Problème : l'oscillateur harmonique en mécanique quantique

Dans un cadre unidimensionnel on considère une particule de masse m liée à un oscillateur harmonique. L'énergie potentielle de la particule est : $V(x)=\frac{1}{2}m\,\omega^2\,x^2$, où ω est la pulsation caractéristique de l'oscillateur, x est la position de la particule le long de l'axe.

1.a. Tracez l'allure de la fonction $V(x)$
1.b. Résumez en quelques mots ce que sera le mouvement classique de la particule après avoir écrit l'équation fondamentale de la dynamique du problème.

2.a. Situation quantique : écrivez l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires, $\varphi(x)$, de la particule. On appellera E l'énergie de la particule.
2.b. Montrez que cette équation se met sous la forme :

$$-\frac{d^2\varphi}{du^2}+u^2\varphi=\alpha\,\varphi \qquad \text{avec} \qquad \alpha=\frac{2E}{\hbar\omega} \qquad \text{et} \qquad u=\frac{x}{\lambda}$$

où vous déterminerez λ en fonction de $\hbar$, m et ω.

2.c. Quelle est la dimension de λ ?

3.a. Pourquoi ne doit-on accepter comme solutions à cette équation que celles qui tendent vers 0 lorsque u tend vers $\pm\infty$?
3.b. Montrez que lorsque u est grand en valeur absolue, la fonction $e^{-u^2/2}$, dite solution asymptotique de l'équation, est acceptable.

Ce résultat incite à poser : $\varphi(u)=H(u)\,e^{-u^2/2}$, et à remplacer cette expression de φ dans l'équation pour trouver une nouvelle équation différentielle satisfaite par $H(u)$ [il n'est pas demandé de trouver cette équation]. On démontre ensuite que cette nouvelle équation admet des solutions physiquement acceptables si, et seulement si, α prend la forme : $\alpha=\alpha_n=2n+1$ où n est un nombre entier quelconque (positif ou nul). Pour chaque valeur de n, on obtient ainsi une solution $H_n(u)$ qui s'écrit :

$$H_n(u)=\frac{(-1)^n}{(\pi\lambda^2)^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\;e^{u^2}\,\frac{d^n}{du^n}(e^{-u^2})$$

4.a. A partir de ces considérations, écrivez les fonctions propres $\varphi_n(u)$ et les énergies propres E_n de l'oscillateur harmonique quantique (N.B. le facteur multiplicatif des H_n est calculé pour que $\varphi_n(x)$ soit normalisée pour tout n)
4.b. Explicitez les deux premières fonctions d'ondes $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$, ainsi que leurs énergies respectives correspondant au niveau fondamental et au premier niveau excité.

5.a. On suppose que la particule est dans un état quantique caractérisé par la fonction d'onde $\varphi_1(x)$ à l'instant 0, quelle sera sa fonction d'onde $\psi_1(x,t)$ à l'instant t ? Que donnera une mesure de l'énergie de cette particule à l'instant t ?

5.b. La particule est maintenant dans l'état quantique caractérisé par la fonction d'onde $\varphi_0(x)$. Quelle sera sa fonction d'onde $\psi_0(x,t')$ à un instant ultérieur t' ? Que donnera une mesure de l'énergie de cette particule à l'instant t' ?

5.c. A supposer que la particule ait transité de l'état φ_1 vers l'état φ_0, que s'est-il produit ?

6.a. La particule est maintenant dans un état quantique caractérisé par la fonction d'onde $\chi(x) = \sin\theta\ \varphi_1(x) + \cos\theta\ \varphi_2(x)$ (où θ est un paramètre réel constant) à l'instant 0. Quelle sera sa fonction d'onde $\psi(x,t)$ à l'instant t ? Que donnera une mesure de l'énergie de cette particule à l'instant t ?

6.b. Quelle est la valeur moyenne de la grandeur physique « énergie » dans cet état quantique ?