1. MOUVEMENT HARMONIQUE.

1.1 Oscillateur harmonique.

On obtient un mouvement oscillatoire harmonique quand un objet est abandonné en dehors de sa position d'équilibre et que la force qui tend à le ramener vers cette position d'équilibre est proportionnelle à l'écart entre la position instantanée de l'objet et sa position d'équilibre. On observe ce type de mouvement pour un corps suspendu à un ressort ou à un élastique, pour un pendule et pour la grande majorité des mouvements oscillatoires que l'on rencontre autour de nous.

Il faut faire remarquer que la condition de la proportionnalité de la force de restitution avec l'écart de la position d'équilibre ne se produit **jamais** parfaitement dans la réalité. En général,

- la force de restitution n'est pas exactement proportionnelle à l'écart de position (par exemple dans le cas de pendules).
- en plus de la force de restitution on trouve des forces qui freinent l'objet et qui diminuent l'amplitude d'oscillation. On peut aussi trouver le cas contraire: des forces qui font augmenter l'amplitude.

On peut obtenir des mouvements très proches du mouvement harmonique théorique en évitant les non-proportionnalités (mieux dit: les non-linéarités) et en rajoutant des forces qui compensent les forces qui freinent l'objet.

Nous allons étudier le mouvement d'un objet ponctuel de masse m qui peut se mouvoir le long d'un axe horizontal y.

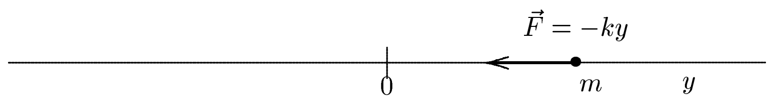

Figure 1.1 La force de restitution est proportionnelle au déséquilibre.

La force F qui le ramène vers sa position d'équilibre (pour $y = 0$) sera proportionnelle à y:

$$F = -ky$$

k est la constante de proportionnalité (mesurée en $\frac{Newtons}{mètre}$) et le signe $-$ indique que quand le déséquilibre est vers la droite (y positif) la force est dirigée vers la gauche et donc négative.

La deuxième loi de Newton nous dit que l'accélération est proportionnelle à la force ($F = ma$):

$$F = -ky = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

Voilà une équation différentielle de deuxième ordre. Il faut trouver une fonction $y(t)$ dont la deuxième dérivée soit elle-même (à un coefficient près). Il est immédiat que trois fonctions satisfont cette condition: $\sin(\omega t + \varphi)$, $\cos(\omega t + \varphi)$ et $e^{j(\omega t+\varphi)}$.

On peut exclure immédiatement la dernière car si, mathématiquement elle convient, physiquement elle est inacceptable car y devrait comporter une partie imaginaire. Or, y est une longueur appartenant à notre monde et elle ne peut être que réelle, comme tout ce qui nous entoure. Les choses imaginaires n'ont d'existence que dans l'imagination des gens et non dans notre monde.

Les solutions sin ou cos sont identiques et on peut choisir librement. Je choisis cos. La forme plus générale sera:

$$y = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.1}$$

Si on essaye cette solution on obtient:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -ky = -kA\cos(\omega t + \varphi)$$

soit:

$$mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = kA\cos(\omega t + \varphi)$$

N'importe quelle valeur de A convient. On peut choisir $A = 0$ et rentrer à la maison: cela correspond à une oscillation d'amplitude nulle, ce qui est aussi acceptable qu'inintéressant. Nous ne considérerons que des amplitudes différentes de zéro. Dans ce cas (et seulement dans ce cas) nous pouvons diviser les deux membres de l'équation par A. Pour que l'équation soit satisfaite il faut donc que:

$$m\omega^2 = k$$

C'est la seule condition. φ peut avoir n'importe quelle valeur. La pulsation du mouvement est:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.2}$$

Les valeurs de A et de φ seront données par des conditions initiales: il faut connaître deux grandeurs qui permettront de les déterminer. Cela peut être l'amplitude et la vitesse au temps $t = 0$ mais ce n'est pas la seule possibilité. Il suffit, par exemple, de connaître la vitesse au temps t_1 et l'accélération au temps t_2.

