2. ONDES DANS UNE CORDE.

2.1 Généralités.

2.1.1 Ondes en général.

Une onde est une perturbation qui se propage dans le vide ou dans un milieu matériel. La nature de la perturbation est très diverse suivant le type d'onde. Dans le vide la perturbation ne peut être qu'une variation des champs électrique ou magnétique ou gravitationnel([1]).

Dans les milieux matériels, en plus des ondes électromagnétiques ou gravitationnelles les perturbations peuvent concerner des déplacements de matière, des variations de pression ou de température. Parfois les trois en même temps. La vitesse à laquelle se déplace la perturbation dépend de la nature de l'onde et de celle du milieu (ou non-milieu) dans lequel a lieu le phénomène. Une caractéristique commune à toutes les ondes est celle de transporter de l'énergie. Pour fabriquer une onde il faut lui fournir de l'énergie et celle-ci se déplace avec la perturbation.

Un dernier mot sur un type d'onde dont on ne parlera pas ici: les ondes associées à des particules élémentaires ou non. On sait que des particules (électrons, neutrons, etc.) se comportent dans certaines expériences comme des ondes dont on sait calculer la longueur d'onde associée et le comportement. On connaît aussi la signification physique de ces ondes. Par contre on ne connaît pas la nature de ces ondes ce qui, par ailleurs, n'a pas l'air de troubler le sommeil des physiciens. Nous laisserons ces ondes dans les livres de mécanique quantique.

2.1.2 Types d'ondes.

On peut classer des ondes par leur nature: vagues dans la surface de liquides, ondes sonores (dont les ondes de choc et les ondes séismiques), ondes électromagnétiques (dont la lumière et les ondes radio), ondes de densité dans les plasmas, etc.

On peut aussi les classer suivant le sens de la perturbation comparé avec la direction de propagation. Nous avons des ondes transversales dans lesquelles la perturbation est perpendiculaire à la direction de déplacement, et des ondes longitudinales dans lesquelles la perturbation a la même direction que le déplacement. Parmi les ondes transversales on trouve les ondes électromagnétiques dans lesquelles les champs électriques et magnétiques sont perpendiculaires à la direction de propagation, les ondes dans une corde qui sont celles que nous étudierons dans ce chapitre et un type d'ondes séismiques (en fait des ondes sonores) que l'on appelle S ou de cisaillement.

Parmi les ondes longitudinales on trouve des ondes sonores dans les gaz et dans les milieux élastiques en général.

Un dernier type d'ondes est formé par les ondes qui se produisent à l'interface entre deux milieux. Une partie des ces ondes de surface est du type transversal mais d'autres ondes sont un mélange entre transversal et longitudinal. Un exemple bien connu est donné par les vagues à la surface des liquides qui sont à la fois transversales et longitudinales et . . . très compliquées à traiter mathématiquement.

([1]) Si les ondes gravitationnelles existent, ce qui n'est pas encore démontré.

2.2 Ondes dans une corde.

On peut se demander pourquoi nous traitons les ondes dans une corde, alors que ce type d'ondes ne présente aucun intérêt pratique ou même théorique. La raison est que ce sont les ondes les plus faciles à voir, à comprendre et à étudier. Mais cela ne suffit pas. Étudier un sujet seulement parce qu'il est le plus simple serait pitoyable. Ce qui est intéressant dans l'étude des ondes dans une corde est que nous allons trouver les mêmes propriétés que pour les autres ondes: équation d'onde, vitesse de propagation, transmission de puissance, réflexion, transmission, ondes stationnaires, TOS, etc. Tout ça avec des ondes que l'on peut voir se propager, se réfléchir, etc. Et que l'on peut fabriquer d'un coup de poignet. En résumé, tout ce que nous allons faire dans ce chapitre n'est intéressant que parce qu'on le retrouve dans presque tous les autres types d'ondes.

Tout le monde a pu constater que si, quand on tient l'extrémité d'une corde tendue, on donne un petit coup latéral, on observe une déformation qui s'éloigne et qui éventuellement rebondit à l'autre extrémité pour revenir.

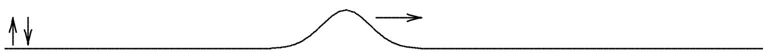

Figure 2.1 Un petit coup à une extrémité crée une impulsion qui s'éloigne.

Pour étudier le mouvement d'une perturbation dans une corde nous allons simplifier le problème en imaginant une corde de grosseur négligeable de masse par unité de longueur μ (en $\frac{kg}{m}$) uniforme et soumise à une tension T. La tension est presque la même chose qu'une force sauf que c'est un scalaire: elle n'a pas de direction. Chaque morceau de la corde est soumis à deux forces de grandeur T de directions opposées et le long de la corde.

Nous ignorerons l'effet de la gravité.

La variable x mesurera la position le long de la corde et la variable y l'écart latéral de la corde par rapport à sa position d'équilibre.

Remarquez que y dépendra <u>et</u> du temps <u>et</u> de la position en x. y sera donc une fonction de deux variables et on écrira $y(x, t)$. Nous allons attaquer le problème en imaginant la corde comme une série de petites masses δm séparées par des distances δx. Chaque δm subit deux forces de valeur T dirigées vers ses deux proches voisins. Si les masses élémentaires se trouvent alignées, ces forces s'annuleront. Mais si ce n'est pas le cas et qu'il y a une *courbure*, il y aura une résultante non nulle que nous considérerons comme dirigée verticalement même si ce n'est pas tout à fait vrai. Nous nous limiterons à des pentes de y faibles: ceux pour lesquels la tangente peut s'approcher par l'angle ou le sinus.

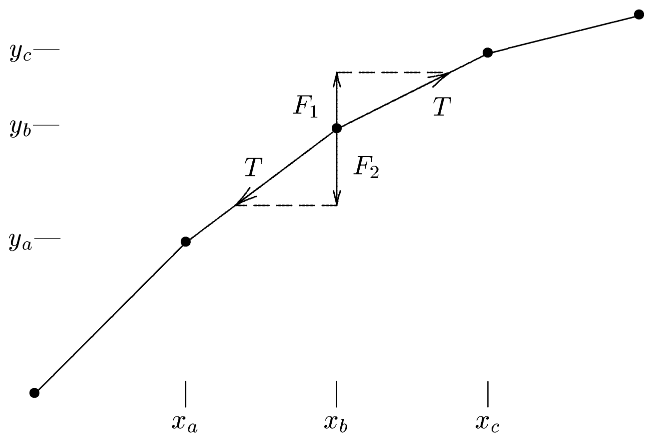

Figure 2.2 Forces sur une fraction de la corde. L'échelle verticale est très dilatée.

