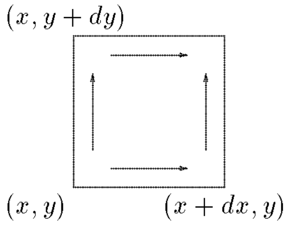
Théorème de STOKES

Calculons la circulation dC autour d'un rectangle $dx\, dy$.

$$dC \;=\; V_y(x+dx,y)dy - V_x(x,y+dy)dx - V_y(x,y)dy + V_x(x,y)dx$$



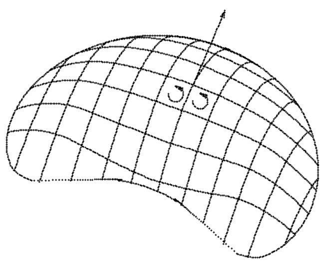
Les signes moins sont dûs au fait que le parcours est dans le sens des x ou des y décroissants.

$$\begin{aligned} dC \;&=\; \left(V_y(x+dx,y) - V_y(x,y)\right) dy - \left(V_x(x,y+dy) - V_x(x,y)\right) dx \\ &= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dxdy \;=\; \left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)_z dxdy \\ &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)\cdot\vec{ds} \end{aligned}$$

Nous venons donc de voir que la *circulation* autour d'une petite surface est égale au produit de la valeur de cette surface par la composante du rotationnel perpendiculaire à la surface. Le théorème de Stokes généralise cette propriété: la circulation sur le bord de n'importe quelle surface (plane ou non) est égale à l'intégrale de la composante perpendiculaire à la surface du rotationnel sur toute la surface:

$$\oint_{bord} \vec{V}\cdot\vec{dl} \;=\; \int_{surface} (\vec{\nabla}\times\vec{V})\cdot\vec{ds}$$

Il ne faut jamais oublier que la surface est quelconque mais que le bord est le bord de la surface. Pour un même bord toutes les surfaces donnent le même résultat.



Pour le démontrer il suffit de quadriller la surface et de faire la somme des circulations sur chaque petit carré. On voit que tous les termes du type $V_y(x+dx,y)dy$ et similaires apparaissent deux fois, avec des signes opposés: sur un carré ils ont le même sens de parcours, mais sur le carré voisin ils ont le sens contraire. Les seuls termes qui ne s'annulent pas sont les termes du bord. La somme de ces termes du bord donne précisément la circulation sur le bord de la surface.

LAPLACIEN.

Le dernier opérateur que nous traiterons est le **laplacien**. Il est défini comme:

$$laplacien \;=\; \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 \;=\; \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

L'opérateur ∇^2 est un opérateur scalaire et peut donc être appliqué soit à un scalaire:

$$\nabla^2\phi \;=\; \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)$$