Poynting, avec : $\vec{B} = \vec{\eta} \wedge \vec{E}$

exprimant ainsi la conservation de l'énergie électromagnétique du photon.

Notons enfin que, E^2 s'annulant aux limites d'un domaine fermé $\mathcal{V}^3$, les relations (15a), (34a) et (34b) permettent de poser :

$$\int_{\mathcal{V}^3} \mu^{0\,2}.dV = \breve{h}.\bar{\mu}^0 = \frac{\breve{h}.\nu_0}{c} = \chi.h.\nu_0 = \int_{\mathcal{V}^3} E^2.dV$$

avec cependant, a priori : $\mu^{0\,2} \neq E^2$.

12 Les équations constitutives du photon

Après quelques transformations, l'équation (18b) s'écrit aussi :

$$\boxed{\varphi^{*jk}{}_{,k}.\overset{*}{\varphi}_{i\,j} = 0} \quad (36a)$$

Les relations (18a) et (18b), jointes à l'équation (33) impliquent par ailleurs :

$$\boxed{\varphi^{jk}{}_{,k}.\varphi_{i\,j} = 0} \quad (36b)$$

Telles sont les équations constitutives générales du photon dans l'espace-temps.

Ce sont des équations non linéaires en $\vec{E}$ et $\vec{B}$, mais nous vérifions que les solutions des équations de Maxwell : $\varphi^{*jk}{}_{,k} = 0$ et $\varphi^{jk}{}_{,k} = 0$ (36c, d) qui sont linéaires en $\vec{E}$ et $\vec{B}$, sont aussi solutions (asymptotiques) des équations générales.
Dans ce dernier cas, il est des solutions du type ondes planes progressives, de polarisation transversale, et nous pouvons écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0.\cos(2\pi\bar{\mu}_i.x^i) \quad (37)$$

où, tenant compte ici de $v = c$, nous identifions $c.\bar{\mu}_i$ à $\nu_0.\eta_i$ $(\eta^2 = 0)$, le quadrivecteur fréquence de l'onde d'après le chapitre 7.

Notons que dans le cas du photon, l'énergie propre étant nulle, nous avons bien :

$$\overline{\mu}^2 = 0 \qquad (38)$$

Toutefois, du fait de leur non-linéarité, les équations générales peuvent admettre a priori des solutions ondes progressives autres que planes, et notamment « en aiguilles » où le champ électromagnétique peut prendre localement une valeur très importante.

Dans cette situation (dont l'existence reste à vérifier par la résolution complète des équations (36a, b)) le photon apparaît comme une excroissance très ponctuelle, très forte, du champ électromagnétique, qui par ailleurs est de type ondulatoire et où l'amplitude du champ peut être très faible, voire nulle.

$T^{00} = \frac{1}{2}(\mu^{0\,2} + \mu^{1\,2} + \mu^{2\,2} + \mu^{3\,2})$ est la densité d'énergie totale de la particule. Il semble logique que, ramenée à l'unité d'énergie totale de la particule, elle constitue la densité de probabilité de présence de la particule projetée par la mécanique ondulatoire (il reste toutefois à établir pourquoi la localisation de la particule se réalise préférentiellement dans les zones où la densité d'énergie est la plus élevée).

Selon le chapitre 7 :

$$[\int_{\mathcal{V}^3} \frac{1}{2}(\mu^{0\,2} + \mu^{1\,2} + \mu^{2\,2} + \mu^{3\,2}).dV]/(\chi.h.\nu) = 1 \qquad (39a)$$

où ν est la fréquence de l'onde porteuse, et dans le cas du photon :

$$(\int_{\mathcal{V}^3} \mu^{0\,2}.dV)/(\chi.h.\nu_0) = (\int_{\mathcal{V}^3} E^2.dV)/(\chi.h.\nu_0) = 1 \qquad (39b)$$

Dans ce schéma, $\dfrac{\mu^{0\,2}}{\chi.h.\nu_0}$ ou $\dfrac{E^2}{\chi.h.\nu_0}$ peuvent donc s'interpréter aussi comme une densité de probabilité de présence du photon (ou bien encore, comme une densité d'intensité lumineuse dans le cas de p photons, mais où $\chi.h.\nu_0$ doit être remplacé par $\chi.h.\sum_p \nu_0(p)$ dans la formule).