En utilisant le théorème de Thalès on peut écrire:

$$\frac{F_1}{T} = \frac{y_c - y_b}{\sqrt{(\delta x)^2 + (y_c - y_b)^2}} \simeq \frac{y_c - y_b}{\delta x}$$

L'approximation est valable pour de faibles pentes pour lesquelles $(y_c - y_b \ll \delta x)$. De même:

$$\frac{F_2}{T} \simeq \frac{y_b - y_a}{\delta x}$$

La force résultante (vers le haut) sur la masse b sera:

$$\delta F = F_1 - F_2 = T\left(\frac{y_c - y_b}{\delta x} - \frac{y_b - y_a}{\delta x}\right)$$

La seconde loi de Newton nous dit que $F = ma$. Dans notre cas il faudra remplacer F par δF et m par δm:

$$\delta m\, a = \delta F = T\left(\frac{y_c - y_b}{\delta x} - \frac{y_b - y_a}{\delta x}\right)$$

en divisant les deux membres de d'équation par δx on obtient:

$$\frac{\delta m}{\delta x} a = T \frac{\frac{y_c - y_b}{\delta x} - \frac{y_b - y_a}{\delta x}}{\delta x}$$

Si maintenant nous passons à la limite en faisant tendre δx vers zéro, la fraction $\frac{\delta m}{\delta x}$ tend vers μ et la limite de la fraction de droite n'est pas autre chose que la définition de la deuxième dérivée de y par rapport à x. Notez que comme y dépend de x et de t, cette deuxième dérivée est une dérivée partielle.

$$\mu a = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

mais l'accélération a est la deuxième dérivée de y par rapport au temps:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

Cette élégante équation apparaît dans la plupart des mouvements ondulatoires (même pour des ondes électromagnétiques). Elle paraît difficile à résoudre mais en fait ce n'est pas le cas. Nous allons démontrer que n'importe quelle fonction $\Phi(\xi)$ satisfait cette équation à la seule condition que ξ dépende du temps et de x comme ceci:

$$\xi = t \pm \frac{x}{v}$$

Nous avons donc:

$$y(x,t) = \Phi(\xi) \qquad \text{avec:} \qquad \xi = t \pm \frac{x}{v}$$

Pour démontrer que Φ est une solution, il faut calculer les deux deuxièmes dérivées de Φ par rapport à x et à t et les introduire dans l'équation 2.1. Pour la première dérivée:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm\frac{1}{v}\frac{d\Phi}{d\xi}$$

pour la deuxième dérivée:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left[\frac{d}{d\xi}\left(\pm\frac{1}{v}\frac{d\Phi}{d\xi}\right)\right]\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(\pm\frac{1}{v}\right)\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}\left(\pm\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}$$

Même chose par rapport au temps. Première dérivée:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{d\Phi}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{d\xi}$$

pour la deuxième dérivée:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)\right]\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d^2\Phi}{d\xi^2}$$

En remplaçant ces résultats dans l'équation 2.1 on obtient:

$$\frac{1}{v^2}\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \frac{\mu}{T}\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}$$

En excluant le cas où $\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = 0$, qui est aussi une solution mais sans grand intérêt, on déduit que v doit satisfaire:

$$v = \pm\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Donc, n'importe quelle fonction de ξ est une solution pour y à la seule condition que la variable v ait la valeur donnée par l'équation précédente. En réalité le fait que la fonction dépende de $\xi = t \pm \frac{x}{v}$ a une signification physique remarquable que nous allons montrer.

Imaginons que, à un instant t_1 nous prenions une photo de la corde (avec une perturbation, sinon ce n'est pas intéressant). Dans la figure suivante nous avons représenté une forme quelconque, avec l'échelle verticale très agrandie.

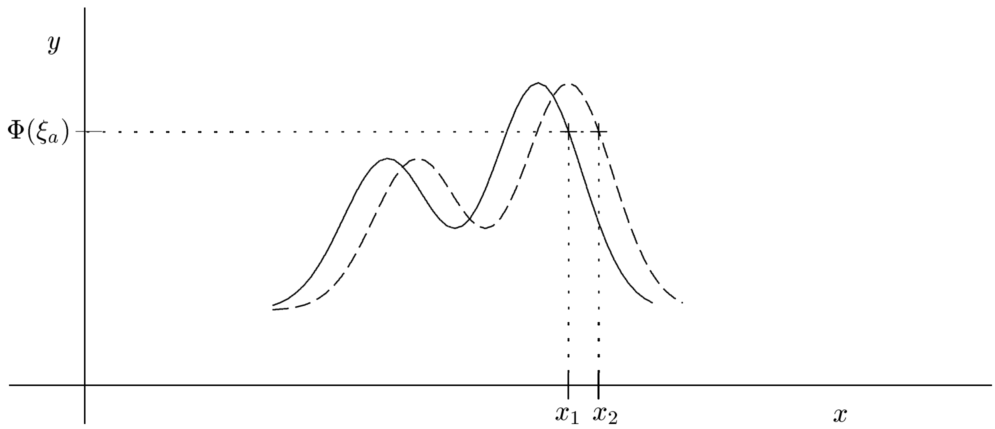

Figure 2.3 Position d'une partie de la corde à l'instant t_1. Et à l'instant t_2 en tirets.

Nous allons nous intéresser au point de la corde situé à l'abscisse x_1. Dans cet instantané, la position de la corde vaut $y(x_1, t_1)$ ou $\Phi(\xi_a)$ où

$$\xi_a = t_1 - \frac{x_1}{v}$$

Ici nous avons choisi arbitrairement le signe $-$ dans le $\pm$.

Prenons un autre instantané un peu plus tard, au temps t_2, et regardons à quelle position x_2 se trouve le point de la corde qui cette fois est à la position d'égale hauteur que $y(x_1, t_1)$ (la hauteur du point auquel nous nous intéressions dans la première photo). Comme le point que nous cherchons se trouve à la même hauteur, la valeur de Φ pour ce point doit être $\Phi(\xi_a)$. Mais cela veut dire que la valeur de ξ pour le nouveau point doit être aussi ξ_a:

$$\xi_a = t_1 - \frac{x_1}{v}$$

$$\xi_a = t_2 - \frac{x_2}{v}$$

de là on déduit:

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$$

Donc la position de la corde qui se trouvait à une certaine hauteur s'est déplacée vers la droite d'une distance $v(t_2 - t_1)$ pendant l'intervalle $t_2 - t_1$ entre les deux photos. Ce que nous venons de faire pour un point, on peut le faire pour tous les points de la corde et nous trouverons le même déplacement $v(t_2 - t_1)$. Et si nous dessinons tous ces points nous obtiendrons une courbe similaire à la précédente mais décalée vers la droite de $v(t_2 - t_1)$. Voir la courbe en tirets sur la figure 2.3. Si, à la place de faire des photos nous faisons du cinéma, nous obtiendrons un film dans lequel on voit la même courbe qui se déplace vers la droite à vitesse v. Si nous avions fait le choix du signe $+$ au lieu de $-$ nous aurions obtenu que la courbe se déplaçait vers la gauche.

