Physique générale

Séance III: Dynamique — Équilibre

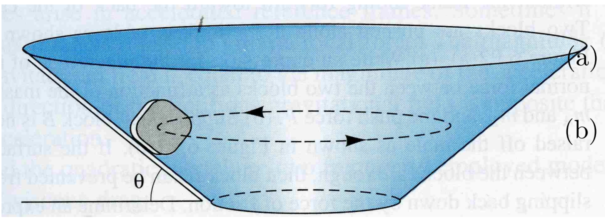
Solvay Business School, BA1 2008–2009

Les exercices de cette séance sont des applications directes des lois de Newton et des définitions du chapitre *Cinématique*.

1. Les exercices doivent être résolus sans a priori, tous les résultats doivent être obtenus à partir des lois et des définitions de la physique et des hypothèses particulières à chaque exercices. Il faut y faire référence explicitement dans la solution.
2. Les valeurs numériques des grandeurs physiques doivent être remplacées par des symboles appropriés avant de résoudre l'exercice.
3. Le système d'axes $OXYZ$ (l'observateur) doit toujours être défini.

Lorsqu'un objet glisse sans frottement sur une surface, la force que celle-ci exerce sur le corps est perpendiculaire à leur surface de contact.

1. Dans un bol de soupe de forme conique et à fond plat, un glaçon tourne à célérité constante dans un plan horizontal sur une trajectoire circulaire comme le montre la figure. La surface intérieure est parfaitement lisse et elle forme un angle θ avec le plan horizontal, cet angle vaut $36.87\,°$.



(a) Tracer le diagramme des forces qui s'exercent sur le glaçon.

(b) Quelle est la vitesse du glaçon si le rayon de sa trajectoire est égale à $10\,\mathrm{cm}$?

Analyse du problème • Dans ce problème, on utilise la deuxième loi de Newton qui lie l'accélération du glaçon à la résultante des forces qui s'appliquent sur lui. Puisque le mouvement du glaçon est circulaire uniforme, seule l'accélération normale est différente de zéro. La résultante des forces qui s'exercent sur le glaçon doit donc être dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire : elle est centripète.

Deux forces s'exercent sur le glaçon

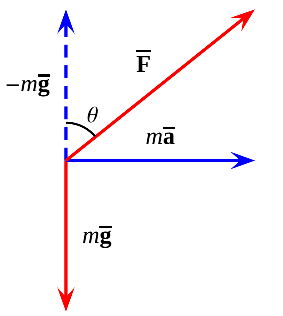
(a) La force gravitationnelle $m\overline{\mathbf{g}}$ exercée par la Terre, elle est verticale, dirigée vers le bas, uniforme et conservative.

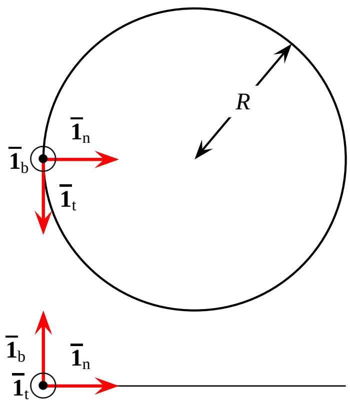
(b) La force $\overline{\mathbf{F}}$ exercée par la paroi, elle est perpendiculaire à la paroi car celle-ci est lisse.

L'équation du mouvement s'écrit

$$m\overline{\mathbf{a}} = m\overline{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{F}} \tag{1}$$

Ces trois vecteurs sont représentés ci-dessous. On a également représenté le trièdre de Frenet sur deux vues du cercle.





Solution •

(a) Le diagramme des forces est représenté ci-dessus.

(b) Écrivons l'équation du mouvement dans le trièdre de Frenet, les trois vecteurs unitaires $\overline{\mathbf{1}}_\mathrm{t}$, $\overline{\mathbf{1}}_\mathrm{n}$ et $\overline{\mathbf{1}}_\mathrm{b}$ sont représentés sur la figure.

$$ma_\mathrm{t} = 0 \qquad ma_\mathrm{n} = m\frac{v^2}{R} = F_\mathrm{n} = F\sin\theta \qquad ma_\mathrm{b} = -mg + F_\mathrm{b} = -mg + F\cos\theta \equiv 0$$

On en déduit

$$F_\mathrm{b} = F\cos\theta = mg \qquad \Longrightarrow \qquad F = \frac{mg}{\cos\theta}$$

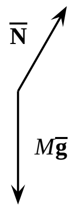
$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R} = g\tan\theta = 5.52\,\mathrm{m/s^2} \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{gR\tan\theta} = 0.866\,\mathrm{m/s}$$

2. Un wagon abandonné sans vitesse initiale glisse sans frottement sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant l'angle α avec l'horizontale. Un passager immobile sur le wagon lâche une bille de masse m à partir d'un point situé à la distance h du plancher du wagon.

