

Opérateurs différentiels

Obi76 (O.T.)

5 janvier 2009

1 L'opérateur $\vec{\nabla}$ et son calcul

1.1 $\vec{\nabla}$

Par définition, on a $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

1.2 Divergence

La divergence se note comme suit :

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1)$$

Une autre notation intéressante et souvent rencontrée est la notation d'Einstein : $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$. Lorsque i n'est pas précisé, cette écriture est équivalente à $\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div}(\vec{u})$

Interprétation :

La divergence s'interprète en termes de flux. Si on prend un volume V dans l'espace de bord S , le flux de \vec{u} à travers S est égal à l'intégrale sur D de la divergence, d'après le théorème de Green-Ostrogradsky (11). Un divergent est donc une grandeur scalaire qui est appliquée à un champ de vecteurs.

Le divergent d'un vecteur est donc nul sur un volume si le flux total de ce vecteur à travers la surface fermée qui délimite ce volume est nulle. En analogie avec la mécanique des fluides, cela reviendrait à dire que le débit total de liquide à travers une surface fermée est nul.

Le divergent est donc généralement utilisé pour des équations de conservation (de la masse, de la charge etc).

Exemple 1 : En mécanique des fluides.

$$\operatorname{div}(\rho\vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

avec ρ la masse volumique du fluide et \vec{u} sa vitesse. C'est la conservation de la masse. $div(\rho\vec{u})$ est le débit massique de fluide qui passe à travers une surface fermée. Si celui-ci est non nul, alors la variation de masse dans ce volume ($\frac{\partial\rho}{\partial t}$) est égal à cette variation de masse. On retombe bien sur l'équation 2.

Exemple 2 : En électro-magnétisme.

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

avec ρ la densité de charge électrique et \vec{j} la quantité de courant, on remarque une très grande similarité avec 2. Son interprétation est la même. Dans un volume fermé, la quantité de charge qui s'accumule ($\frac{\partial\rho}{\partial t}$) est égale à la quantité de charge totale qui passe à travers la surface que l'on étudie ($div(\vec{j})$), d'où l'équation 3.

2 Gradient

En physique, on définit le gradient comme une grandeur vectorielle qui indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace. On applique cet opérateur en général à un scalaire (il arrive de le faire sur un vecteur mais cela ne nous intéresse pas dans ce cadre). Le champ scalaire sera ici noté a .

$$\text{Le gradient se note : } \vec{grad}(a) = \vec{\nabla} a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Exemple : plus on descend dans de l'eau, plus la pression augmente. Le gradient de pression $grad(P)$ est donc un vecteur dirigé vers le bas. La pression statique est

$$P = P_0 - \rho g z. \text{ Donc } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \text{ Donc } grad(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}$$

3 Rotationnel

Plus difficile à se représenter aussi précisément que le gradient et la divergence, il exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point : sa circulation locale sur un petit lacet entourant ce point est non nulle. Par exemple dans une tornade, le vent tourne autour de l'oeil du cyclone et le champ vectoriel vitesse du vent a un rotationnel non nul autour de l'oeil. Le rotationnel de ce champ de vitesse (autrement dit le champ de vorticité ou encore champ tourbillonnaire) est d'autant plus intense que l'on est proche de l'oeil.

Le rotationnel est donc un opérateur à appliquer sur un vecteur, et est lui même un vecteur. Il se note $\vec{rot}(\vec{u})$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{u}$. Il se calcule de la manière suivante :

$$\vec{rot}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4)$$

3.1 Laplacien

Le laplacien est une grandeur scalaire que l'on applique à un champ scalaire (pression, température, densité de charge, masse volumique etc). Il se note Δa ou bien $div(\vec{grad}(a)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} a$.

Il est égal à $\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$.

$$\text{Il se note aussi } \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} a \text{ car } div(\vec{grad}(a)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} a = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix} a =$$

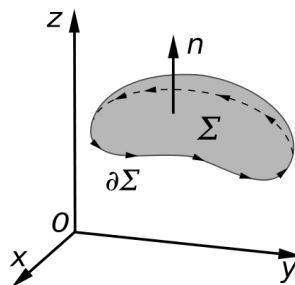
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \Delta a$$

4 Propriétés des opérateurs différentiels

4.1 Théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradsky

4.1.1 Théorème de Stokes

Ce théorème - que nous ne démontrerons pas ici - permet de relier une intégrale curviligne à une intégrale surfacique. Il dit que l'intégrale sur une ligne fermée (fil, ligne imaginaire etc) d'un champ vectoriel est égal à l'intégrale sur la surface délimitée par cette ligne du rotationnel de ce champ. Le fil fermé est noté ∂S et la surface inscrite dans ce fil est S .