Donc la solution de l'équation d'onde 2.1 est n'importe quelle fonction mais qui se déplace vers la droite ou vers la gauche à vitesse $v = \pm\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

2.2.1 Régime sinusoïdal.

Comme n'importe quelle fonction est solution de l'équation d'onde et que toutes les équations sont linéaires, nous n'allons travailler qu'avec des sinusoïdes. La justification de ce choix est que l'on peut décomposer n'importe quelle fonction continue en somme de fonctions orthogonales. Parmi les familles de fonctions orthogonales (fonctions de Bessel, Legendre, Tchébicheff, Hermite, etc.), la plus sympathique est celle des sinus et cosinus. Une décomposition d'une fonction en somme (éventuellement infinie) de sinus et cosinus s'appelle développement en **série de Fourier**. Donc pour une fonction non sinusoïdale, on la développera en série de Fourier et on étudiera chaque terme de la série isolément.

Évidemment chaque terme de la série sera fonction de ξ et nous nous limiterons donc à des fonctions de la forme:

$$y = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi\right]$$

pour des ondes se déplaçant vers la droite.

On définit la variable k appelée **nombre d'onde** (2) comme:

$$k = \frac{\omega}{v}$$

Avec ceci:

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Et si nous pouvons forcer φ à zéro, tant mieux.

Nous pouvons encore faire plus fort, et utiliser le formalisme des impédances. Dans ce cas nous écrirons:

$$y = Ae^{j(\omega t - kx)} \tag{2.2}$$

(cette fois le $e^{j\varphi}$ est inclus dans le A, qui n'est plus forcément réel).

ATTENTION: L'expression 2.2 n'est pas vraiment une équation. C'est plutôt une recette destinée à des adultes (3) qui savent s'en servir. Si y représente l'écart physique de la corde, il ne peut être que réel et il faut lire la recette 2.2 ainsi:

l'écart y est une sinusoïde de pulsation ω et d'amplitude égale à la norme de A et dont le déphasage est égal à l'argument de A.

Dans les autres cas y est une variable mathématique complexe sans réalité physique et l'expression 2.2 est une équation ordinaire. Toute la nuance réside dans le passage entre une équation mathématique complexe et la réalité physique.

On peut maintenant donner quelques définitions générales, valables pour tous les phénomènes ondulatoires.

Vitesse. C'est la vitesse à laquelle se propage l'onde. Elle correspond à la variable v utilisée plus haut. Nous verrons plus tard que, en réalité, cette vitesse s'appelle plus précisément **vitesse de phase** et qu'il en existe une autre, parfois égale, appelée **vitesse de groupe**. La vitesse est toujours mesurée en mètres par seconde (m/s).

(2) Définition historique. “onde” est bien au singulier. Il ne s'agit pas du “nombre des ondes”.
(3) Remarquez le carré blanc en bas à droite de la page.

Période. Mesurée en secondes. C'est le temps nécessaire pour que le sinus ou le cosinus reprenne la même valeur ainsi que sa dérivée (à x constant). Autrement dit $Période{\cdot}\omega = 2\pi$. Souvent on utilise la lettre T pour la période, mais ici cette lettre a déjà été utilisée pour représenter la tension de la corde.

Pulsation. C'est le ω des formules précédentes. Elle est mesurée en radians/seconde.

Fréquence. C'est le nombre de fois par seconde que la situation se répète (même valeur du cosinus et de sa dérivée), toujours à x constant.

$$F = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{Période}$$

La fréquence se mesure en Hertz dont les dimensions sont $\frac{1}{secondes}$.

Longueur d'onde. Cette fois à temps constant. C'est la distance de répétition des ondes. C'est-à-dire, la distance minimale entre deux positions de même hauteur et pente. On utilise souvent la lettre lambda λ pour la représenter. Se mesure en mètres.

$$longueur\ d'onde = \lambda = \frac{v}{f}$$

2.2.2 Puissance transportée.

On avait dit qu'une onde transportait de la puissance. Nous allons calculer, en régime sinusoïdal, la puissance transportée par une onde de pulsation ω et d'amplitude (réelle) A. L'écart y sera:

$$y = A\cos(\omega t + kx + \varphi)$$

Nous allons calculer, dans un premier temps le travail effectué, pendant une période, par un point de la corde sur un autre point situé à sa droite à une distance δx.

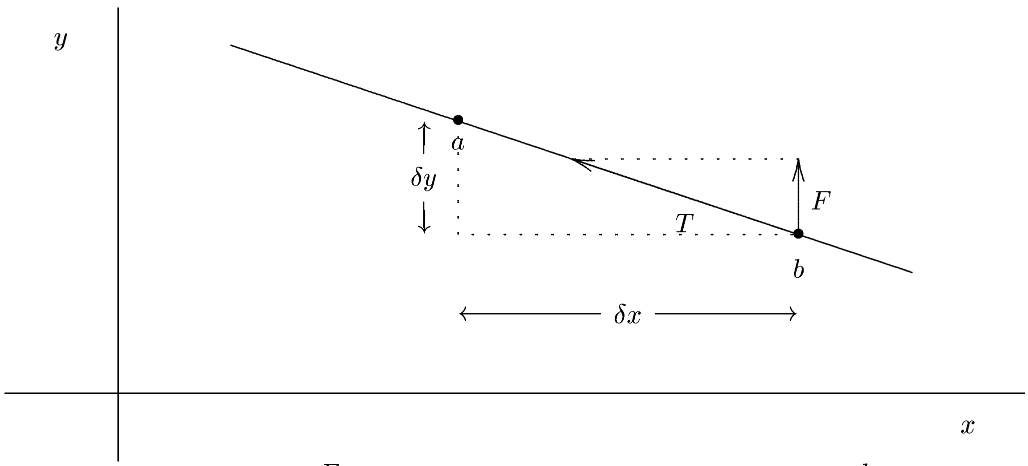

Figure 2.4 Force F exercée par un élément a de la corde sur son voisin b.

La force exercée par a sur b est:

$$F \simeq -T\frac{\delta y}{\delta x} = -T\frac{\partial y}{\partial x}$$

Le signe $-$ vient du fait que quand la dérivée est négative la force exercée par a sur b est positive (vers le haut).