   Déterminer la trajectoire de la bille et l'endroit où elle heurte le plancher si la bille est lâchée (a) au moment où le wagon commence à glisser (b) avec un retard T_r.

   Quelle est la trajectoire vue par le passager du wagon ?

Analyse du problème • Le wagon de masse M est soumis à deux forces.



(a) La force gravitationnelle $M\overline{\mathbf{g}}$ exercée par le Terre, elle est uniforme, verticale et dirigée vers le bas ; elle est aussi conservative.

(b) La force $\overline{\mathbf{N}}$ exercée par la surface de la pente, elle est perpendiculaire à cette surface.

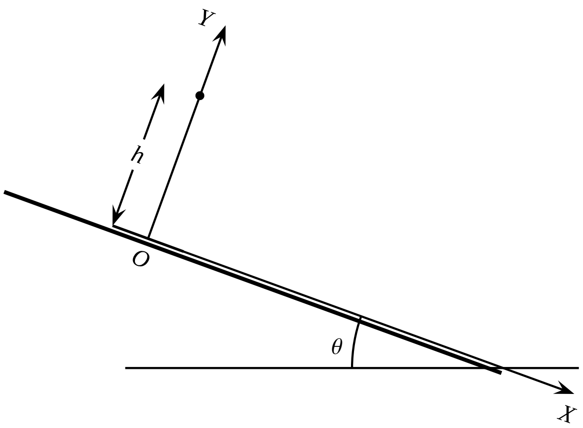
Puisque le wagon glisse sur la pente, son accélération $\overline{\mathbf{a}}_\mathrm{w}$ est parallèle à la pente. On a

$$M\overline{\mathbf{a}}_\mathrm{w} = M\overline{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{N}} \tag{2}$$

Si θ est l'angle que forme la pente avec le plan horizontal, le module de cette accélération est $g\sin\theta$.

Lorsque la bille, de masse m, est dans la main du passager, supposé immobile, elle a la même accélération et la même vitesse que le wagon. Dès que le passager la lâche, elle est soumise uniquement à la force gravitationnelle $m\overline{\mathbf{g}}$ et son accélération $\overline{\mathbf{a}}_\mathrm{b} = \overline{\mathbf{g}}$. Parallèlement à la pente, la bille a donc exactement la même composante $g\sin\theta$ de l'accélération que le wagon. Puisqu'au moment du lâcher elle a la même vitesse que le wagon, elle tombera aux pieds du passager.

Solution • Choisissons un référentiel OXY dont l'axe OX est parallèle et l'axe OY perpendiculaire au plancher du wagon. Plaçons l'origine de manière à ce que la bille soit lâchée du point de coordonnées $(0, h)$ sur l'axe OY.



En glissant le long de la pente, le wagon a un mouvement uniformément accéléré le long de l'axe OX

$$Ma_{\mathrm{w}x} = Mg\sin\theta \qquad\qquad 0 = -Mg\cos\theta + N_y$$

L'accélération du wagon est indépendante de sa masse

$$\overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{w}} = g \sin\theta \,\overline{\mathbf{1}}_x \tag{3}$$

Après un temps T_{r}, la bille est lâchée et sa vitesse initiale est celle du wagon

$$\overline{\mathbf{v}}_0 = \overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{w}}\, T_{\mathrm{r}} = g \sin\theta\, T_{\mathrm{r}}\, \overline{\mathbf{1}}_x \tag{4}$$

À partir de cet instant ($t = 0$), les accélérations du wagon et de la bille sont

$$\overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{w}} = g \sin\theta \,\overline{\mathbf{1}}_x \qquad\qquad \overline{\mathbf{a}}_{\mathrm{b}} = g \sin\theta \,\overline{\mathbf{1}}_x - g\cos\theta\,\overline{\mathbf{1}}_y$$

Les accélérations selon l'axe OX sont les mêmes. Lancés avec la même vitesse initiale, les abscisses sont identiques

$$x_{\mathrm{b}}(t) = x_{\mathrm{w}}(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g \sin\theta\, t^2 \tag{5}$$

Pour un observateur placé sur le plancher, la trajectoire de la bille est une droite perpendiculaire au plancher. La bille tombe donc aux pieds du passager.
Les ordonnées sont

$$y_{\mathrm{w}}(t) = 0 \qquad\qquad y_{\mathrm{b}}(t) = h - \frac{1}{2} g\cos\theta\, t^2$$

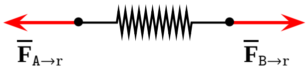
La trajectoire de la bille est une parabole.

