3. LIGNE DE TRANSMISSION ÉLECTRIQUE.

3.1 Types de lignes.

Une ligne de transmission électrique n'est autre chose que deux conducteurs utilisés pour transmettre un signal ou de la puissance. On réserve le nom de ligne de transmission à des paires de conducteurs dont la géométrie est la même tout le long de la ligne. Les lignes les plus courantes sont les lignes coaxiales, les lignes bifilaires, les "striplines" et les"microstrips" (ou lignes à ruban).

Les lignes bifilaires sont formées par deux fils parallèles maintenus à distance constante par un isolant.

Les microstrips sont des lignes utilisées dans les circuits imprimés, formées par un ruban de conducteur d'un côté du circuit imprimé et un plan de masse de l'autre côté.

On fabrique des striplines dans des circuits multicouches, le ruban conducteur est pris en sandwich entre deux plans de masse (mais isolé!).

Dans les lignes coaxiales, les deux conducteurs sont des cylindres coaxiaux maintenus par un isolant et généralement protégés extérieurement par une couche d'isolant. Dans les câbles souples, le cylindre extérieur est remplacé par une tresse de brins de cuivre plus ou moins nombreux.

La perturbation est transmise par la ligne sous la forme de champs électrique et magnétique perpendiculaires aux conducteurs. L'onde est donc une onde transversale.

Dans les lignes coaxiales, le champ électrique est radial, c'est à dire que les lignes du champ vont du conducteur central vers le conducteur extérieur suivant les rayons du cylindre. Pour un signal alternatif la direction du champ s'inverse à la même fréquence. Les lignes du champ magnétique forment des cercles concentriques (coaxiaux) avec le conducteur central. Dans un câble coaxial de bonne qualité, on ne trouve des champs électrique et magnétique qu'entre le conducteur central (l'âme) et le conducteur externe (le blindage).

Pour une ligne bifilaire, les lignes des champs électrique et magnétique sont toujours contenues dans des plans perpendiculaires aux conducteurs et leur forme est similaire à celle des lignes de force et des équipotentielles d'un dipôle électrique.

Pour une stripline, entre le ruban et le plan de masse, le champ électrique est, grossièrement, perpendiculaire aux deux, et le champ magnétique est parallèle aux plans et perpendiculaire au sens de propagation. Par contre dès que l'on se rapproche des bords du ruban, les lignes de champ électrique se courbent, ainsi que celles du champ magnétique. Leur forme est difficile à décrire et encore plus à calculer. Néanmoins, les lignes de force des deux champs restent contenues dans des plans perpendiculaires au sens de propagation.

Indépendamment du type de ligne, toutes les paires de conducteurs présentent une capacité par unité de longueur, ainsi qu'une inductance par unité de longueur([1]). Ces valeurs dépendent de la géométrie de la ligne et des caractéristiques électriques et magnétiques des isolants. En connaissant ces valeurs et la géométrie, on peut, dans certains cas, calculer l'inductance et la

([1]) Pour mesurer la capacité par unité de longueur il faut mesurer la capacité entre les deux conducteurs d'un morceau de ligne (avec l'extrémité opposé en circuit ouvert), puis diviser la capacité mesurée par la longueur. Pour mesurer l'inductance par unité de longueur, on court-circuite une extrémité et on mesure l'inductance entre les deux fils à l'autre extrémité, puis on divise par la longueur. La longueur du morceau de ligne utilisée doit être très petite devant la longueur d'onde du signal utilisé pour faire la mesure.

capacité par unité de longueur. Ces calculs rentrent dans le cadre de l'électrostatique et de la magnétostatique. Nous ne les ferons pas ici ([2]).

3.2 Équation d'onde.

Pour calculer l'équation d'onde dans une ligne nous allons commencer par supposer qu'elle est formée par une suite de petites inductances en série et de petits condensateurs en parallèle. Si l'inductance par unité de longueur vaut $\frac{L}{\ell}$ chaque petite inductance vaudra $\frac{L}{\ell}\delta x$. De même, si la capacité par unité de longueur vaut $\frac{C}{\ell}$, chaque capacité vaudra $\frac{C}{\ell}\delta x$.

