

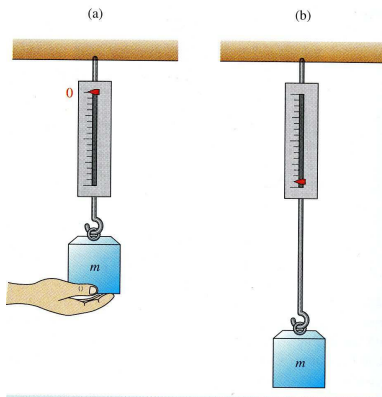
Physique générale

Séance IV: Travail — énergie potentielle

Solvay Business School, BA1 2008–2009

1. Les exercices doivent être résolus sans a priori, tous les résultats doivent être obtenus à partir des lois et des définitions de la physique et des hypothèses particulières à chaque exercices. Il faut y faire référence explicitement dans la solution.
2. Les valeurs numériques des grandeurs physiques doivent être remplacées par des symboles appropriés avant de résoudre l'exercice.
3. Le système d'axes $OXYZ$ (l'observateur) doit toujours être défini.

1. Un bloc de masse m est attaché à un dynamomètre comme le montre la figure ci-dessous. Le dynamomètre est constitué d'un ressort de constante de rappel k . La position de son curseur indique la grandeur de la force qui s'exerce à chacune de ses extrémités. Le bloc est d'abord maintenu pour que le curseur indique une valeur très faible. Il est ensuite lâché.



- (a) Tracer le diagramme des forces qui s'exercent sur le bloc dans les deux cas représentés sur la figure.
- (b) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle du bloc et exprimer la conservation de l'énergie mécanique totale.
- (c) Dans un graphique, représenter l'énergie potentielle en fonction de la position verticale du bloc. Discuter ce graphique.
- (d) Quelle est la valeur maximale indiquée par le curseur au cours du mouvement du bloc ?

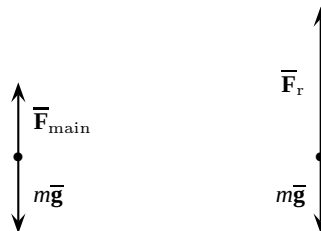
Solution • L'observateur est immobile par rapport au dynamomètre.

- (a) Dans le premier cas, une main maintient le bloc immobile dans une position où le ressort du dynamomètre n'exerce qu'une force très faible. Cette force $\vec{F}_r$ est supposée négligeable par rapport aux deux autres forces :

- la force gravitationnelle $m\vec{g}$ verticale, dirigée vers le bas, uniforme et conservative ;
- la force $\vec{F}_{\text{main}}$ exercée par la main.

Le bloc est à l'équilibre de sorte que

$$\vec{F}_{\text{main}} + m\vec{g} = 0$$



On choisit un axe vertical Ox orienté vers le bas. Son origine est la position du bloc lorsque le ressort n'est ni comprimé ni étiré. C'est la position du bloc lorsqu'il est immobile dans la main.

Dans le second cas, le bloc est en mouvement. Il est soumis à la force gravitationnelle $m\vec{g}$ et à la force $-kx\vec{1}_x$ exercée par le ressort. Ces deux forces sont conservatives. Pour $x \geq 0$, on a

$$\vec{F} = F_x \vec{1}_x$$

où

$$F_x = mg - kx$$

- (b) D'après la définition de l'énergie potentielle, on a (A est en $x = 0$, B en x et le chemin est le segment AB)

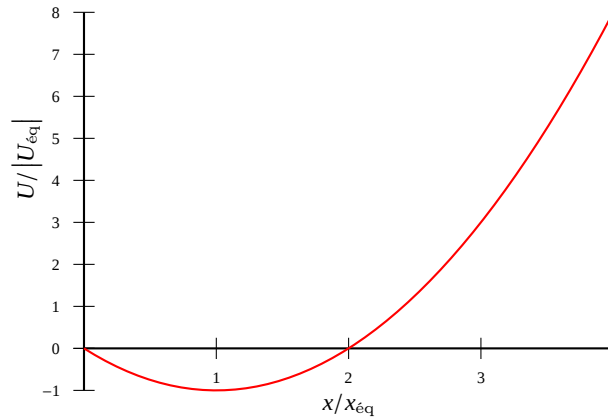
$$U(x) - U(0) = - \int_0^x F_x(x') dx' = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

On choisit $U(0) = 0$.

L'énergie mécanique totale est constante. Puisque $x(0) = v(0) = 0$, on a $E_{\text{tot}} = 0$. Donc

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

- (c) Puisque $E_{\text{tot}} = 0$, le bloc oscille entre deux positions, $x = 0$ et $x = 2x_{\text{eq}}$, comme le montre la figure.