Mais, si nous nous en tenons qu'à l'électromagnétisme linéaire de Maxwell, nous faisons supporter à l'amplitude de l'onde porteuse, probablement très ténue, voire nulle presque partout, les propriétés d'une singularité forte en cherchant à satisfaire toujours à (39b).
Ainsi, seule la circonstance que les solutions des équations de Maxwell sont réelles confère au champ électromagnétique classique l'apparence d'une réalité physique.

13 Cas des particules massiques

Pour les particules massiques, il n'est plus possible d'établir une relation directe entre $\vec{E}$ et la densité d'énergie sans faire appel à leur dynamique intérieure.

Toutefois, par analogie avec le photon et au regard de l'expérience, le problème peut être posé ainsi :

- l'onde associée à la particule massique libre doit être du type :

$$\mu^i = \mu_0^i.\cos(2\pi\frac{P_j.x^j}{\breve{h}}) = \mu_0^i.\cos(2\pi\frac{m_0\bar{u}_j.x^j}{\breve{h}}) \quad (40a)$$

- solution de l'équation d'onde :

$$\Box\mu^i + \left(2\pi\frac{m_0}{\breve{h}}\right)^2.\mu^i = \Box\mu^i + \left(2\pi\frac{M_0.c}{h}\right)^2.\mu^i = 0 \quad (40b)$$

(Klein-Gordon pour la particule libre dans notre système d'unités naturelles concernant le premier membre)

- avec $\frac{1}{2}(\mu^{0\,2}+\mu^{1\,2}+\mu^{2\,2}+\mu^{3\,2})\ /(\chi.h.\nu)$
satisfaisant à une équation de conservation normalisée résultant d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

Nous savons que le problème peut être résolu, en particulier pour l'électron, au moyen d'une entité ψ^i à quatre composantes complexes à la place de $\frac{\mu^i}{\sqrt{2\chi.h.\nu}}$ qui n'est pas un quadrivecteur (spineur de Dirac).

Eu égard à cette situation développée par la mécanique quantique, l'onde associée à la particule massique n'a plus du tout l'apparence d'une réalité physique.

Sa valeur théorique vient du fait qu'il y a correspondance directe entre le carré de la norme de la fonction d'onde et la densité d'énergie totale (inertielle et interne réunies) de la particule.

Il va de soi que cette façon de procéder est un artifice qui dénote une incohérence profonde de la théorie puisque, dans le cas des particules massiques, l'onde associée est posée à priori.

En outre, (40a) n'est pas solution de (6a) dans le cas où $\mu^2 \neq 0$.

Seule une idée nouvelle peut lever cette anomalie théorique. Par analogie avec l'étude du photon, envisageons celle-ci :

l'univers est un espace de Riemann à cinq dimensions où les particules massiques se déplacent à la célérité de la lumière.

Alors, la théorie du photon s'applique aussi aux particules massiques, mais en tenant compte d'un univers penta-dimensionnel de signature [-1, 1, -1, -1, -1] (cette hypothèse est confortée par le fait que cette cinquième dimension est inaccessible à un observateur spatio-temporel de même que la dimension temps le serait pour un observateur luminique).

Par cette voie, les équations fondamentales du champ matériel sont alors les équations non-linéaires à 5 dimensions suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} (\varphi_{IJ,K} + \varphi_{JK,I} + \varphi_{KI,J}).\varphi^{JK} = 0 \\ \varphi_{I,\,J}^{\;J}.\varphi^{IK} = 0 \end{cases}} \quad (41a,\ b)$$

avec : I, J, K = $\overline{1}$, 0 à 3 ($\overline{1}$ étant l'indice correspondant à la cinquième dimension) et : $\mu^i \Lambda \gamma^j = 0$ (les indices en minuscule correspondent aux indices spatio-temporels classiques),

$$\varphi^{IJ} = \begin{bmatrix} 0 & \mu^0 & \mu^1 & \mu^2 & \mu^3 \\ -\mu^0 & 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ -\mu^1 & E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -\mu^2 & E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\mu^3 & E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont définis respectivement par (29) et (30).

Nous allons montrer qu'elles sont aptes à décrire les caractères, à la fois, ondulatoire et corpusculaire des particules.