1.1.1 Énergie du système.

Le système oscillant que nous venons de calculer ne subit pas de pertes d'énergie. Celle-ci reste donc constante même si, en permanence, de l'énergie cinétique (due à la vitesse) se transforme en énergie potentielle (p. ex. flexion du ressort) et réciproquement. Nous allons le démontrer. Pour le faire, il faut commencer par calculer l'énergie potentielle d'un dispositif dont la forme de la force de restitution est celle que nous avons utilisée: $F = -ky$. Ceci sera valable pour un ressort, un élastique, un pendule, etc.

Pour faire passer le dispositif d'un déplacement y à un déplacement $y + dy$ il faut fournir un travail égal à:

$$dW_p = F dy$$

La force F sera égale à celle du dispositif $(-ky)$ mais de signe opposé car il faut "lutter" contre le dispositif. F sera donc égale à ky (et non $-ky$).

$$dW_p = k\,y\,dy$$

Ce travail fourni se transformera en énergie potentielle que le système rendra si on lui permet de revenir à y. Le travail total à fournir pour faire passer le dispositif d'un écart nul $(y = 0)$ à un écart y sera l'intégrale entre 0 et y du travail à fournir pour passer de y à $y + dy$:

$$W_p = \int_0^y dW_p = \int_0^y kydy = \frac{1}{2}k\left[y^2\right]_0^y = \frac{1}{2}ky^2$$

si on met en évidence la dépendance de y avec le temps:

$$W_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \tag{1.3}$$

D'autre part, l'énergie cinétique de la masse m est $W_c = \frac{1}{2}mv^2$ et

$$v = \frac{dy}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

l'énergie cinétique sera:

$$W_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

mais $\omega^2 = \frac{k}{m}$:

$$W_c = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) \tag{1.4}$$

L'énergie totale est, évidemment, constante:

$$W_T = W_p + W_c = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$W_T = \frac{1}{2}kA^2 \tag{1.5}$$

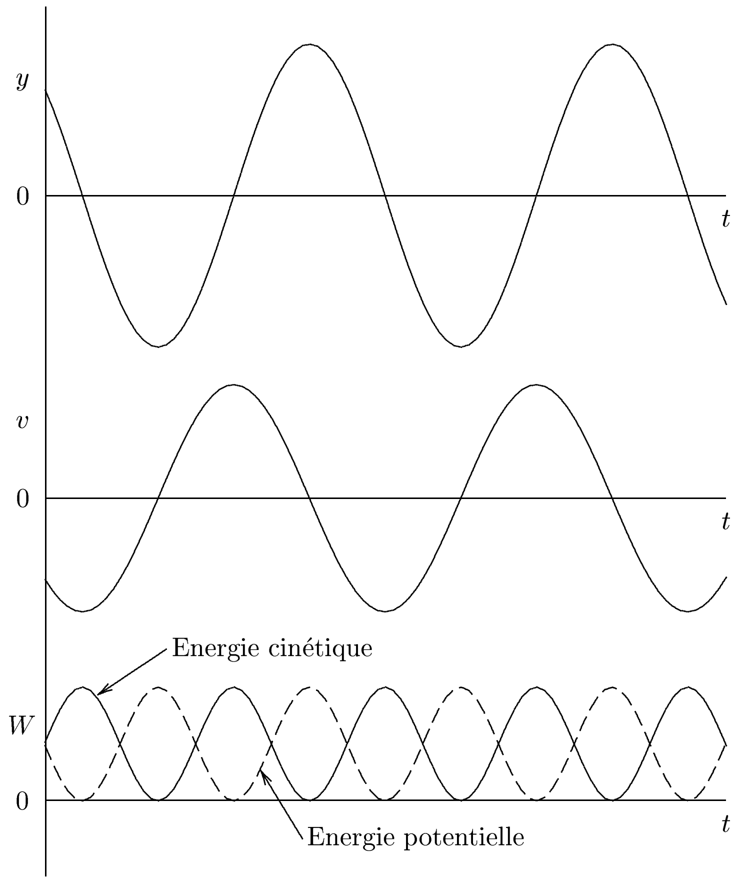

Figure 1.2 Position, vitesse et énergies potentielle et cinétique en fonction du temps