Remarquez que le point a est toujours en avance de phase par rapport au point b. Quand a est en phase montante, b est plus bas que a. À l'inverse, quand a descend il est plus bas que b. En conséquence, a exerce toujours un travail positif ou nul sur b puisque la force qu'il exerce sur b a toujours le même sens que son déplacement.

Quand a se déplace de dy (verticalement) il fait un travail:

$$dW = Fdy = -T\frac{\partial y}{\partial x}dy$$

Mais ce dy est un déplacement vertical (à x constant) dû au mouvement de la corde, donc:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt$$

donc:

$$dW = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}dt$$

On dérive et on remplace:

$$dW = \omega kTA^2 \sin^2(\omega t - kx)dt$$

le travail fourni pendant une période $\frac{2\pi}{\omega}$.

$$W = \omega kTA^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t - kx)dt$$

On laisse au lecteur le soin de prouver que l'intégrale vaut $\frac{\pi}{\omega}$:

$$W = \pi kTA^2$$

Pour calculer la puissance il faut diviser ce travail par le temps nécessaire pour le fournir: $\frac{2\pi}{\omega}$ (une période). La puissance fournie est donc:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}kT\omega A^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega}{v}\mu v^2 \omega A^2$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$$

Ce résultat ne dépend ni du temps ni de la position. Par contre la dépendance avec le carré de la fréquence et le carré de l'amplitude est commune à la majorité des mouvements ondulatoires.

2.2.3 Réflexion et transmission.

Imaginons deux cordes de masse linéique différentes μ_1 et μ_2 attachées à leur extrémité. Comme elles sont attachées en série, la tension T dans les deux cordes sera la même.

Au niveau de la frontière entre les deux cordes, la position en y est la même pour les deux cordes. Donc la fréquence, l'amplitude, la vitesse verticale et l'accélération le seront aussi. Ceci pose un problème. En effet, comme $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ on peut écrire la puissance transmise comme:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu T}\omega^2 A^2$$

Comme μ a des valeurs différentes sur chaque corde et que les autres variables ont la même valeur, on trouverait que la puissance transmise ne serait pas la même dans chaque corde. Ceci serait en contradiction avec la loi de conservation d'énergie, qui est un des piliers sur lequel s'appuient la physique, la chimie et d'autres sciences exactes.

L'explication est que seulement une partie de l'onde incidente (et de sa puissance transportée) est transmise à l'autre corde. Il se crée une onde réfléchie (qui se propage dans le sens opposé) et qui transporte en arrière la puissance qui n'a pas été transmise.

Par la première loi de Newton (action = réaction) nous savons que la force exercée par la corde de gauche sur celle de droite doit être la même que celle exercée par celle de droite sur celle de gauche. Pour les composantes horizontales ceci est évident, car les cordes ne bougent pas horizontalement. Pour les composantes verticales ce n'est pas immédiat car les cordes bougent. Par contre on sait que les composantes verticales sont:

$$F = T\frac{\partial y}{\partial x}$$

Si nous attribuons l'indice 1 au côté gauche et le 2 au côté droit, nous aurons:

$$F_1 = F_2$$

La condition limite sera:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2$$

Pour simplifier les expressions, nous allons choisir le zéro de l'axe des x à la jonction des deux cordes. L'indice 1 correspondra à des $x \leq 0$ et l'indice 2 à des $x \geq 0$.

Nous aurons trois ondes:

L'onde incidente: $y_i = A_i e^{j(\omega t - k_1 x)}$ pour $x \leq 0$.

L'onde réfléchie: $y_r = A_r e^{j(\omega t + k_1 x)}$ pour $x \leq 0$.

L'onde transmise: $y_t = A_t e^{j(\omega t - k_2 x)}$ pour $x \geq 0$.

Avec

$$k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}} = \frac{\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu_1}$$

et

$$k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu_2}$$

Pour $x = 0$

$$y_i + y_r = y_t$$

ce qui donne:

$$A_i + A_r = A_t \tag{2.3}$$

et

$$\left(\frac{\partial(y_i + y_r)}{\partial x}\right)_{x=-0} = \left(\frac{\partial y_t}{\partial x}\right)_{x=+0} \tag{2.4}$$

Effectuons les dérivées pour l'équation 2.4:

$$-\frac{j\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu_1}A_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + \frac{j\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu_1}A_r e^{j(\omega t + k_1 x)} = -\frac{j\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu_2}A_t e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

Pour $x = 0$, et en simplifiant:

$$-\sqrt{\mu_1}A_i + \sqrt{\mu_1}A_r = -\sqrt{\mu_2}A_t$$

et avec la 2.3:

$$A_i + A_r = A_t \tag{2.5}$$

Nous obtenons un système de deux équations et deux inconnues (on considère A_i connue):

$$\begin{gathered} A_t - A_r = A_i \\ \sqrt{\mu_2}A_t + \sqrt{\mu_1}A_r = \sqrt{\mu_1}A_i \end{gathered}$$

La solution est:

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}A_i \\ A_r &= \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}A_i \end{aligned}$$

On définit le **coefficient de réflexion** comme le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie et de l'onde incidente:

$$\textbf{coefficient de réflexion} = \rho = \frac{A_r}{A_i} = \frac{\sqrt{\mu_1}-\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}$$

Dans notre cas le coefficient de réflexion est réel et il peut être positif ou négatif.

On peut constater que si les deux milieux sont identiques, avec $\mu_1 = \mu_2$, on obtient

$$A_r = 0 \qquad \text{et} \qquad A_t = A_i$$

C'est-à-dire qu'il n'y a pas de réflexion et toute l'onde est transmise.

Si la corde de droite devient très légère $\mu_2 \to 0$ on constate que $A_t \to 2A_i$ et que $A_r \to 1$: toute l'onde est réfléchie sans inversion de phase.

Par contre si $\mu_2 \to \infty$, c'est-à-dire la corde de droite est inamovible, ont obtient $A_t \to 0$ mais cette fois $A_r \to -1$: toute l'onde est réfléchie mais avec la phase inversée.

Remarquez que si $\mu_2 < \mu_1$ l'amplitude de l'onde transmise est plus grande que celle de l'onde incidente. La puissance transmise reste évidemment inférieure à la puissance incidente.

Au niveau de la jonction entre les deux cordes, l'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente alors que celle de l'onde réfléchie sera en phase ou en opposition de phase suivant le signe de $\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}$.

Nous avons fait ces calculs pour le régime sinusoïdal. Mais les résultats sont valables pour n'importe quelle forme d'onde, car nous sommes dans un système linéaire.