Comme pour le photon, les équations asymptotiques tirées de (41a, b) sont :

$$\begin{cases} \varphi_{IJ,K} + \varphi_{JK,I} + \varphi_{KI,J} = 0 \\ \varphi_{I,\,J}^{\;J} = 0 \end{cases} \quad (43a,\ b)$$

De ces équations, nous tirons aisément les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j} = 0 \\ \varphi_{i,\,j}^{\;j} = -\varphi_{i,\,\overline{1}}^{\;\overline{1}} \end{cases}$$

et :

$$-\varphi_{\bar{I},j}^{\ j} = \mu^{j}_{,j} = 0 \quad \text{(6b')}$$

où nous identifions $-\varphi_{i,\bar{I}}^{\ \bar{I}} = -\mu_{i,\bar{I}}$ avec la quadri-densité de courant classique ρ_i. Mais alors : $\int_{\mathcal{V}^3} \rho_0.dV = q_0 = 0$ puisque $\int_{\mathcal{V}^3} \mu_0.dV = \breve{h}$.

Cependant, dans le cas général, remarquons que $\varphi^{IJ}_{\ ,J}.\varphi_I^{\ K} = 0$ (41b écrit différemment) peut admettre aussi une solution $\varphi^{IJ}_{\ ,J} \neq 0$ puisque le tenseur $\varphi_I^{\ K}$ est un tenseur antisymétrique de dimension impaire (cinq), donc de déterminant nul (système homogène).

Il nous est donc loisible de poser une condition de normalisation sur une composante de $\varphi^{IJ}_{\ ,J}$. Posons : $\int_{\mathcal{V}^3} \varphi^{0J}_{\ ,J} dV = q^0$. Nous avons :

$$\int_{\mathcal{V}^3} \varphi^{0J}_{\ ,J}.dV = \int_{\mathcal{V}^3} (\rho^0 - \mu^0_{,\bar{I}}).dV = \int_{\mathcal{V}^3} \rho^0.dV = q^0$$

où q^0 représente bien la charge électrique. Naturellement, la valeur $-q^0$ convient aussi (en remplaçant μ^i par $-\mu^i$ dans les équations de champ), ainsi que la valeur 0 qui correspond à l'équation $\varphi^{IJ}_{\ ,J} = 0$.

Il y a unicité de la charge q^0 car si nous posons :

$$\int_{\mathcal{V}^3} \rho^0.dV = \int_{\mathcal{V}^3} (\mu^0.u^j - \mu^0.u^j)_{,j}.dV = \lambda.q^0 \quad (\lambda \neq 0)$$

qui s'écrit également :

$$\int_{\mathcal{V}^3} (\frac{\mu^0}{\lambda}.u^j - \frac{\mu^0}{\lambda}.u^j)_{,j}.dV = q^0$$

en remarquant aussi que, si μ^i est solution des équations de champ, $\dfrac{\mu^i}{\lambda}$

l'est aussi, alors la relation de fermeture $\int_{\mathcal{V}^3} \frac{\mu^0}{\lambda}.dV = \breve{h}$ implique $\lambda = 1$.
L'unicité de la charge électrique est donc intimement liée au principe fondamental (7).

Les autres équations s'écrivent :

$$\varphi_{\bar{1}i,j} + \varphi_{j\bar{1},i} + \varphi_{ij,\bar{1}} = 0 \quad (44)$$

soit :

$$\mu_{i,j} - \mu_{j,i} = \varphi_{ij,\bar{1}}$$

impliquant a fortiori :

$$\mu^j.(\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) = \mu^j.\varphi_{ij,\bar{1}} \quad (45)$$

Par ailleurs, le tenseur d'énergie microscopique dans $\mathcal{V}^5$ s'écrit ici :

$$\hat{T}^{IJ} = \frac{1}{4}\varphi^2\delta^{IJ} - \varphi_{IK}.\varphi^{JK} = -\mu^2.U^I.U^J$$

avec : $U^I = (-1, u^i)$ (Notons que $U^2 = 0$ et $\varphi^2 = 0$).

Sa conservation implique :

$$\begin{cases} (\mu^2.U^J)_{,J} = -(\mu^2)_{,\bar{1}} + (\mu^2.u^j)_{,j} = 0 \\ U^J.(U_{i,J} - U_{J,i}) = \gamma_i - u_{i,\bar{1}} = 0 \end{cases} \quad (46a, b))$$

Alors, eu égard à $\mu^j.u_j = 0$:

$$\mu^j.\varphi_{ij,\bar{1}} = \mu^j.(\mu_i.u_j - \mu_j.u_i)_{,\bar{1}} = \mu^j.(\mu_i\Lambda\gamma_j) - \frac{1}{2}(\mu^2)_{,\bar{1}}.u_i$$

$$\mu^j.\varphi_{ij,\bar{1}} = -\frac{1}{2}(\mu^2)_{,\bar{1}}.u_i \quad (47a)$$

Si nous posons maintenant :

$$(\mu^2)_{,\bar{1}} = 0 \quad (47b)$$

Il vient, d'après (45) :

$$\mu^j.(\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) = 0 \quad (6a')$$

et nous savons que le premier groupe des équations de Maxwell généralisé (18b) est alors satisfait.