3. Deux étudiants comparent leurs forces en tirant sur une corde attachée à une extrémité d'un puissant ressort dont l'autre extrémité est attachée à un gros arbre. Le premier étudiant est capable d'exercer une force de 850 N et le second une force de 970 N. Ensuite deux cordes sont attachées au ressort, une à chaque extrémité et les deux étudiants tirent chacun sur une corde dans des directions opposées. On demande
   (a) la force maximale mesurée par le ressort lorsque le ressort et les cordes sont immobiles,
   (b) de tracer le diagramme des forces qui s'exercent sur les étudiants et sur le ressort dans les trois cas considérés.

Analyse du problème • Il s'agit d'une application de la condition d'équilibre d'un corps — la résultante des forces qui s'exercent sur ce corps doit être nulle — et de la troisième loi de Newton — lorsque deux corps interagissent, la force exercée sur le corps 1 par le corps 2 est égale et opposée à la force exercée sur le corps 2 par le corps 1.
Le ressort et les deux cordes attachées à ses extrémités forment un corps. Le ressort est à l'équilibre lorsque la résultante des forces qui s'exercent sur lui est nulle. En négligeant la force gravitationnelle qui est supposée très petite par rapport aux autres forces,

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}} + \overline{\mathbf{F}}_{\mathtt{B}\to\mathrm{r}} = 0 \tag{6}$$

L'élongation du ressort est proportionnelle au module $F_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}} = F_{\mathtt{B}\to\mathrm{r}}$ et les deux forces sont supposées horizontales.



Les étudiants et l'arbre constituent chacun un corps qui exerce une force à l'extrémité d'une des deux cordes. Considérons un corps A qui tire sur la corde gauche. Il est soumis à trois forces

(a) La force gravitationnelle $m_{\mathtt{A}}\overline{\mathbf{g}}$ verticale et dirigée vers le bas.
(b) La force exercée par le sol $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{sol}\to\mathtt{A}}$.
(c) La force exercée par la corde attachée au ressort $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}}$.

À l'équilibre, la résultante de ces trois forces est nulle

$$m_{\mathtt{A}}\overline{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{sol}\to\mathtt{A}} + \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}} = 0 \tag{7}$$

On décompose la force $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{sol}\to\mathtt{A}}$ en une force verticale et une force horizontale. À l'équilibre du corps, la force verticale compense la force $m_{\mathtt{A}}\overline{\mathbf{g}}$ et la force horizontale compense la force exercée par le ressort.
La loi de l'action et de la réaction donne une relation supplémentaire

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}} + \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}} = 0 \tag{8}$$

qui implique que la force $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}}$ est horizontale.
Si un corps B tire à droite, l'équilibre des trois corps (A, ressort et B) implique

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}} = -\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}} = \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{r}\to\mathtt{B}} = -\overline{\mathbf{F}}_{\mathtt{B}\to\mathrm{r}} \tag{9}$$

Solution • Lorsque A est le premier étudiant et B l'arbre, on a

$$850\,\mathrm{N} = F_{\max,1} = F_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}} = F_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}} = F_{\mathrm{r}\to\mathtt{B}} = F_{\mathtt{B}\to\mathrm{r}} \tag{10}$$

Lorsque A est le second étudiant et B l'arbre, on a

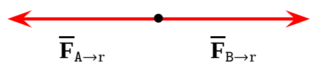
$$970\,\mathrm{N} = F_{\max,2} = F_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}} = F_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}} = F_{\mathrm{r}\to\mathtt{B}} = F_{\mathtt{B}\to\mathrm{r}} \tag{11}$$

(a) A est le premier étudiant et B le second. On a

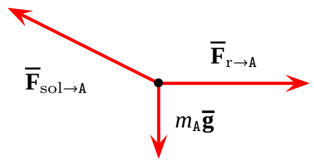
$$F_1 = F_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}} = F_{\mathrm{r}\to\mathtt{A}} = F_{\mathrm{r}\to\mathtt{B}} = F_{\mathtt{B}\to\mathrm{r}} = F_2 \tag{12}$$

Puisque $F_{\max,1} < F_{\max,2}$, la force maximale est $F_{\max,1} = 850\,\mathrm{N}$. Si l'étudiant 2 tire plus fort, l'équilibre est rompu.