1.1.2 Exemple: le pendule simple.

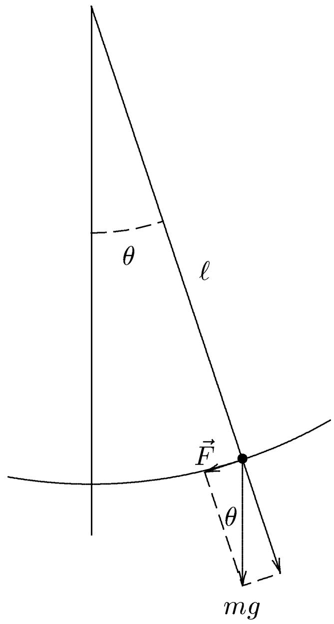

Figure 1.3 Pendule simple. On considère l'angle θ très petit.

Le pendule simple est constitué par une masse ponctuelle m attachée à un point fixe par une ficelle de longueur ℓ inextensible, sans masse et complètement souple.

La composante radiale du poids mg est compensée par la réaction de la ficelle. La composante tangentielle $-mg\sin\theta$ est la force qui tend à ramener la masse à sa position d'équilibre. Les équations de départ seront:

$$y = \ell\theta$$

et

$$F = -mg\sin\theta$$

Pour des angles θ quelconques ces équations ne correspondent pas à un mouvement harmonique et la solution n'est pas une sinusoïde. Nous allons nous limiter au cas simple où l'amplitude du mouvement est faible (θ petit) et pour lequel on peut approcher le sinus à l'angle ($\sin\theta \simeq \theta$). Avec cette simplification, les équations de départ deviennent:

$$y = \ell\theta$$

et

$$F = -mg\theta = -\frac{mg}{\ell}y$$

ce qui nous donne comme équation différentielle:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}y$$

et la solution sera

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1.6}$$

La fréquence (et la période) d'un pendule simple ne dépend pas de la masse. Elle ne dépend que de la longueur et de l'accélération de gravité (g). C'est ce que l'on appelle l'*isochronisme des pendules* et qui fut découvert expérimentalement par Galilée dans les années 1600: tous les pendules de même longueur ont la même période. Mais il ne faut pas oublier que c'est seulement une approximation valable pour des objets très petits et massifs et pour des amplitudes très petites.

1.2 Mouvement harmonique amorti.

Nous allons nous rapprocher un peu de la réalité en étudiant un oscillateur amorti. C'est un dispositif similaire à celui que nous venons d'étudier: une masse ponctuelle m qui peut se déplacer sur l'axe horizontal y et qui subit une force de restitution $F = -ky$. Mais cette fois nous allons rajouter une force qui s'oppose au mouvement: vers la droite quand la masse se déplace vers la gauche et réciproquement. Dans la nature cette force peut être constante (indépendante de la vitesse), proportionnelle à la vitesse ou proportionnelle à la vitesse élevée à une puissance supérieure (et pas nécessairement entière)([1]). Elle est toujours de direction opposée à la vitesse, freine le mouvement et fait perdre de l'énergie. L'amplitude du mouvement diminuera d'autant plus vite que la force sera plus grande. Quant à la forme de la décroissance de l'amplitude, elle dépendra de la dépendance de la force avec la vitesse. Si la force est indépendante de la vitesse (frottement sec) l'amplitude décroîtra linéairement vers zéro. Si elle est proportionnelle à la vitesse (frottement visqueux), nous verrons que l'amplitude décroîtra exponentiellement.