De plus, (6a', b') impliquent l'in-divergence dans $\mathcal{V}^4$ de l'expression énergétique :

$$T_i^{\ j} = \mu_i.\mu^j - \frac{1}{2}\mu^2.\delta_i^j = -\mu^2.u_i.u^j - (\frac{1}{4}\varphi^2.\delta_i^j - \varphi_i^k.\varphi^j{}_k) \quad (48)$$

que nous pouvons égaler au tenseur d'Einstein, définissant ainsi la métrique d'un sous-espace $\mathcal{V}^4$ de $\mathcal{V}^5$, d'énergie conservative.

En outre, par rapport à l'étude précédente dans $\mathcal{V}^4$, il apparaît d'après (46a) et (47b) :

$$(\mu^2.u^j)_{,j} = -2(\sigma_0.u^j)_{,j} = 0 \quad (49)$$

qui exprime la conservation de la masse propre de la particule.

Ainsi, pour un observateur spatio-temporel, cette *première solution représentative de la particule* correspond à son aspect corpusculaire.(Notons que pour le photon comme cas limite, cette solution est toujours satisfaite).

Cependant, nous pouvons définir dans cette représentation une fréquence propre $\nu_0 = \dfrac{m_0.c}{\breve{h}} = \dfrac{\nu}{\bar{u}_0}$ comme il ressort du §7.

L'onde correspondante dans $\mathcal{V}^5$, *seconde solution représentative de la particule*, s'obtient naturellement à partir des équations (43a, b) d'où nous pouvons tirer aisément:

$$\delta^{KL}\varphi^{IJ}{}_{,KL} = 0 \quad (50)$$

ce qui implique pour $I = \bar{1}$:

$$\delta^{KL}\mu^{j}{}_{,KL} = \delta^{kl}\mu^{j}{}_{,kl} - \mu^{j}_{,\bar{1}\bar{1}} = 0 \quad (51)$$

Cette équation a pour solution simple :

$$\mu^i = \mu^i_0(x^j).\cos(2\pi\frac{\nu_0.x^{\bar{1}}}{c}) = \mu^i_0(x^j).\cos(2\pi\frac{m_0.x^{\bar{1}}}{\breve{h}})$$

si évidemment, μ^i_0, et par suite μ^i, satisfont à l'équation de Klein-Gordon (pour laquelle l'onde harmonique n'est qu'une solution particulière).

Remarquons que dans ce cas, le mouvement de la particule s'effectue à masse propre variable, conformément à une idée maitresse de Louis De Broglie dans sa recherche d'une réinterprétation de la mécanique ondulatoire.

Notons enfin que dans le cas du photon comme cas limite, l'équation d'onde se réduit à un d'alembertien nul, mais ne peut être exclue de sa représentation physique complète.

14 Moment cinétique et spin

Etudions la façon dont la notion de spin apparaît dans la théorie.
En premier lieu, remarquons que c'est une relation obtenue à partir de (6a', b') et (47a) qui permet d'associer une fréquence au mouvement d'une particule. Il est en effet :

$$T^{j}_{i\,,j} = \sigma_{0,\bar{1}}.u_i = (\sigma_0.u^j)_{,j}.u_i = (\sigma_0.u_i.u^j)_{,j} - \sigma_0.\gamma_i$$

où $f_i = \sigma_0.\gamma_i = (-\sigma_0.u_i.u^j + T^{*j}_{\ i})_{,j}$ représente la densité de force intérieure agissant dans la particule ; $T^{*j}_{\ i}$ étant le tenseur d'énergie électromagnétique.