2.3 Superposition d'ondes.

Nous venons d'écrire que, le système étant linéaire, plusieurs ondes peuvent être présentes sur la corde sans se perturber mutuellement. Le déplacement latéral instantané de la corde à un point donné sera la somme des déplacements produits par chacune des ondes à ce même point et au même instant.

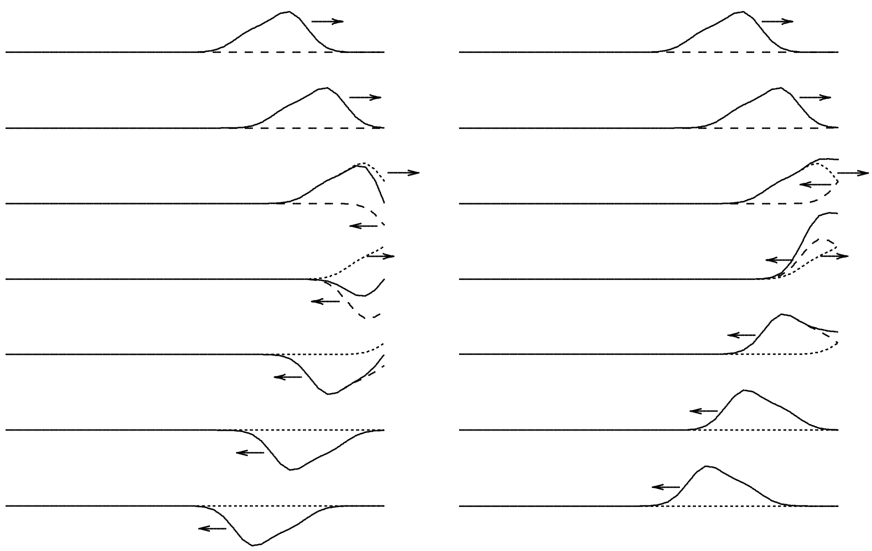

Figure 2.5 Réflexion d'une impulsion à l'extrémité d'une corde. Dans les dessins de gauche l'extrémité droite de la corde est fixe et l'impulsion se réfléchit en changeant de signe (phase inversée). Dans les dessins de droite, l'extrémité droite de la corde est libre (ou attachée à une corde très légère) et l'impulsion se réfléchit avec le même signe (sans inversion de phase). Les courbes en pointillés fins représentent l'impulsion arrivant et les courbes en tirets représentent l'impulsion réfléchie.

Ceci est vrai aussi bien pour des ondes qui se déplacent dans la même direction que pour des ondes qui se déplacent dans des direction opposées. Cette addition instantanée des déplacements reçoit le nom d'**interférence d'ondes**. Quand toutes les ondes qui interfèrent se déplacent dans le même sens et à la même vitesse, la forme résultante se déplace aussi à la même vitesse et ne change pas de forme dans le temps. Par contre si des ondes se déplacent dans des directions opposées, la forme de l'addition évolue dans le temps.

Dans la figure 2.5 nous avons représenté une espèce d'impulsion qui se déplace vers la droite, où se trouve l'extrémité de la corde. Dans la gauche de la figure l'extrémité est attachée à un point fixe (μ_2 très grand). Dans celle de droite l'extrémité de la corde est libre (ou attachée à une autre avec un μ_2 très petit).

Au début, l'ensemble des ondes sinusoïdales (composantes de Fourier) dont la somme a la forme de l'impulsion, se déplace vers la droite et l'impulsion garde sa forme([4]).

Quand l'impulsion arrive à l'extrémité, elle se réfléchit. Dans le cas de gauche en opposition de phase. Comme elle est positive, sa réflexion est négative. Quand seule une partie de l'impulsion s'est déjà réfléchie, ce que l'on voit sur la corde est l'addition de la partie de l'impulsion qui n'est pas encore arrivée à l'extrémité avec la partie que s'est réfléchie en changeant de signe. La forme résultante n'est pas toujours intuitive. Dans la partie de droite de la figure la situation est similaire mais, comme l'extrémité est libre, l'impulsion se réfléchit en phase, sans changer de signe. La valeur crête à l'extrémité atteint le double de la valeur crête de l'impulsion.

2.3.1 Réflexion en régime sinusoïdal. Ondes stationnaires.

Quand des ondes sinusoïdales se réfléchissent à l'extrémité d'une corde ou à sa jonction avec une autre corde de nature différente, on se retrouve avec l'interférence de deux ondes sinusoïdales, une qui avance vers la droite et une autre qui avance vers la gauche.

Examinons d'abord le cas où la réflexion est totale et que la corde est attachée à un point immobile pour $x = 0$ (cela équivaut à $\mu_2 \gg \mu_1$). Si l'onde incidente (vers la droite) est de la forme:

$$y_i = A_i \cos(\omega t - kx)$$

L'onde réfléchie sera de la forme:

$$y_r = -A_i \cos(\omega t + kx)$$

de sorte de $y_i + y_r = 0 \ \forall\, t$ pour $x = 0$.

Il est immédiat que:

$$y_1 = y_i + y_r = A_i \cos(\omega t - kx) - A_i \cos(\omega t + kx) = 2A_i \sin \omega t \sin kx$$

Ce n'est plus une onde qui se déplace. Chaque point de la corde a un mouvement harmonique de pulsation ω et dont l'amplitude $2A_i|\sin kx|$ dépend de la position le long de la corde. On constate que pour $x = 0$ la corde présente un zéro (c'était la condition imposée) et que, comme $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, on trouve des zéros tous les $\frac{\lambda}{2}$ à partir de l'extrémité.

On appelle ce mouvement de la corde, qui n'est pas une onde et qui ne se déplace pas, une **onde stationnaire**.

Si l'extrémité de la corde, en $x = 0$, avait été libre (ou attachée à une autre corde très légère $\mu_2 \ll \mu_1$), la condition limite aurait été différente car cette fois la réflexion se fait en phase et pour $x = 0$, $y_i = y_r$.

Donc:

$$y_i = A_i \cos(\omega t - kx)$$

$$y_r = A_i \cos(\omega t + kx)$$

On déduit:

([4]) La forme a été choisie volontairement tarabiscotée et asymétrique.

$$y_1 = y_i + y_r = A_i \cos(\omega t - kx) + A_i \cos(\omega t + kx) = 2A_i \cos \omega t \cos kx$$

La situation est presque la même que précédemment, sauf que cette fois nous avons un maximum pour $x = 0$. Le premier zéro se trouve à $\frac{\lambda}{4}$ de l'extrémité, et les suivants se trouvent à $\frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$ de l'extrémité.