Soit :

$$\oint_{\partial S} \vec{u} \cdot \vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{u}) \cdot \vec{dS} \quad (5)$$

En partant de l'équation de Maxwell-Ampère (l'une des 4 équation de Maxwell), nous allons voir qu'il est possible de démontrer le théorème d'Ampère en stationnaire :

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

Si le champ électrique est constant en temps, alors on a :

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (7)$$

Si on intègre sur une surface quelconque cette équation, on obtient

$$\iint_S \overrightarrow{rot} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_S \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (8)$$

$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ est la quantité de courant qui passe à travers la surface que nous considérons. De plus, en vertu de 5, on a

$$\iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{dl} \quad (9)$$

Par conséquent on obtient le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{int} \quad (10)$$

4.1.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Le théorème de Stokes permet de passer d'une intégrale curviligne à une intégrale de surface, le théorème de Green-Ostrogradsky permet lui de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume. Prenons une surface fermée S (sphère, cylindre, cube etc) qui délimite un volume V (boule, volume du cube etc.).

Ce théorème stipule que :

$$\iiint_V \text{div}(\vec{u}) dV = \iint_S \vec{u} \cdot \vec{dS} \quad (11)$$

Ce théorème permet - entre autre - de retrouver le théorème de Gauss.

En effet, l'équation de Maxwell-Gauss stipule que

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (12)$$

Si on intègre cette équation sur un volume V, on obtient :

$$\iiint_V \text{div}(\vec{E}) dV = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (13)$$

Avec E le champ électrique (un vecteur donc) et ρ la densité volumique de charge. Or, en vertu de Green-Ostrogradsky (11), on a

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) dV = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

De plus, ρ étant une densité volumique de charge, $\iiint \rho dV$ est donc égal à la charge totale contenue dans V (que l'on notera Q_{int}).

On obtient par conséquent le théorème de Gauss :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (15)$$

5 Composition des opérateurs différentiels

Les différentes équations données ci-dessous sont facilement vérifiable, je vous suggère de vous entraîner chez vous pour essayer de les redémontrer. Ce n'est pas dur et ça vous permettra de manipuler ces opérateurs.

Ces relations sont fondamentales et sont à savoir. On notera \vec{u} un champ de vecteur quelconque (vitesse, champ électrique etc.), a un champ de scalaire quelconque (température, potentiel etc.) et λ une constante.

- $\operatorname{div}(\lambda \vec{u}) = \lambda \operatorname{div}(\vec{u})$
- $\operatorname{grad}(\lambda a) = \lambda \operatorname{grad}(a)$
- $\operatorname{rot}(\lambda \vec{u}) = \lambda \operatorname{rot}(\vec{u})$
- $\Delta(\lambda a) = \lambda \Delta(a)$
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{u}) = 0$
- $\operatorname{div}(a \vec{u}) = \vec{u} \cdot \operatorname{grad}(a) + a \cdot \operatorname{div}(\vec{u})$
- $\Delta a = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(a))$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{a})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(a)) - \Delta a$
- $\operatorname{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{u}) + \operatorname{div}(\vec{v})$
- $\operatorname{grad}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{grad}(\vec{u}) + \operatorname{grad}(\vec{v})$
- $\operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt} \operatorname{div}(\vec{u})$ si les variables de position et de temps sont indépendantes l'une de l'autre dans l'expression de \vec{u} . Donc si $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}$ ne dépend pas de t .

5.1 Application à la conservation de la charge

D'après l'équation de Maxwell-Ampère (Eq. 6), on a

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (16)$$

En faisant le divergent à gauche et à droite, on a

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{div}\left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}\left(\mu_0 \vec{j}\right) + \mu_0 \varepsilon_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad (17)$$

Or, $div(\overrightarrow{rot \vec{u}}) = 0$, on obtient donc

$$\mu_0 div(\overrightarrow{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 div\left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = 0 \quad (18)$$

De plus, grace aux lois de composition (cf chapitre 5), on a $div\left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt} div(\overrightarrow{E})$.