Nous ne traiterons que le cas où la force est proportionnelle à la vitesse. C'est le cas le plus rencontré et surtout c'est le cas le plus proche des circuits résonnants (RLC) en électronique, et aussi des quartzs et des résonateurs en céramique utilisés en électronique.

Cette fois en plus de la force de restitution $F = -ky$ nous en aurons aussi une autre: $-bv = -b\frac{dy}{dt}$. L'équation devient:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt}$$

Suivant la valeur de l'amortissement b nous aurons trois cas:

- Si b est très grand, le mouvement est très amorti et la masse retourne à sa position d'équilibre asymptotiquement (sans dépasser la position d'équilibre) .
- Pour une certaine valeur de b (plus faible) on obtient l'*amortissement critique*. La masse retourne à l'équilibre le plus rapidement possible sans dépasser la position d'équilibre. C'est le cas limite.
- Pour b encore plus faible la masse retourne vers sa position d'équilibre en oscillant autour d'elle avec une amplitude de plus en plus faible et qui tend asymptotiquement vers zéro.

Nous n'étudierons que le dernier cas, car c'est le seul dans lequel nous avons des oscillations. Sans démonstration, la solution générale pour le troisième cas, peut s'écrire:

$$y = Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$$

Pour déterminer les valeurs de a et ω il faut calculer les deux premières dérivées de cette expression et les remplacer dans l'équation différentielle de départ. Courage, dérivons:

$$\frac{dy}{dt} = -aAe^{-at}\cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-at}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi) + a\omega Ae^{-at}\sin(\omega t + \varphi) + \omega aAe^{-at}\sin(\omega t + \varphi) - \omega^2Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(a^2 - \omega^2\right)Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi) + 2a\omega Ae^{-at}\sin(\omega t + \varphi)$$

([1]) Il n'est pas nécessaire d'aller bien loin pour trouver dans la vie de tous les jours des forces qui ont ce type de comportement avec la vitesse: il suffit de faire du vélo. À l'arrêt et à très faible vitesse (quelques km/h) les seules forces en jeu sont celles de la friction sèche des pneus, roulements, etc. La force est indépendante de la vitesse et la puissance à fournir sera proportionnelle à la vitesse: tout le monde peut faire du vélo à faible vitesse. Quand la vitesse augmente, et jusqu'à une trentaine de km/h, la résistance de l'air devient proportionnelle à la vitesse. La puissance à fournir augmente comme le carré de la vitesse: il faut être en forme pour aller vite. Au-delà de 30 km/h la résistance de l'air augmente plus vite et l'exposant passe de 1 à 2, vers les 45 km/h: la puissance à fournir augmente comme la puissance 3 de la vitesse: il faut être un champion (ou en descente). Ceci explique l'importance de s'abriter derrière un coéquipier ou mieux encore, un concurrent.

En remplaçant dans l'équation différentielle:

$$m\left(a^2-\omega^2\right)Ae^{-at}\cos(\omega t+\varphi)+2ma\omega Ae^{-at}\sin(\omega t+\varphi)=$$
$$-kAe^{-at}\cos(\omega t+\varphi)+baAe^{-at}\cos(\omega t+\varphi)+b\omega Ae^{-at}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\left[m\left(a^2-\omega^2\right)+k-ba\right]Ae^{-at}\cos(\omega t+\varphi)+\left[2ma\omega-b\omega\right]Ae^{-at}\sin(\omega t+\varphi)\;=\;0$$

La seule possibilité pour qu'une combinaison linéaire de sinus et cosinus soit égale à zéro pour toutes les valeurs de t est que les coefficients soient nuls:

$$m\left(a^2-\omega^2\right)+k-ba\;=\;0$$

$$2ma\omega-b\omega\;=\;0$$

de là on déduit:

$$a\;=\;\frac{b}{2m}$$

$$\omega\;=\;\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{1.7}$$

et

$$y\;=\;Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t+\varphi) \tag{1.8}$$

Le mouvement est une oscillation sinusoïdale dont l'amplitude décroît exponentiellement.