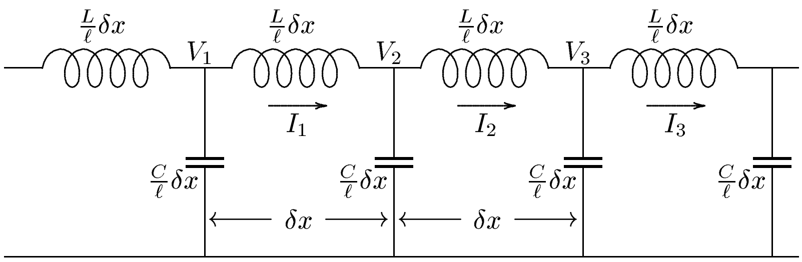

Figure 3.1 Ligne de transmission en éléments discrets.

La définition mathématique d'une inductance est:

$$V = L\frac{dI}{dt}$$

et celle d'une capacité est:

$$I = C\frac{dV}{dt}$$

Pour la ligne de la figure 3.1 on peut écrire:

$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= -\frac{L}{\ell}\delta x\frac{dI_1}{dt} \\ V_3 - V_2 &= -\frac{L}{\ell}\delta x\frac{dI_2}{dt} \\ I_1 - I_2 &= \frac{C}{\ell}\delta x\frac{dV_2}{dt} \end{aligned}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième:

$$V_3 - V_2 - (V_2 - V_1) = \frac{L}{\ell}\delta x\frac{d(I_1 - I_2)}{dt} = \frac{L}{\ell}\delta x\frac{C}{\ell}\delta x\frac{d^2V_2}{dt^2} = \frac{L}{\ell}\delta x\frac{C}{\ell}\delta x\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)_2$$

Si on divise les deux côtés par $(\delta x)^2$ on peut écrire:

$$\frac{\frac{V_3-V_2}{\delta x} - \frac{V_2-V_1}{\delta x}}{\delta x} = \frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)_2$$

([2]) Pour une ligne coaxiale dont les rayons de l'âme du blindage sont R_1 et R_2 et dont l'isolant a une constante diélectrique ε_r et une perméabilité magnétique μ l'inductance par unité de longueur est $\frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$. La capacité par unité de longueur est $\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$.

mais le terme de gauche n'est autre chose que la dérivée partielle seconde de V par rapport à x deux fois évaluée au point 2:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_2 = \frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)_2$$

et ce qui est vrai pour le point 2 l'est aussi pour n'importe quelle position:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

Ceci est l'équation d'onde pour la tension le long d'une ligne de transmission électrique. Elle est identique à celle trouvée pour une corde (équation 2.1). La seule différence est que cette fois la vitesse de propagation sera:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}}}$$

Nous avons calculé l'équation d'onde pour la tension. Maintenant nous allons calculer la même chose mais pour le courant.

$$I_2 - I_1 = -\frac{C}{\ell}\delta x\frac{dV_2}{dt}$$
$$I_3 - I_2 = -\frac{C}{\ell}\delta x\frac{dV_3}{dt}$$
$$V_3 - V_2 = -\frac{L}{\ell}\delta x\frac{dI_2}{dt}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième:

$$I_3 - I_2 - (I_2 - I_1) = -\frac{C}{\ell}\delta x\frac{d(V_3 - V_2)}{dt} = \frac{L}{\ell}\delta x\frac{C}{\ell}\delta x\frac{d^2 I_2}{dt^2} = \frac{L}{\ell}\delta x\frac{C}{\ell}\delta x\left(\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\right)_2$$

Si on divise les deux côtés par $(\delta x)^2$ on peut écrire:

$$\frac{\frac{I_3 - I_2}{\delta x} - \frac{I_2 - I_1}{\delta x}}{\delta x} = \frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\right)_2$$

mais le terme de gauche n'est autre chose que la dérivée partielle seconde de V par rapport à x deux fois évaluée au point 2:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\right)_2 = \frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\right)_2$$

et ce qui est vrai pour le point 2 l'est aussi pour n'importe quelle position:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{3.2}$$