- (d) La valeur maximale est $2mg$, elle correspond à $x = 2x_{\text{eq}}$. À l'équilibre, la valeur indiquée est mg .

2. Dans le plan OXY , une particule est soumise à une force

$$\vec{F} = \frac{F_0}{\sqrt{2}r} ((x-y)\vec{1}_x + (x+y)\vec{1}_y)$$

où F_0 est une constante égale à 7.00 N et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- (a) Quel est le module de la force et quels angles forme-t-elle avec les vecteurs $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ et $\vec{r}$?
- (b) La particule parcourt un cercle de rayon égal à 5.00 m centré à l'origine O .
- (i) Donner la force dans le trièdre de Frenet. Faire un croquis de la trajectoire dans le plan OXY et tracer les vecteurs $\vec{1}_t$, $\vec{1}_n$, $\vec{1}_b$ et $\vec{F}$ en un point du cercle.
- (ii) Calculer le travail de cette force si la particule parcourt un tour de cercle.
- (c) La force est-elle conservative ?
- (d) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ si la particule parcourt un tour complet d'un carré de sommets $(0, 0)$, $(\ell, 0)$ et $(0, \ell)$.

Analyse du problème • Exercice récapitulatif : vecteur, produit scalaire, travail, force conservative.

Solution •

- (a) Le carré du module de $(x-y)\vec{1}_x + (x+y)\vec{1}_y$ vaut

$$\left| (x-y)\vec{1}_x + (x+y)\vec{1}_y \right|^2 = 2(y^2 + x^2) = 2r^2$$

On a donc $|\vec{F}| = F_0$.

Pour obtenir les angles, on calcule les produits scalaires

$$\vec{1}_x \cdot \vec{F} = \frac{x-y}{\sqrt{2}r} F_0$$

$$\vec{1}_y \cdot \vec{F} = \frac{x+y}{\sqrt{2}r} F_0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{F} = (x\vec{1}_x + y\vec{1}_y) \cdot ((x-y)\vec{1}_x + (x+y)\vec{1}_y) \frac{F_0}{\sqrt{2}r} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_0 r$$

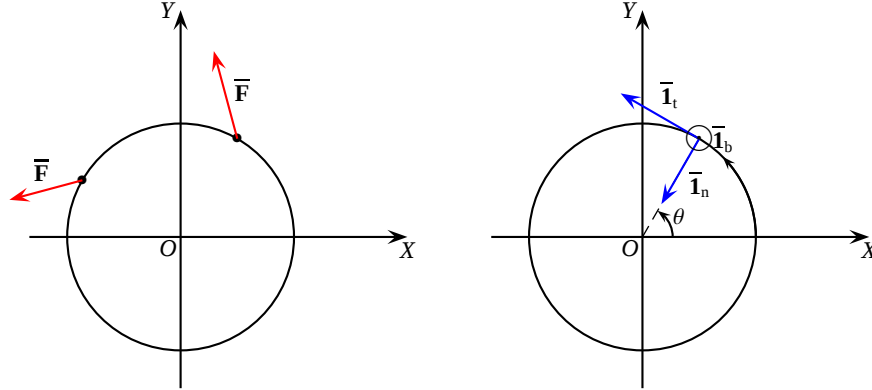
$$\theta_r = \frac{\pi}{4}$$

Les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ forment donc un angle constant égal à $\pi/4$.

- (b) Dans le trièdre de Frenet, la force s'écrit $\vec{F} = F_t \vec{1}_t + F_n \vec{1}_n + F_b \vec{1}_b$. Le sens de $\vec{1}_t$, qui définit aussi le sens positif de parcours du cercle, est indiqué sur la figure. On y définit aussi l'angle θ . On a

$$\begin{aligned}\vec{1}_t &= -\sin\theta \vec{1}_x + \cos\theta \vec{1}_y & \vec{1}_n &= -\cos\theta \vec{1}_x - \sin\theta \vec{1}_y & \vec{1}_b &= \vec{1}_z \\ F_t = \vec{F} \cdot \vec{1}_t &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_0 & F_n = \vec{F} \cdot \vec{1}_n &= -\frac{1}{\sqrt{2}} F_0 & F_b = \vec{F} \cdot \vec{1}_b &= 0\end{aligned}$$

puisque $\cos\theta = x/r$ et $\sin\theta = y/r$.