Par intégration sur un domaine fermé $\mathcal{V}^3$, en tenant compte de l'annulation du champ matériel à la frontière du domaine, pour $\alpha = 1$ à 3 et dans le système d'unités naturelles :

$$(\int_{\mathcal{V}^3} T^0_\alpha.dV)_{,x_0} = (\int_{\mathcal{V}^3} \mu_\alpha.\mu^0.dV)_{,x_0} = (\frac{\breve{h}}{2\pi}.k_\alpha)_{,x_0} = (m.\frac{\overline{v}_\alpha}{c})_{,x_0} - \int_{\mathcal{V}^3} f_\alpha.dV$$

$$(\int_{\mathcal{V}^3} T^0_0.dV)_{,x_0} = [\int_{\mathcal{V}^3} (\mu_0.\mu^0 - \frac{1}{2}\mu^2).dV]_{,x_0} = (\frac{\breve{h}.\nu}{c})_{,x_0} = (m)_{,x_0} - \int_{\mathcal{V}^3} f_0.dV$$

C'est donc quand $\int_{\mathcal{V}^3} f_i.dV = 0$, c'est à dire lorsque la résultante des forces intérieures est nulle (condition de cohésion corpusculaire vue au §6) que sont valides les relations de De Broglie et d'Einstein-Planck, donc, qu'il y a raccord entre les aspects corpusculaire et ondulatoire de la particule.

Mais, il est naturel de poser aussi l'annulation du moment résultant des forces intérieures comme condition complémentaire. Nous avons :

$$(x_k.T^j_i - x_i.T^j_k)_{,j} = x_k.(\sigma_0.u_i.u^j)_{,j} - x_i.(\sigma_0.u_k.u^j)_{,j} - (x_k.f_i - x_i.f_k)$$

où : $m_{ki} = x_k.f_i - x_i.f_k$ représente le quadri-moment élémentaire.

Par intégration sur l'espace physique, concernant les composantes spatiales, si $\int_{\mathcal{V}^3} m_{\beta\alpha}.\mathrm{dV} = 0$, tenant compte de l'annulation du champ matériel à la frontière de $\mathcal{V}^3$ et de $\mathrm{u}^0.\mathrm{dV} = \mathrm{dV}_0$:

$$\int_{\mathcal{V}^3} \mu^0.(\mathrm{x}_\beta.\mu_\alpha - \mathrm{x}_\alpha.\mu_\beta).\mathrm{dV} = \breve{h}.\theta_{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{V}^3} \sigma_0.(\mathrm{x}_\beta.\mathrm{u}_\alpha - \mathrm{x}_\alpha.\mathrm{u}_\beta).\mathrm{dV}_0$$

Or $\mathrm{x}_\beta.\mathrm{u}_\alpha - \mathrm{x}_\alpha.\mathrm{u}_\beta = \dfrac{\omega.\mathrm{r}^2}{\mathrm{c}}.\mathrm{t}_{\alpha\beta}$ où $\mathrm{t}_{\alpha\beta}$ est un tenseur antisymétrique unitaire $(\mathrm{t}^2 = 1)$ et ω, la vitesse angulaire (relativiste) du point considéré.

Nous avons $\sigma_0.\mathrm{dV}_0 = \mathrm{dm}_0$. Usuellement, $\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{V}^3} \mathrm{t}_{\alpha\beta}.\dfrac{\omega.\mathrm{r}^2}{\mathrm{c}}.\mathrm{dm}_0$ représente le moment cinétique total de la particule et donc, de prime abord, $\breve{h}.\theta_{\alpha\beta}$, son spin.

Par ailleurs, concernant les composantes spatio-temporelles, si $\int_{\mathcal{V}^3} m_{0\alpha}.\mathrm{dV} = 0$:

$$\int_{\mathcal{V}^3} (\mathrm{x}_0.\mathrm{T}^0_\alpha - \mathrm{x}_\alpha.\mathrm{T}^0_0).\mathrm{dV} = \int_{\mathcal{V}^3} \sigma_0.(\mathrm{x}_0.\mathrm{u}_\alpha - \mathrm{x}_\alpha.\mathrm{u}_0).\mathrm{dV}_0$$

Cette relation est vérifiée, quelque soit x_0, si d'une part :

$$\int_{\mathcal{V}^3} \mathrm{T}^0_\alpha.\mathrm{dV} = \int_{\mathcal{V}^3} \sigma_0.\mathrm{u}_\alpha.\mathrm{dV}_0$$

soit : $\dfrac{\breve{h}}{2\pi}.\mathrm{k}_\alpha = \mathrm{m}.\dfrac{\overline{\mathrm{v}}_\alpha}{\mathrm{c}}$, en accord avec ce qui précède, et d'autre part :

$$\int_{\mathcal{V}^3} x_\alpha.T_0^0.dV = \int_{\mathcal{V}^3} x_\alpha.\sigma_0.u_0.dV_0 = m.\overline{x}_\alpha$$

Cette relation exprime que le centre de masse est aussi le centre de l'énergie totale de la particule. De ce fait, elle rend pertinente l'hypothèse de correspondance entre les densités de probabilité de présence et d'énergie totale, et confirme les conditions de cohésion corpusculaire (nullité du torseur des forces intérieures).