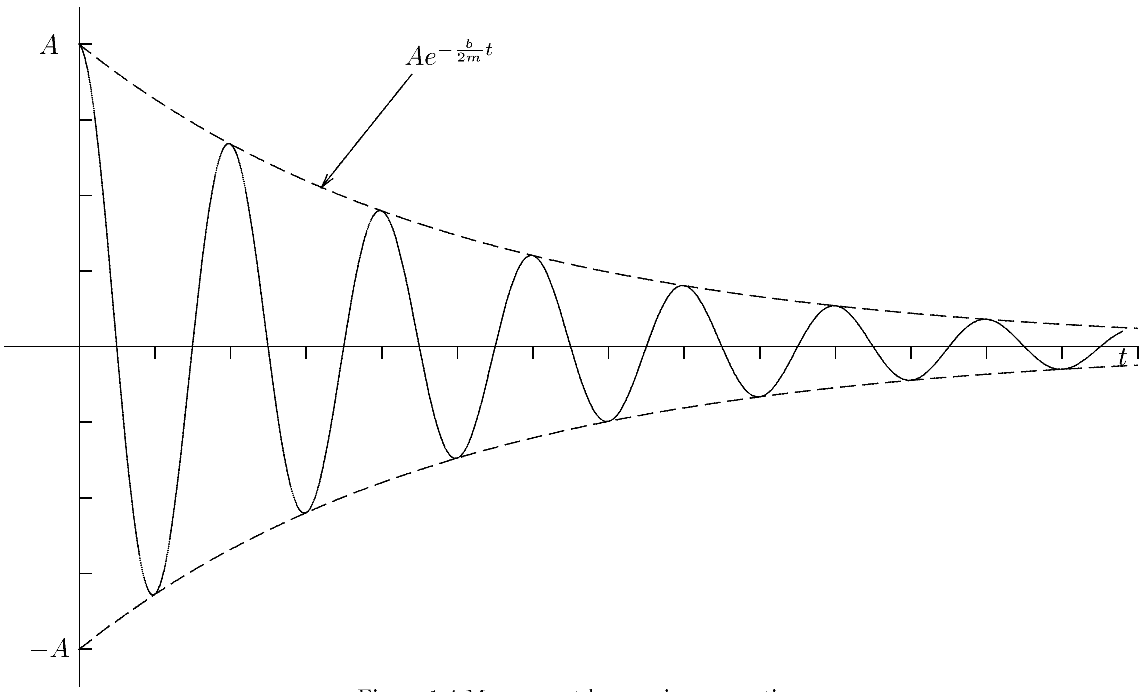

Figure 1.4 Mouvement harmonique amorti.

La fréquence d'oscillation diminue légèrement avec l'amortissement car celui-ci ralentit le mouvement. On peut définir une grandeur qui décrit le degré d'amortissement. Celle-ci s'appelle **coefficient de qualité** ou tout simplement le **Q** pour les intimes. La définition est:

$$Q=\sqrt{\frac{km}{b^2}}\;\simeq\;\frac{\omega m}{b} \tag{1.9}$$

Pour l'amortissement critique (voir plus haut) la valeur de Q est zéro. Pour des valeurs plus élevées, Q est égal à π fois le nombre d'oscillations que le système fait pendant que son amplitude diminue d'un facteur e. En faisant des approximations plus grossières on peut dire que le Q est égal à trois fois le nombre d'oscillations pour que l'amplitude diminue d'un facteur 3.