On obtient donc

$$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_0 (\vec{1}_t - \vec{1}_n)$$

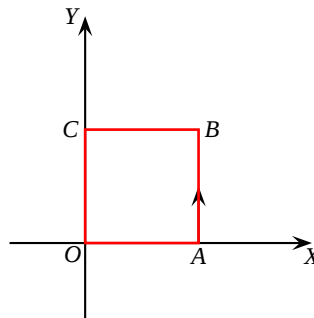
Ce que l'examen de la figure confirme immédiatement ($\theta_r = \pi/4$).

Lorsque la particule parcourt un tour complet du cercle de rayon R , le travail de la force est

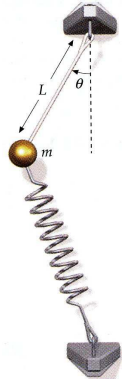
$$W(1 \text{ tour}) = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint F_t ds = F_t \oint ds = 2\pi R F_t = \sqrt{2}\pi R F_0 \quad (1)$$

- (c) Si la force était conservative, le travail de la force pour un tour complet d'un cercle serait nul. Puisque ce n'est pas le cas, la force n'est pas conservative.
 (d) Par définition, le travail de la force pour un tour complet du carré représenté ci-dessous est donné par

$$\begin{aligned}W(O \rightsquigarrow O) &= W(OABCO) = W(OA) + W(AB) + W(BC) + W(CO) \\ &= \int_O^A F_x dx + \int_A^B F_y dy + \int_B^C F_x dx + \int_C^O F_y dy \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\ell \frac{x}{|x|} dx + \int_0^\ell \frac{\ell + y}{\sqrt{\ell^2 + y^2}} dy + \int_\ell^0 \frac{x - \ell}{\sqrt{x^2 + \ell^2}} dx + \int_\ell^0 \frac{y}{|y|} dy \right) \\ &= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) F_0 \ell\end{aligned}$$



3. Un pendule est suspendu au plafond au point A, il est constitué d'une tige rigide de masse négligeable et d'une petite sphère de masse m . Cette petite sphère est attachée à une extrémité d'un ressort, de constante de rappel k , dont l'autre extrémité est fixe (point B). Les deux points de fixation sont sur la même verticale.



Lorsque le pendule est vertical, le ressort n'exerce aucune force sur la petite sphère. La longueur au repos du ressort est $L/2$. On considère que la force exercée par la tige est toujours alignée sur cette tige.

- Tracer le diagramme des forces qui s'exercent sur la petite sphère.
- Calculer l'énergie potentielle de la petite sphère en fonction de l'angle θ .
- Si la petite sphère est lâchée de la position P_0 (θ_0), quelle est sa trajectoire ? Pour quelle valeur de l'angle θ , la célérité est-elle maximale ? Quelle est la résultante des forces qui s'exercent sur la petite sphère dans cette position ?

Solution succincte •

- La petite sphère, dont la position est P , est soumise à trois forces
 - La force gravitationnelle $m\vec{g}$ exercée par la Terre. Elle est verticale, dirigée vers le bas, uniforme et conservative.
 - La force $\vec{F}_{\text{tige}}$ exercée par la tige. Elle est alignée sur PA .
 - La force F_r exercée par le ressort. Elle est alignée sur PB . Cette force est conservative. Si $\vec{1}_B$ est le vecteur unitaire dans le même sens que $\vec{PB}$, on a $F_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{1}_B$ où ℓ_0 est la longueur du ressort « au repos » et ℓ sa longueur lorsque la petite sphère est en P .

Ces trois forces sont dans un même plan vertical.

Puisque $AB = L + \ell_0$, $AP = L$ et $BP = \ell$, on a

$$\ell^2 = (L + \ell_0)^2 + L^2 - 2(L + \ell_0)L \cos \theta$$

- L'énergie potentielle de la petite sphère, fixée à l'extrémité de la tige, ne dépend que de l'angle θ à cause de la symétrie du problème : invariance par rotation d'un angle quelconque autour de AB . Lorsque la petite sphère est sur AB , l'allongement du ressort est nul, la hauteur de la bille est prise égale à zéro ainsi que son énergie potentielle. On a donc

$$U(\theta) = mgh + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

avec $h = L(1 - \cos \theta)$ et $\ell^2 = (L + \ell_0)^2 + L^2 - 2(L + \ell_0)L \cos \theta$.

- Puisque $\vec{v}_0 = 0$, la trajectoire est plane, le plan est ABP_0 . En $\theta = 0$,
 - l'énergie potentielle est minimale, c'est dans cette position que la célérité est maximale en vertu de la conservation de l'énergie mécanique totale ;
 - la résultante des forces est verticale et égale à la masse multipliée par l'accélération ;
 - l'accélération étant centripète, le module de la force est $F = mv^2/L$ et elle est dirigée vers le point A.