Le courant dans la ligne obéit à la même équation d'onde que la tension et, évidemment, se propage à la même vitesse. Le courant et la tension sont, bien sûr, interdépendants. Pour calculer cette dépendance, reprenons:

$$I_2 - I_1 = -\frac{C}{\ell}\delta x\frac{dV_2}{dt}$$

Divisant par δx

$$\frac{I_2 - I_1}{\delta x} = -\frac{C}{\ell}\frac{dV_2}{dt}$$

en passant à la limite, le terme de gauche nous donne la dérivée partielle de I par rapport à x évaluée au point 2 (ou 1) et le terme de droite est la dérivée partielle de V évaluée au point 2. Comme le point 2 est un point quelconque le résultat est valable pour n'importe quel point:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{C}{\ell}\frac{\partial V}{\partial t}$$

Nous pouvons faire de même en commençant par la dérivée temporelle de I:

$$V_3 - V_2 = -\frac{L}{\ell}\delta x\frac{dI_2}{dt}$$
$$\frac{V_3 - V_2}{\delta x} = -\frac{L}{\ell}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_2$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L}{\ell}\frac{\partial I}{\partial t}$$

3.3 Régime sinusoïdal. Impédance caractéristique.

En régime sinusoïdal on peut écrire, pour la tension V le long de la ligne:

$$V = V_o e^{j(\omega t - kx)}$$

Où, comme d'habitude, $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$. Le courant I aura une forme similaire:

$$I = I_o e^{j(\omega t - kx)}$$

dérivons I par rapport à x et V par rapport au temps et remplaçons ces dérivées dans l'équation:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{C}{\ell}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -jkI_o e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = j\omega V_o e^{j(\omega t - kx)}$$

$$-jkI_o e^{j(\omega t - kx)} = -\frac{C}{\ell} j\omega V_o e^{j(\omega t - kx)}$$

on peut diviser par $-je^{j(\omega t - kx)}$ et remplacer k par $\frac{\omega}{v}$:

$$\frac{\omega}{v} I_o = \frac{C}{\ell}\omega V_o$$

finalement, en remplaçant v par $\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{\ell}\frac{C}{\ell}}}$ on obtient:

$$\frac{V_o}{I_o} = \sqrt{\frac{\frac{L}{\ell}}{\frac{C}{\ell}}}$$

Ce résultat a été obtenu en travaillant en régime sinusoïdal mais, comme le résultat ne dépend pas de ω et que nous sommes toujours dans un système linéaire, il est valable pour une somme de sinusoïdes et pour le développement en série de Fourier de n'importe quelle fonction. Ce résultat est donc valable non seulement pour des sinusoïdes mais pour n'importe quel type de forme d'onde. Le courant et la tension ont exactement la même forme et sont "en phase".

Ce rapport a les dimensions d'une résistance et se mesure en ohms. Il reçoit le nom d'**Impédance caractéristique.**

$$\textbf{Impédance caractéristique} = Z_o = \sqrt{\frac{\frac{L}{\ell}}{\frac{C}{\ell}}}$$

C'est la valeur que vous obtiendriez avec n'importe quel appareil (depuis un analyseur de réseaux jusqu'au testeur à 10 €) en mesurant la résistance entre les deux conducteurs de l'extrémité d'une ligne très longue ou semi-infinie. D'autre part, cela veut aussi dire que l'on voit une ligne semi-infinie comme une résistance de valeur Z_o.

Pour certaines expériences, comme celle de la mesure que nous venons de mentionner, on peut remplacer le dernier nombre infini de mètres de ligne (à 2 € le mètre cela fait cher) par une résistance Z_o. On appelle ce remplacement **"terminer"** une ligne.

Pour ce type de lignes l'impédance caractéristique est toujours réelle (résistive pure). Ce n'est pas le cas pour les lignes réelles ou pour les lignes constituées par les éléments discrets pour lesquelles l'impédance caractéristique est en partie résistive et en partie réactive.