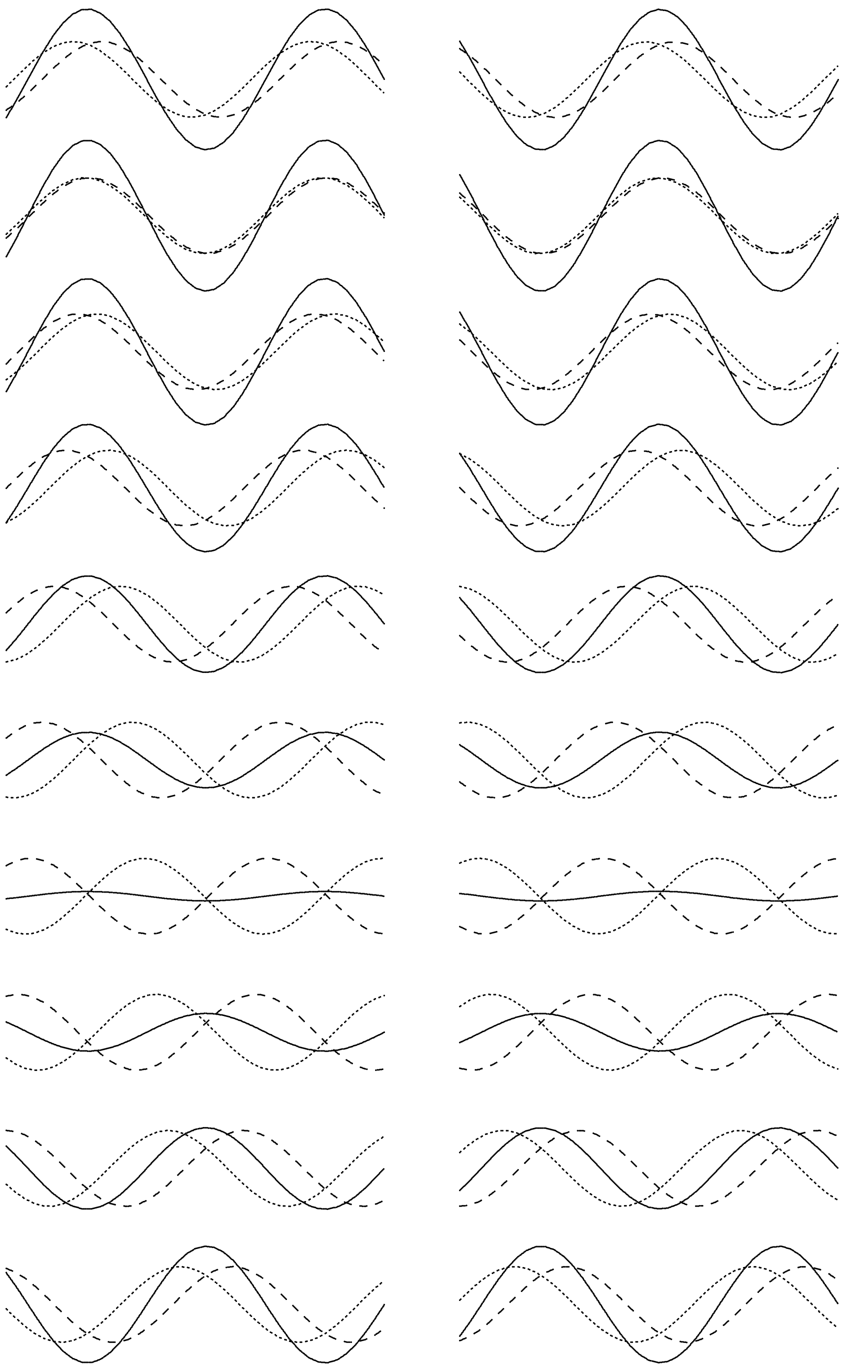

Figure 2.6 Interférence de deux ondes sinusoïdales de même amplitude se déplaçant dans des directions opposées. Les vingt dessins couvrent environ une période. Le premier est celui en haut à gauche, suivent ceux en dessous, puis ceux de droite. Les ondes en pointillés fins avancent vers la droite. Celles en tirets avancent vers la gauche. Les ondes en continu sont la somme des deux. Remarquez que, pour l'onde résultante, la position des zéros ne bouge pas.

Dans le figure 2.6 nous avons dessiné l'onde incidente plus l'onde réfléchie de même amplitude, plus l'onde stationnaire résultante. Dans ce dessin, $x = 0$ est à droite et correspond à un point immobile (réflexion en opposition de phase). L'ensemble des vingt dessins couvre environ une période. Les zéros de l'onde résultante sont espacés de $\frac{\lambda}{2}$. Ces zéros sont appelés aussi **nœuds** ou **points nodaux**. À mi distance entre les points nodaux on trouve des maxima d'amplitude. Ces maxima sont appelés **anti-nœuds** ou **ventres d'amplitude**.

Si, au lieu d'avoir une corde attachée à un point fixe au point $x = 0$, on avait eu une corde avec l'extrémité libre (en réalité, attachée à une autre corde beaucoup plus légère), on aurait imposé un maximum d'amplitude (un ventre) pour $x = 0$, au lieu d'un zéro. Dans ce cas les dessins de le figure 2.7 devraient être décalés de $\frac{\lambda}{4}$ vers la droite.

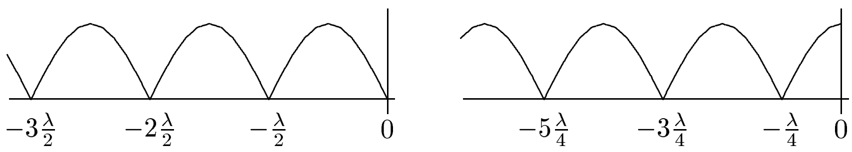

Figure 2.7 Amplitude de l'onde stationnaire dans le cas d'une réflexion totale. L'extrémité de la corde se situe à droite. Dans le dessin de gauche l'extrémité est fixe ($\rho = -1$). Dans le dessin de droite l'extrémité est libre ($\rho = 1$).

Si la réflexion n'est pas totale, c'est-à-dire de $\rho \neq \pm 1$, l'amplitude des maxima sera plus petite que le double de celle de l'onde incidente et l'amplitude des minima sera plus grande que zéro.

Dans la figure 2.8 nous avons représenté le cas où $\rho = -0{,}5$. À gauche nous avons superposé plusieurs instantanés de l'onde résultante (incidente plus réfléchie). L'enveloppe de ces courbes est l'amplitude de l'onde stationnaire obtenue. Comme ρ est négatif la position des maxima et minima est la même que pour le cas $\rho = -1$. Par contre les valeurs sont différentes. Les maxima sont égaux à A_{max} et plus petits que $2A_i$. Et les minima A_{min} sont différents de zéro.