15 Conclusion

En résumé, la dualité onde-corpuscule trouve ici son origine dans la possibilité pour la particule de constituer une structure spatiale quadridimensionnelle, d'énergie et de masse propre conservatives, dans un univers penta-dimensionnel où ces entités sont généralement variables dans le temps et régies approximativement par une équation de champ linéaire de type ondulatoire.

Il paraît aussi établi que l'équation de conservation du courant de probabilité projetée par la mécanique ondulatoire correspond à l'équation de conservation de l'énergie corpusculaire totale dans notre théorie et que sa densité apparaît comme le vrai support physique de la soi-disant probabilité de présence de la particule et de ses potentialités, qu'elle soit dotée d'une masse ou non. Ce résultat rejoint les concepts formulés par Louis De Broglie dans sa théorie de la double solution.

Enfin, bien que facilitant une approche globale des phénomènes physiques microscopiques par la linéarisation des équations énergétiques, comme dans le cas du photon avec les équations de Maxwell, la mécanique ondulatoire n'apparaît pas apte à décrire la structure interne des particules qui, selon notre vue, exige la résolution d'équations de champ non-linéaires dans un espace penta-dimensionnel.

à Orléans, 4 février 2007 / 30 décembre 2008

> «Ce serait naturellement un progrès considérable, si l'on réussissait à réunir en une représentation unique le champ de gravitation et le champ électromagnétique. C'est alors seulement que l'ère de la Physique théorique, inaugurée par Faraday et Maxwell, aboutirait à un résultat satisfaisant. Alors l'opposition *éther-matière* s'évanouirait et toute la physique représenterait, au moyen de la théorie de la relativité générale, le même système cohérent d'idées que la géométrie, la cinématique et la théorie de la gravitation. »

(Extrait de la conférence « **l'éther et la théorie de la relativité** » faite par Albert Einstein à l'Université de Leyde, le 5 mai 1920)

Bibliographie

[1] Einstein A. Quatre conférences sur la théorie de la relativité (mai 1921). Gauthier-Villars, Paris (1971)

[2] De Broglie L. Recherches sur la théorie des quanta. Thèse de doctorat, Paris (25 novembre 1924)

[3] P. A. M. Dirac. Les principes de la mécanique quantique. Les Presses Universitaires de France, Paris (1931)

[4] De Broglie L. Matière et lumière. Albin Michel, Paris (1937)

[5] De Broglie L. Ondes Corpuscules Mécanique Ondulatoire. Albin Michel, Paris (1945)

[6] De Broglie L. Nouvelles perspectives en Microphysique. Albin Michel, Paris (1956)

[7] W. Heisenberg. Les principes physiques de la théorie des quanta. (1ère édition 1957). Gauthier-Villars, Paris (1972)

[8] De Broglie L. Jalons pour une nouvelle microphysique. Gauthier-Villars, Paris (1978)

Annexe :

Tout tenseur antisymétrique d'ordre deux φ_{ij}, dérivable au moins une fois, satisfait à l'identité tensorielle :

$$\boxed{(\frac{1}{4}\varphi^2\delta_i^j - \varphi_{ik}\varphi^{jk})_{,j} = \varphi^{jk}_{,k}\varphi_{ij} + \frac{1}{2}(\varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j})\varphi^{jk}}$$

En effet :

$$(\frac{1}{4}\varphi^2\delta_i^j)_{,j} = \frac{1}{2}.\varphi_{jk,i}\varphi^{jk}$$

$$(-\varphi_{ik}\varphi^{jk})_{,j} = -\varphi_{ik,j}\varphi^{jk} - \varphi_{ik}\varphi^{jk}_{,j}$$

Or:

$$-\varphi_{ik,j}\varphi^{jk} = \varphi_{ki,j}\varphi^{jk} = \varphi_{ij,k}\varphi^{jk}$$

$$-\varphi_{ik}\varphi^{jk}_{,j} = \varphi^{jk}_{,k}\varphi_{ij}$$

D'où l'identité énoncée ci-dessus.