Nous avons trouvé que

$$\frac{V_o}{I_o} = Z_o \qquad \text{pour} \quad V = V_o e^{j(\omega t - kx)}$$

pour des ondes se propageant vers la droite (dans le sens des x croissants). Si nous avions fait le calcul pour des ondes se propageant vers la gauche (sens des x décroissants) nous aurions trouvé que:

$$\frac{V_o}{I_o} = -Z_o \qquad \text{pour} \quad V = V_o e^{j(\omega t + kx)}$$

Physiquement cela provient du fait que, pour une valeur instantanée positive de la tension, le courant circule vers la droite dans une onde qui se propage vers la droite, et le même courant circule vers la gauche dans une onde qui se propage vers la gauche. Mathématiquement, cela provient du signe devant le k dans l'exposant.

3.4 Puissance transportée.

Maintenant que nous savons que l'on voit une ligne comme une résistance Z_o on peut poser immédiatement la puissance transportée:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\frac{V_o^2}{Z_o} = \frac{1}{2}Z_o I_o^2$$

3.5 Réflexion. Ondes stationnaires.

Soit un morceau de ligne d'impédance caractéristique Z_o. L'extrémité éloignée de cette ligne est connectée à une autre ligne d'impédance caractéristique Z_L ou simplement à une charge Z_L. Nous aurons une onde transmise à la charge plus une onde réfléchie.

Soient V_i, V_t et V_r les amplitudes des ondes incidente, transmise et réfléchie.

À la frontière entre les deux lignes les lois de mailles doivent être satisfaites. Pour cela il faut que les tensions de chaque côté du nœud soient égales:

$$V_i + V_r = V_t$$

ainsi que les courants:

$$\frac{V_i}{Z_o} + \frac{V_r}{-Z_o} = \frac{V_t}{Z_L}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{aligned} V_t - V_r &= V_i \\ \frac{V_t}{Z_L} + \frac{V_r}{Z_o} &= \frac{V_i}{Z_o} \end{aligned}$$

dont la solution est:

$$\begin{aligned} \frac{V_t}{V_i} &= \frac{2Z_L}{Z_L + Z_o} \\ \frac{V_r}{V_i} &= \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \end{aligned}$$

$\frac{V_r}{V_i}$ n'est autre chose que le coefficient de réflexion ρ. On le trouve exprimé souvent sous la forme:

$$\rho = \frac{\frac{Z_L}{Z_o} - 1}{\frac{Z_L}{Z_o} + 1} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$$

où $z_L = Z_L/Z_o$ est l'**impédance réduite** (nombre sans dimensions). Le taux d'ondes stationnaires est, comme pour le cas d'une corde:

$$TOS = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

Trois cas particuliers méritent un commentaire: la ligne adaptée ($Z_L = Z_o$), la ligne ouverte ($Z_L = \infty$) et la ligne en court-circuit ($Z_L = 0$).

On appelle **ligne adaptée** une ligne terminée par une impédance égale à son impédance caractéristique ($Z_L = Z_o$). Dans ce cas $\rho = 0$, il n'y a pas de réflexion et toute la puissance passe dans la charge. Vue de l'autre extrémité, la ligne se comporte comme une ligne infinie.

Dans le cas de la ligne terminée par une impédance infinie (circuit ouvert), le coefficient de réflexion ρ est égal à 1 et le signal (en tension) réfléchi est en phase et a la même amplitude.

Comme $V_r/I_r = -Z_o$, la somme des courants incident et réfléchi instantanés sera toujours égale à zéro (ce qui satisfait la loi des mailles). Le résultat est que l'onde stationnaire présente un zéro de courant à l'extrémité ouverte de la ligne, un zéro de courant et un maximum de tension.

Dans le cas de la ligne fermée par un court-circuit, l'onde réfléchie est en opposition de phase (pour avoir un zéro imposé par le court-circuit). Comme les tensions sont en opposition de phase et que $V_r/I_r = -Z_o$, les courants incident et réfléchi instantanés seront en phase: à l'instant où I_i passe par un maximum, I_r passe aussi par un maximum.