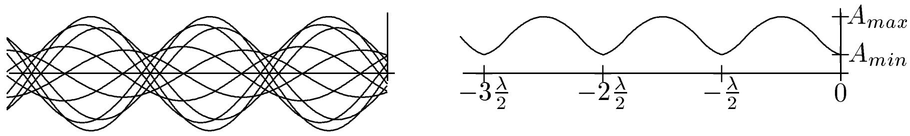

Figure 2.8 Réflexion avec un coefficient $\rho = -0{,}5$. À gauche: superposition de dix images successives espacées d'un dixième de période. À droite: amplitude de l'onde stationnaire (enveloppe des courbes de gauche). Remarquez que la courbe n'est pas une sinusoïde et que les minima sont différents de zéro.

On définit le **taux d'ondes stationnaires** ou **T.O.S.** comme le rapport entre A_{max} et A_{min}

$$\textbf{T.O.S= taux d'ondes stationnaires} = \frac{|A_{max}|}{|A_{min}|}$$

Il est facile de voir que:

$$TOS = \frac{|A_i| + |A_r|}{|A_i| - |A_r|}$$

et aussi que:

$$TOS = \frac{1+ \mid \rho \mid}{1- \mid \rho \mid}$$

2.4 Polarisation.

2.4.1 Polarisation linéaire.

Dans tous les exemples précédents, les perturbations avaient toujours la direction de l'axe y. Il est évident que rien n'aurait changé si nous avions choisi une autre direction perpendiculaire à la corde comme direction des perturbations. Ce type d'ondes transversales dont la perturbation a une seule direction est dite **onde polarisée linéairement** et la **direction de polarisation** est la direction des perturbations. Donc, dans tous nos exemples précédents nous avons utilisé des ondes polarisées linéairement dans la direction y.

2.4.2 Polarisation circulaire.

Quand nous avons déduit l'équation d'onde pour une corde nous avions trouvé que la force de restitution, celle qui tend à ramener la corde vers sa position d'équilibre, avait pour origine la courbure de la corde (exprimée mathématiquement par la deuxième dérivée par rapport à x). Si la courbure se situe dans le plan xy, la force sera contenue aussi dans ce plan. Dans le cas général, la corde peut présenter deux courbures: une dans le plan xy et une autre, indépendante, dans le plan perpendiculaire (mais qui contient toujours la direction de déplacement de l'onde), ici le plan xz. Ces deux courbures sont indépendantes ainsi que les forces qu'elles génèrent. Elles appartiennent donc à deux ondes indépendantes, polarisées linéairement dans des directions perpendiculaires. Ces deux ondes n'ont aucune interaction elles peuvent avoir des formes quelconques ou, s'il s'agit de sinusoïdes, des amplitudes et fréquences quelconques.

Une fois encore: même si ces ondes ont la même fréquence elles sont indépendantes et n'interagissent pas.

Justement, un cas particulier se présente quand les deux ondes sont des sinusoïdes et qui ont la même fréquence.

Si les deux sinusoïdes (à la même fréquence) sont en phase, le cas n'est pas très intéressant. Examinons ce qui arrive. Supposons que, à un endroit donné, la sinusoïde sur le plan xy passe par un maximum en même temps que la sinusoïde sur le plan xz. À un instant la position de la corde à cet endroit sera $y = A_y$ et $z = A_z$ (où A_y et A_z sont les amplitudes en y et z). Un quart de période plus tard les deux sinusoïdes passent par zéro et la position de la corde sera $y = 0$ et $z = 0$. Un quart de période plus tard les positions seront: $y = -A_y$ et $z = -A_z$, un quart plus tard on sera à nouveau à zéro et un quart plus tard nous serons revenus à la situation initiale. Finalement cet endroit de la corde se déplace sinusoïdalement sur un segment de droite qui va de $y = A_y$ et $z = A_z$ à $y = -A_y$ et $z = -A_z$.

Finalement ce que nous venons de trouver est une onde sinusoïdale polarisée linéairement dans le plan qui contient les points $y = A_y$, $z = A_z$ et, évidemment les points $y = 0$, $z = 0$ et $y = -A_y$, $z = -A_z$. L'amplitude sera $\sqrt{A_y^2 + A_z^2}$.

Nous pouvons tirer des conclusions dans le sens inverse: toute onde polarisée linéairement peut être décomposée en deux ondes polarisées linéairement dans deux plans perpendiculaires entre eux (mais qui contiennent la direction de propagation de l'onde).

Comme nous l'avons dit plus haut, ce cas n'est pas le plus intéressant. Le plus intéressant est celui où la deuxième onde est déphasée par rapport à la première. Et le déphasage le plus remarquable est $\pm\frac{\pi}{2}$, avec deux ondes de même amplitude $A_y = A_z = A$. Dans ce cas, quand une des ondes passe par un extrême, l'autre passe par zéro. À un point donné de la corde la position de celle-ci dans le plan yz (le plan perpendiculaire à la direction de l'onde) sera:

$$y = A \sin \omega t$$

$$z = A \cos \omega t$$

La distance de la corde à sa position d'équilibre sera:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + A^2 \cos^2 \omega t} = A$$

c'est-à-dire que chaque point de la corde reste à distance constante de sa situation d'équilibre et décrit des cercles avec une pulsation ω. Comme la phase de chaque point dépend de sa position en x, le résultat sera que la corde prendra la forme d'une hélice qui tourne sur son axe avec une pulsation ω.