1.3 Oscillations forcées. Résonance.

On peut mettre en mouvement un pendule en le laissant osciller librement après l'avoir déplacé de sa position d'équilibre. Mais on peut aussi lui appliquer une force périodique de période quelconque. Nous nous limiterons au cas où cette force est sinusoïdale. Quand cette force commence à agir, le système commence à osciller <u>à la fréquence de la force excitatrice</u> avec une amplitude qui augmente avec le temps. Si le système est amorti (comme dans tous les cas réels), les pertes de puissance augmentent avec l'amplitude et il arrivera un moment où la puissance fournie par la force externe sera compensée exactement par les pertes. L'amplitude n'augmentera plus et on sera arrivé à la situation d'équilibre dynamique. Si on arrête l'excitation, le mouvement deviendra un mouvement harmonique amorti, comme celui étudié précédemment, mais <u>à la fréquence propre du système</u>.

Si l'amortissement est faible, comme dans le cas des coupes en cristal, et si l'excitation est puissante, comme la voix de la Castafiore, l'amplitude peut croître énormément, jusqu'à dépasser la limite de résistance élastique de l'objet et provoquer sa cassure.

Dans la phase transitoire, l'amplitude croît comme $(1 - e^{-at})$ vers sa valeur asymptotique d'équilibre. Nous n'étudierons pas la phase transitoire mais seulement le régime stationnaire.

La force excitatrice sera de la forme $F_m \cos(\omega t)$ et il faudra l'ajouter dans l'équation différentielle de départ:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt} + F_m \cos(\omega t) \tag{1.10}$$

Cette équation est un peu plus compliquée que celle du cas précédent. Mais déjà, avant de calculer la solution, nous connaissons sa forme mathématique. En effet, pour le régime stationnaire, l'équation étant linéaire, la solution doit être sinusoïdale et la pulsation de cette sinusoïde ne peut être que ω, la pulsation de l'excitation. Donc, en somme, les seules deux grandeurs qui restent à déterminer et qui nous intéressent sont l'amplitude de la sinusoïde et le déphasage par rapport à la sinusoïde d'excitation. Pour trouver ces deux inconnues nous allons utiliser la méthode utilisée en électricité et électronique: le formalisme d'impédances.

Inventons une grandeur ξ, sans existence physique, qui obéisse à l'équation:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi - b\frac{d\xi}{dt} + F_m \sin(\omega t) \tag{1.11}$$

Inventons une autre variable, sans plus d'existence physique que la précédente et qui sera:

$$\Upsilon = y + j\xi \tag{1.12}$$

où j est comme d'habitude $\sqrt{-1}$. Les deux équations différentielles (1.10) et (1.11) sont *linéaires* (c'est à dire que la variable y et ses dérivées apparaissent toujours élevées à la puissance 1). Dans ce cas, si on lui ajoute des choses imaginaires, elles ne se mélangeront pas avec les parties réelles. Nous allons donc additionner l'équation (1.10) avec la (1.11) après avoir multiplié cette dernière par j. En tenant compte de la (1.12) nous obtenons:

$$m\frac{d^2\Upsilon}{dt^2} = -k\Upsilon - b\frac{d\Upsilon}{dt} + F_m \cos(\omega t) + jF_m \sin(\omega t)$$

ou encore:

$$m\frac{d^2\Upsilon}{dt^2} = -k\Upsilon - b\frac{d\Upsilon}{dt} + F_m e^{j\omega t} \tag{1.13}$$

La solution est immédiate:

$$\Upsilon = Ae^{j\omega t} \tag{1.14}$$

Au début de ce chapitre nous avions rejeté une solution du type $e^{j\omega t}$ car cette solution comporte une partie imaginaire. Mais à ce moment il s'agissait de trouver la solution pour une grandeur réelle, alors que cette fois Υ est une valeur complexe et il est normal que la solution le soit aussi. Pour déterminer A on essaie la solution (1.14) dans l'équation (1.13):

$$m(-\omega^2)Ae^{j\omega t} = -kAe^{j\omega t} - j\omega bAe^{j\omega t} + F_m e^{j\omega t} \tag{1.15}$$

on peut diviser par $e^{j\omega t}$ car ce n'est pas nul, et déduire A:

$$A = \frac{F_m}{k - m\omega^2 + jbm\omega}$$

A est une grandeur complexe et on peut l'écrire sous la forme

$$A = \rho e^{j\varphi}$$

où

$$\rho = |A| = \left| \frac{F_m}{k - m\omega^2 + jb\omega} \right| \tag{1.16}$$

et

$$\varphi = Arg\left(\frac{F_m}{k - m\omega^2 + jb\omega} \right) \tag{1.17}$$

ce qui permet d'écrire la solution pour Υ:

$$\Upsilon = \rho e^{j\omega t + \varphi}$$

En réalité ce qui nous intéresse est y et non Υ. Mais y est la partie réelle de Υ:

$$y = \Re(\Upsilon) = \rho \cos(\omega t + \varphi)$$

1.3.1 Réponse en fréquence.

L'amplitude des oscillations forcées dépendra, évidemment, de la force d'excitation. Mais pour une même valeur de la force elle dépendra aussi de la fréquence. Nous allons étudier la dépendance de l'amplitude ρ avec ω. Pour ce faire nous allons réécrire l'expression de A en introduisant ω_o, la fréquence propre du système (sans amortissement ni excitation):

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.18}$$

Après simplification:

$$A = \frac{F_m}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_o}\sqrt{\frac{b^2}{km}}} \tag{1.19}$$

Maintenant nous allons réintroduire le facteur de qualité Q que nous avions défini dans la section 1.2:

$$Q = \sqrt{\frac{km}{b^2}}$$

d'où

$$\sqrt{\frac{b^2}{km}} = \frac{1}{Q}$$

avec ceci on obtient:

$$A = \frac{F_m}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_o}\frac{1}{Q}} \tag{1.20}$$

Dans la figure 1.5 nous avons représenté la dépendance de l'amplitude normalisée $|A|\,\frac{k}{F_m}$ en fonction de la fréquence relative à la fréquence propre ω_o du système. Pour une fréquence nulle nous sommes "en continu": la force F_m appliquée au système est une force constante et non périodique. Le système s'écarte de sa position d'équilibre et va à la nouvelle position $\frac{F_m}{k}$ et il y reste. Pour des fréquences très faibles le système oscillera entre les positions $\frac{F_m}{k}$ et $-\frac{F_m}{k}$. À mesure que la fréquence augmente, l'amplitude des oscillations forcées augmente et arrive à son maximum quand la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre du système. Cette fréquence est aussi appelée la **fréquence de résonance** du système. On dit aussi que un système excité près de sa fréquence de **résonance** "entre en résonance" ou **"résonne"**. À la résonance, l'amplitude des oscillations sera Q fois plus grande que pour des fréquences très faibles. Maintenant on comprend mieux la signification du facteur de qualité Q. Q mesure le gain en amplitude pour la résonance par rapport au déplacement que l'on obtient avec des forces en continu.