L'onde stationnaire présente donc, un zéro de tension et un maximum de courant pour l'extrémité en court-circuit.

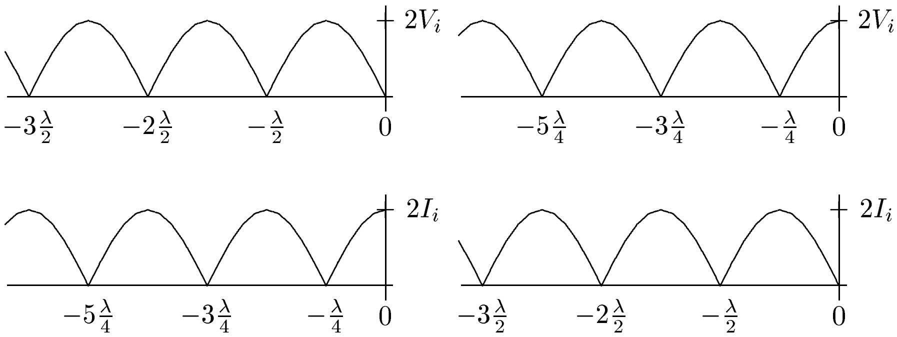

Figure 3.2 Amplitude des ondes stationnaires. Les courbes en haut correspondent à la tension et celles d'en bas au courant. À gauche la ligne est fermée par un court-circuit ($\rho = -1$). À droite la ligne est terminée en circuit ouvert ($\rho = 1$).

3.6 Exercices.

1 - Calculez le rapport entre la puissance réfléchie et la puissance incidente dans une liaison entre une ligne de $50\,\Omega$ et une autre de $75\,\Omega$. Calculez le rapport entre la puissance transmise et la puissance incidente. Convertissez ce rapport en dB et vous aurez les "**pertes d'insertion**".
R.N.: 0,04; 0,96; 0,177 dB

2 - Un câble coaxial pour antennes de télévision, a les dimensions suivantes: diamètre de l'âme: 0,86 mm, diamètre interne du blindage: 4,6 mm, constante diélectrique (ou permitivité relative) ε_r de l'isolant: 1,8. Calculez la capacité par unité de longueur et l'inductance par unité de longueur en utilisant les formules suivantes:

$$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \qquad \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

où $\varepsilon_o = 8{,}85\,10^{-12}$ et $\mu = 4\pi\,10^{-7}$.
Calculez l'impédance du câble ainsi que la vitesse de propagation des ondes dans celui-ci.
R.N.: 59,69 pF/m; 0,335 $\mu H/m$; 75Ω; $v = 2{,}23\,10^8 m/s$

3 - Dans un catalogue on trouve les caractéristiques suivantes pour un autre câble coaxial: diamètre du conducteur interne: 1,02 mm, diamètre interne de la gaine: 4,6 mm, capacité: 55 pF/m. Diélectrique: polyéthylène. Calculez la constante diélectrique de ce polyéthylène. Calculez l'inductance par unité du longueur. Vérifiez que l'impédance correspond à celle donnée dans le catalogue: $75\,\Omega$. Les pertes annoncées dans le catalogue sont de 15 dB pour 100 m à 500 MHz. Calculez le nombre d'onde k pour cette fréquence et la longueur d'onde

dans le câble. Exprimez un signal de $1\,mW$ (pour $x = 0$) qui se propage sur ce câble sous la forme des équations de la page 2-15 du fascicule:

$$V = V_\circ e^{-ax} e^{j(\omega t - kx)}$$

$$V = V_\circ e^{j(\omega t - k' x)}$$

en calculant les valeurs numériques de toutes les variables.
R.N.: $\varepsilon_r = 1{,}49$; $k = 12{,}8$; $\lambda = 0{,}491\,m$; $V_\circ = 0{,}384\,V$; $0{,}01727$; $k' = 12{,}8 - 0{,}01727j$