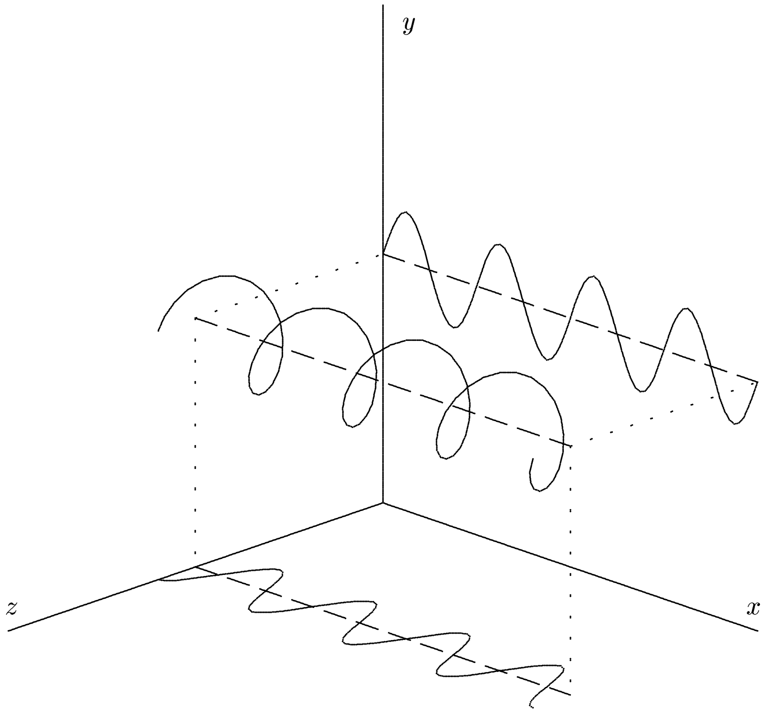

Figure 2.9 Onde polarisée circulairement. La corde prend la forme d'une hélice qui tourne sur elle-même avec la pulsation ω. Les projections de la corde sur les plans xy et xz donnent des ondes sinusoïdales déphasées de $\frac{\pi}{2}$. Si l'onde se déplace dans le sens des x croissants, l'hélice tourne à droite (dans le sens négatif). Il s'agit d'une onde polarisée circulairement à droite.

La polarisation circulaire est très importante dans la communication par des ondes radio. Les émissions vers les téléphones cellulaires, celles des satellites de télévision, ainsi que celles du GPS sont polarisées circulairement.

Si le déphasage n'est pas exactement de $\frac{\pi}{2}$ ou si les amplitudes des deux composantes n'est pas identique, alors la corde ne décrira pas exactement des cercles mais des cercles allongés (ou aplatis). Comme un cercle allongé n'est autre chose qu'une ellipse, l'onde sera une **onde polarisée elliptiquement**.

2.5 Atténuation. Pertes.

Dans la réalité, une onde qui se propage le long d'une corde réelle ne conserve pas son amplitude constante. Une partie de l'énergie transmise se transforme en chaleur à cause des frottements internes de la corde, de la résistance de l'air et même, parfois, par l'émission des ondes sonores dans l'air. Toutes ces causes font que l'amplitude décroît avec la distance et que, généralement, cette décroissance est exponentielle. Une onde dans une corde subit une **atténuation** due aux **pertes** d'énergie.

On peut tenir compte de cette décroissance en rajoutant une exponentielle qui décroît à mesure que l'onde avance. En régime sinusoïdal nous écrirons:

$$y = Ae^{-ax}\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Le facteur a reçoit le nom de **coefficient d'atténuation**. Si on utilise le formalisme des impédances:

$$y = Ae^{-ax}e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$$

Dans certains cas on peut même pousser le bouchon un peu plus loin et inclure le a dans le k

$$y = Ae^{j(\omega t - k'x + \varphi)}$$

avec

$$k' = k - ja$$

Ceci a l'intérêt de raccourcir l'écriture mais au prix de phrases du genre "nombre d'onde complexe". Ceci pourrait faire croire à des non initiés que ω, v, λ ou 2π auraient des composantes imaginaires ($k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$). Comme nous l'avons écrit plus haut, le formalisme des impédances est réservé aux adultes.

2.6 Exercices.

1 - Une corde d'un instrument de musique a une longueur de $70\,cm$. Si sa masse par unité de longueur est de 4,7 $10^{-4}kg/m$. Calculez la tension qu'il faut lui donner pour que les ondes parcourent la longueur de la corde dans une demi-période pour une fréquence de 440 Hz. *Cette condition correspond au mode d'oscillation décrit dans la question suivante.*
R.N.:178,34N

2 - Une corde de guitare de longueur L oscille avec une amplitude qui va de zéro pour une extrémité ($x = 0$) à zéro pour l'autre extrémité ($x = L$) en passant par un maximum au milieu ($x = L/2$). Cette amplitude a la forme:

$$A = A_\circ \sin\frac{\pi x}{L}$$

La corde oscille avec une pulsation ω et toute la corde est en phase. La position y d'un point de la corde situé à une distance x de l'origine est:

$$y = A_\circ \sin\frac{\pi x}{L}\cos\omega t$$

Si la masse par unité de longueur de la corde vaut μ, calculez l'énergie totale de la corde, due à l'oscillation. Avec ce résultat expliquez pourquoi les cordes de son grave d'un instrument à cordes sont plus épaisses que celle de son aigu (on aurait pu utiliser des cordes de même densité plus ou moins tendues). Calculez l'énergie d'une corde avec les données numériques de l'exercice précédent et $A_\circ = 5mm$.
R.N.:1,571 $10^{-2}J$

3 - Quand on augmente la tension sur un fil, il finit par casser. La tension que le fil peut supporter avant de casser est proportionnelle à la section du fil et à un coefficient appelé *résistance à la rupture* ou *charge de rupture*. Pour l'acier ce coefficient vaut environ 1,3 GPa. Montrez que la vitesse maximum des ondes que l'on peut obtenir en augmentant la tension d'un fil (avant qu'il casse), ne dépend pas de la section du fil. Calculez cette vitesse pour

l'acier (la densité de l'acier est de $7860 kg/m^3$).
R.N.:406,69m/s

4 - Calculez la vitesse maximum des ondes que l'on peut obtenir en augmentant la tension d'un fil (avant qu'il casse), en utilisant du Kevlar dont la densité est $1440 kg/m^3$ et la charge de rupture est de 3,6 GPa.
R.N.:1581m/s

5 - Sur une extrémité d'une corde dont la masse par unité de longueur μ_1 est de 0,5$g/mètre$ on envoie une onde avec fréquence de 440 Hz et une amplitude de $A_1 = 5\,mm$. À l'autre extrémité, la corde est reliée à une autre pour laquelle $\mu_2 = 1\,g/mètre$. Les deux cordes sont soumises à une tension de 10 $Newtons$. Calculez l'amplitude de l'onde transmise à la deuxième corde et l'amplitude de l'onde réfléchie. Calculez les puissances incidente, transmise et réfléchie. Vérifiez que vos résultats sont en accord avec le principe de conservation de l'énergie. Calculez le coefficient de réflexion et le taux d'ondes stationnaires (TOS).
R.N.:$A_t =$ 4,14mm $A_r = -$0,8578mm $P_i =$ 6,76 W $TOS =$ 1,414, etc.

6 - Même problème que le précèdent, mais les deux cordes sont permutées: $\mu_1 = 1\,g/mètre$ et μ_2 est de 0,5$g/mètre$. Comparez les valeurs numériques.
R.N.:$A_t =$ 5,85mm $A_r =$ 0,858mm, etc.