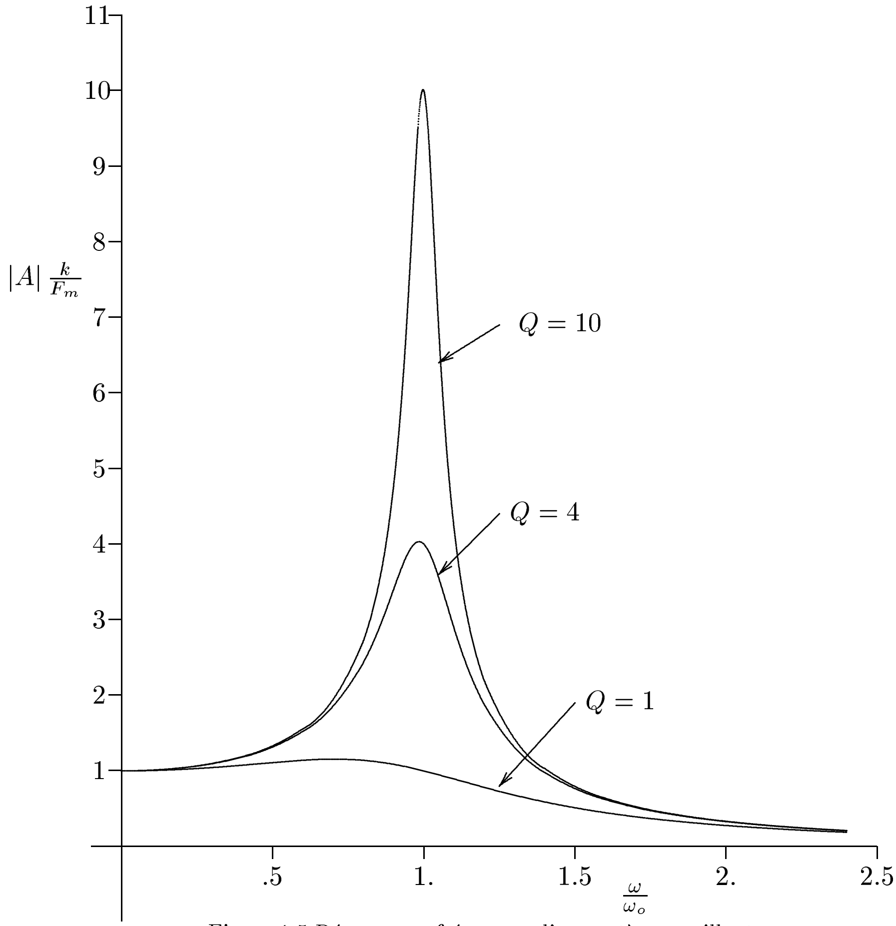

Figure 1.5 Réponse en fréquence d'un système oscillant.

Le facteur de qualité d'un système mécanique est très variable. On trouve des Q très élevés dans les cristaux de quartz (de 10^6 à 10^7). Une corde de guitare a un Q de l'ordre de 1000. Une voiture en bon état a un Q de quelques unités. La différence du son entre une coupe en verre au plomb (dit cristal) et une autre en verre ordinaire provient du Q intrinsèque de chaque matériau.

1.4 Exercices.

1 - Le poids d'une masse de $4\,kg$ allonge un ressort de $16\,cm$. On enlève cette masse et l'on y accroche une autre de 0,5 kg. Calculez la période d'oscillation.
R.N.:0,28 s

2 - Deux particules exécutent un mouvement harmonique simple de même fréquence et amplitude le long d'une même ligne droite. Elles se croisent quand elles vont dans des directions opposées et quand leur déplacement est égal à la moitié de l'amplitude. Quelle est leur différence de phase.
R.N.:$\frac{2\pi}{3}$

3 - Saut à l'élastique. On veut calculer la longueur et la rigidité de l'élastique à utiliser pour un saut à l'élastique. La chute maximum totale ne doit pas dépasser $70\,m$ (marge de sécurité déjà soustraite). Au plus bas de la chute, la force de traction ne doit pas excéder trois fois le poids du sauteur. Pour le calcul on prendra la masse du sauteur égale à $70\,kg$. Calculez la

longueur $\ell_\circ$ d'élastique à utiliser ainsi que sa rigidité k (en Newtons/m). Calculez la période des oscillations qui suivent le saut. Calculez la durée de la première chute.
R.N.:$\ell_\circ = 23{,}33m$ $k = 44{,}145\,N/m$ $7{,}91\,s$ $4{,}818\,s$

4 - Une grue porte une charge d'une tonne à l'extrémité d'un filin de $30\,m$. Calculez la période d'oscillation. Quelle force horizontale doit-on exercer sur la charge pour la déplacer de $10\,cm$ de sa position d'équilibre?
R.N.:$10{,}988\,s$ $F = 32{,}67\,N$

5 - Calculez la constante k obtenue avec deux ressorts de constantes k_1 et k_2 suivant que l'on fixe les deux ressorts en série ou en parallèle.