(b) Le ressort est toujours soumis à deux forces $\overline{\mathbf{F}}_{\mathtt{A}\to\mathrm{r}}$ et $\overline{\mathbf{F}}_{\mathtt{B}\to\mathrm{r}}$.



Puisqu'il n'y a aucune distinction à faire dans cet exercice entre un étudiant et un arbre, un seul diagramme suffit.



4. Un ascenseur de masse égale à $200\,\mathrm{kg}$ est suspendu à un câble vertical. L'ascenseur, initialement à l'arrêt, démarre et descend avec une accélération constante pour atteindre, après $6.0\,\mathrm{s}$, une célérité de $10.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ qui est maintenue constante sur une distance de $20.0\,\mathrm{m}$. Ensuite l'ascenseur freine avec une accélération constante pour s'arrêter sur un distance de $35.0\,\mathrm{m}$.

(a) Énumérer les forces qui s'exercent sur l'ascenseur, puis tracer le diagramme des forces.

(b) Calculer l'accélération de l'ascenseur en fonction du temps.

(c) Écrire l'équation du mouvement de l'ascenseur. En déduire la force exercée par le câble en fonction du temps.

Analyse du problème • L'exercice est une application de la loi du mouvement. Les données permettent de calculer l'accélération, on en déduit la résultante des forces.

Solution • On choisit un axe OX vertical dirigé vers le haut. On donne $m = 200\,\mathrm{kg}$, $T_1 = 6.0\,\mathrm{s}$, $v_x(T_1) = v_x(T_2) = -v_0 = -10.0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $x(T_2) - x(T_1) = -d_1 = -20.0\,\mathrm{m}$ et $x(T_3) - x(T_2) = -d_2 = -35.0\,\mathrm{m}$.

(a) Deux forces s'exercent sur l'ascenseur

– La force gravitationnelle $M\overline{\mathbf{g}}$ exercée par le Terre, elle est uniforme, verticale et dirigée vers le bas ; elle est aussi conservative.

– La force $\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{c}}$ exercée par le câble ; elle est alignée sur le câble lorsqu'il est tendu.

(b) Si l'accélération est constante, on a

$$v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t - t_0) \qquad\qquad x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2$$

Nous devons considérer trois intervalles de temps successifs

1) Dans l'intervalle $[0, T_1]$, la composante v_x de la vitesse est négative et initialement nulle. On en déduit $v_x(T_1) = a_xT_1$ et $a_x = v_x(T_1)/T_1 = -a_1 = -1.67\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2) Dans l'intervalle $[T_1, T_2]$, la vitesse est constante et l'accélération nulle. On trouve $T_2 - T_1 = (x(T_2) - x(T_1))/v_x(T_1) = d_1/v_0 = 2.00\,\mathrm{s}$.

3) Dans l'intervalle $[T_2, T_3]$, la composante v_x de la vitesse est négative et finalement nulle. On en déduit $-d_2 = x(T_3) - x(T_2) = v_x(T_2)(T_3 - T_2) + \frac{1}{2}a_x(T_3 - T_2)^2$, $v_x(T_3) = v_x(T_2) + a_x(T_3 - T_2)$. On en déduit $d_2 = -v_x(T_2)(T_3 - T_2)/2 = v_0(T_3 - T_2)/2$ et donc $a_x = a_2 = -v_x(T_2)/(T_3 - T_2) = v_0^2(T_2)/2d_2 = 1.43\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On trouve aussi $T_3 - T_2 = 2d_2/v_0 = 7.00\,\mathrm{s}$.

Finalement

$$a_x = \begin{cases} -v_0/T_1 & 0 \le t < T_1 \\ 0 & T_1 \le t < T_2 \\ v_0^2/2d & T_2 \le t < T_3 \end{cases}$$

(c) L'équation du mouvement de l'ascenseur est $m\overline{\mathbf{a}} = m\overline{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{F}}_c$ c'est-à-dire $ma_x = -mg + F_{cx}$. On en déduit la force exercée par le câble en fonction du temps

$$F_{cx} = m(a_x + g) = \begin{cases} m(g - v_0/T_1) = 1.63 \times 10^3\,\mathrm{N} & 0 \le t < T_1 \\ mg & T_1 \le t < T_2 \\ m(g + v_0^2/2d) = 2.25 \times 10^3\,\mathrm{N} & T_2 \le t < T_3 \end{cases}$$