L'équation de Maxwell-Gauss (Eq. 12) nous permet de dire que $div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.
D'où, $div\left(\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$.

En remplaçant dans l'équation (Eq. 18), on obtient :

$$\mu_0 div(\overrightarrow{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

Par conséquent, on retrouve la conservation de la charge :

$$div(\overrightarrow{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

qui est bien l'équation que nous avons vu au chapitre 1.2 (Eq. 3).

5.2 Reformulation du théorème de Green-Ostrogradsky

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky (Eq. 11), on a

$$\iiint_V div(\overrightarrow{u}) dV = \iint_S \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{dS} \quad (21)$$

Soit \overrightarrow{f} un champ de vecteurs uniforme (donc constant en espace), et c un champ de scalaires. On posera $\overrightarrow{u} = c \overrightarrow{f}$.

Par conséquent, on a

$$\iiint_V div(c \overrightarrow{f}) dV = \iint_S c \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dS} \quad (22)$$

D'après les lois de compositions, on a

$$\iiint_V div(c \overrightarrow{f}) dV = \iiint_V c div(\overrightarrow{f}) + \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{grad}(c) dV \quad (23)$$

Or, comme \overrightarrow{f} est constant, $div(\overrightarrow{f}) = 0$. On arrive à

$$\begin{aligned} \iiint_V div(c \overrightarrow{f}) dV &= \iiint_V c div(\overrightarrow{f}) dV + \iiint_V \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{grad}(c) dV \\ &= \iiint_V \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{grad}(c) dV = \overrightarrow{f} \cdot \iiint_V \overrightarrow{grad}(c) dV \end{aligned} \quad (24)$$

En remplaçant dans l'équation 22, on obtient

$$\overrightarrow{f} \cdot \iiint_V \overrightarrow{grad}(c) dV = \iint_S c \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{dS} = \overrightarrow{f} \cdot \iint_S c \overrightarrow{dS} \quad (25)$$

Finalement,

$$\iint_S c \overrightarrow{dS} = \iiint_V \overrightarrow{grad}(c) dV \quad (26)$$

5.3 Utilisation de la reformulation du théorème de Green-Ostrogradsky pour la démonstration de la poussée d'Archimède

Ceci est un exemple de la puissance des opérateurs différentiels en physique. On va montrer ici que dans certains cas, les propriétés de ces opérateurs permettent de s'affranchir de la forme des objets ou des surfaces que l'on considère. Ces formules sont physiquement très généralistes et peuvent être utilisées dans (quasiment) tous les cas.

On sait que la poussée d'Archimède est la force résultante des forces de pression sur la surface d'un objet. La surface de cet objet sera notée S , son volume V . Le champ de pression sera noté P .

Cette poussée s'écrit donc

$$\vec{P}_A = \iint_S P d\vec{S} \quad (27)$$

Or, d'après l'équation 26, on a

$$\vec{P}_A = \iint_S P d\vec{S} = \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}(P) dV \quad (28)$$

D'après le théorème de l'hydrostatique, on a $P = P_0 - \rho gz$. Avec P_0 la pression de référence (en général la pression atmosphérique), ρ la masse volumique du liquide et g l'accélération de la gravité. On obtient

$$\vec{P}_A = \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}(P_0 - \rho gz) dV \quad (29)$$

Comme P_0 est constant, ρ et g aussi, on obtient $\overrightarrow{\text{grad}}(P_0 - \rho gz) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}$.

D'où

$$\vec{P}_A = \iiint_V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix} dV = -\rho g \iiint_V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dV = -\rho g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix} \quad (30)$$

Finalement, on voit que les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}(P)$ sont nulles sur x et sur y . Par conséquent la poussée d'Archimède sera portée par z et vaudra :

$$\vec{P}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g V \end{pmatrix} \quad (31)$$

ρV est la masse de fluide déplacé (volume du corps immergé fois la masse volumique du liquide), donc $\rho g V$ est le poids de fluide déplacé. On obtient bien la définition de la poussée d'Archimède, qui dit que cette force est égale en norme au poids de fluide déplacé et est dirigé à son opposé.