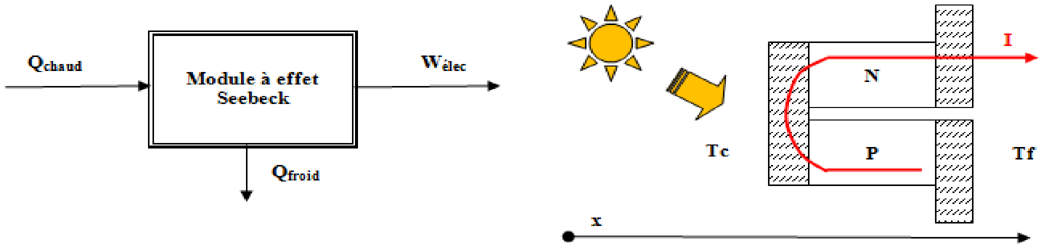
EQUATIONS THERMOELECTRIQUES

Le but de ce problème vise à établir les relations liées entre les paramètres électriques et thermiques d'un module à effet Seebeck. On rappellera brièvement que l'effet Seebeck permet la production d'électricité et de froid à partir d'une source de chaleur. La partie thermique étudiée ne concerne qu'un couple PN. Il est donc constitué de deux matériaux dopés P et N ainsi que du conducteur électrique présent de chaque coté de celui-ci. Pour prendre en compte l'intégralité du module, il faudra rajouter au modèle établi les résistances thermiques dues à la couche de céramique présente de part et d'autre de la cellule ainsi que des résistances de contact.



Schématisation d'une jonction PN

Le module Seebeck étant assez mince, on ne tiendra pas compte des effets de convection et de rayonnement à l'intérieur du module. De même d'un point de vue électrique les effets Thomson seront ignorés. Dans les deux branches le flux transporté s'écrit :

$$\begin{aligned} q_p &= \alpha_p \times I \times T - \lambda_p \times S_p \times \frac{dT}{dx} \\ q_n &= -\alpha_n \times I \times T - \lambda_n \times S_n \times \frac{dT}{dx} \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Avec α_p et α_n les pouvoirs thermoélectriques absolues des matériaux P et N considérés positifs en $\left[\frac{V}{K}\right]$,

λ_p et λ_n les conductivités thermiques des matériaux P et N en $\left[\frac{W}{m.K}\right]$,

S_p et S_n les sections des branches des matériaux P et N en $[\,m^2]$,

I le courant continu traversant les branches en [A] et T la température en un point du module en [K],

L'équation de la chaleur s'écrit de manière générale si l'on ne considère que la conduction :

$\frac{1}{\alpha} \times \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda}$ avec $\dot{q} = \frac{I^2 \times \rho}{S^2}$ la génération de chaleur par unité de volume en $\left[\frac{W}{m^3}\right]$.

ρ la résistivité électrique du matériau [Ω.m].

Comme le régime est considéré stationnaire, on a pour chaque branche :

$$\begin{aligned} -\lambda_p \times S_p \times \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{I^2 \times \rho_p}{S_p} \\ -\lambda_n \times S_n \times \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{I^2 \times \rho_n}{S_n} \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Si l'on résout l'équation issue de **(2)** pour la branche p :

$$\lambda_p \times S_p \times \frac{\partial T}{\partial x} = -\left(\frac{I^2 \times \rho_p}{S_p}\right) x + B \qquad \textbf{(3)}$$

$$\lambda_p \times S_p \times T(x) \quad = \quad -\left(\frac{I^2 \times \rho_p}{2 \times S_p}\right) x^2 + Bx + C$$

Conditions aux limites : $T(x=0) = Tc$ et $T(x=L) = Tf$ soit,

- en $x = 0$ on a : $C \quad = \quad \lambda_p \times S_p \times Tc$
- en $x = L_p$ on a : $\lambda_p \times S_p \times Tf \quad = \quad -\left(\frac{I^2 \times \rho_p \times {L_p}^2}{2 \times S_p}\right) + B \times L_p + \lambda_p \times S_p \times Tc$

$$B \quad = \quad \frac{\lambda_p \times S_p \times (Tf - Tc)}{L_p} + \frac{I^2 \times \rho_p \times L_p}{2 \times S_p}$$

Si l'on remplace dans **(3)** et que l'on suit le même raisonnement pour le côté dopé N, on obtient:

$$\begin{aligned} \lambda_p \times S_p \times \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{I^2 \times \rho_p (x - \frac{L_p}{2})}{S_p} + \frac{\lambda_p \times S_p \times (Tf - Tc)}{L_p} \\ \lambda_n \times S_n \times \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{I^2 \times \rho_n (x - \frac{L_n}{2})}{S_n} + \frac{\lambda_p \times S_n \times (Tf - Tc)}{L_n} \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

Equation bizarre car on part de l'équation de la chaleur (le seul flux est la conduction thermique) et d'autres flux viennent s'y ajouter de part la considération en (1)

En combinant **(1)** et **(4)** :

$$\begin{aligned} q_p &= \alpha_p \times I \times T + \frac{I^2 \times \rho_p \times \left(x - \frac{L_p}{2}\right)}{S_p} - \frac{\lambda_p \times S_p \times (Tf - Tc)}{L_p} \\ q_p(x=0) &= \alpha_p \times I \times Tc - \frac{I^2 \times \rho_p \times L_p}{2 \times S_p} - \frac{\lambda_p \times S_p \times (Tf - Tc)}{L_p} \\ q_p(x = L_p) &= \alpha_p \times I \times Tf + \frac{I^2 \times \rho_p \times L_p}{2 \times S_p} - \frac{\lambda_p \times S_p \times (Tf - Tc)}{L_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_n &= -\alpha_n \times I \times T + \frac{I^2 \times \rho_n \times (x - \frac{L_n}{2})}{S_n} - \frac{\lambda_n \times S_n \times (Tf - Tc)}{L_p} \\ q_n(x=0) &= -\alpha_n \times I \times Tc - \frac{I^2 \times \rho_n \times L_n}{2 \times S_n} - \frac{\lambda_n \times S_n \times (Tf - Tc)}{L_p} \\ q_n(x = L_n) &= -\alpha_n \times I \times Tf + \frac{I^2 \times \rho_n \times L_n}{2 \times S_n} - \frac{\lambda_n \times S_n \times (Tf - Tc)}{L_n} \end{aligned}$$

Si on somme $q_p(x=0)$ et $q_n(x=0)$ on obtient la puissance chaude d'entrée du système : q_c . De même si l'on somme $q_p(x = L_p)$ et $q_n(x = L_n)$ on obtient la puissance froide à la sortie du système q_f. En admettant que les sections de passage des branches (S_n et S_p) soient identiques et en considérant les longueurs de jambes égales ($L_n = L_p$) on peut écrire :

$$\begin{aligned} q_c &= \alpha \times I \times Tc - \frac{R \times I^2}{2} - K \times (Tf - Tc) \\ q_f &= \alpha \times I \times Tf + \frac{R \times I^2}{2} - K \times (Tf - Tc) \\ q_{elec} &= \alpha \times I \times (Tc - Tf) - R \times I^2 \end{aligned}$$

Avec $R = \frac{\rho_n \times L_n}{S_n} + \frac{\rho_p \times L_p}{S_p}$ la résistance électrique d'une paire de branches PN.

$K = \frac{\lambda_n \times S_n}{L_n} + \frac{\lambda_p \times S_p}{L_p}$ le coefficient d'échange thermique global d'une paire de branches PN.

$\alpha = (\alpha_p - \alpha_n)$ le pouvoir thermoélectrique du couple PN (encore appelé coefficient Seebeck).