4. ONDES TRANSVERSALES.

Les ondes sonores transversales ou **ondes S** ([1]) ne se produisent que dans les solides. Les couches successives du milieu se déplacent latéralement sans qu'il y ait de changements de volume, de densité ou de pression.

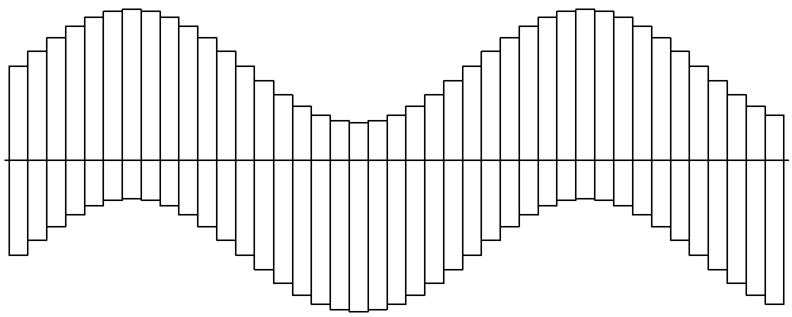


Figure 4.1 Dans une onde transversale les couches du milieu se déplacent latéralement.

Le milieu se déforme de la même manière que vous pouvez déformer un livre ou une rame de papier posés à plat en poussant le haut horizontalement. Ni le livre ni la rame ne changent de volume.

4.1 Module de rigidité.

Dans un solide ce qui s'oppose à ce type de déformation est sa *rigidité.* Un morceau de bois est plus rigide qu'un morceau de caoutchouc, lequel est plus rigide qu'un morceau de gelée ou de crème caramel. Cette rigidité est mesurée par le module de rigidité ou module de cisaillement. Voici la définition.

Soit un bloc parallélépipédique de largeur a, de hauteur b et de profondeur c. Sur la surface supérieure (de surface ac) on applique une force F tangentielle vers la droite.

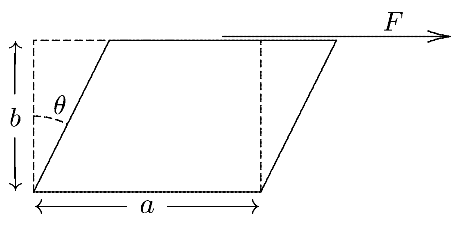


Figure 4.2 Le bloc s'incline vers la droite sous l'effet de la contrainte $\frac{F}{ac}$.

La contrainte qui déforme le parallélépipède est $\frac{F}{S}$ où $S = ac$ est la surface de la face supérieure ([2]). Pour des angles de déformation θ petits, le module de rigidité est défini comme:

([1]) Les ondes transversales reçoivent le nom d'**ondes S** pour “shear waves” (ondes de cisaillement) de même que les ondes longitudinales reçoivent le nom d'**ondes P** pour “pressure waves”. Dans certains textes français on prétend que “P” est pour “primaires” et “S” pour “secondaires”. C'est ridicule.

([2]) Remarquez que, bien que ce soit une force divisée par une surface, il ne s'agit pas d'une pression car la force est parallèle à la surface. Dans le cas d'une pression la force est perpendiculaire à la surface.

$$\textbf{Module de rigidité} = G = \frac{\frac{F}{S}}{\theta}$$

Le module de rigidité est relié au module de Young Y et au coefficient de Poisson σ par la relation:

$$G = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

Comme G, le module de Young et le coefficient de Poisson sont des propriétés de chaque matériau. Nous reviendrons sur les modules de Young et de Poisson dans le paragraphe 5.5.

4.2 Équation d'onde.

L'obtention de l'équation d'onde pour des ondes transversales est presque la même que pour une corde. Prenons trois minces couches planes contiguës du milieu. Les centres des couches se situent en x_a, x_b et x_c avec $x_c - x_b = x_b - x_a = \delta x$. Le déplacement transversal des trois couches est y_a, y_b et y_c. L'angle de déformation entre la couche b et la couche a est:

$$\theta_1 \simeq \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_b - y_a}{\delta x}$$

de même l'angle de déformation entre la couche c et la couche b est:

$$\theta_2 \simeq \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} = \frac{y_c - y_b}{\delta x}$$

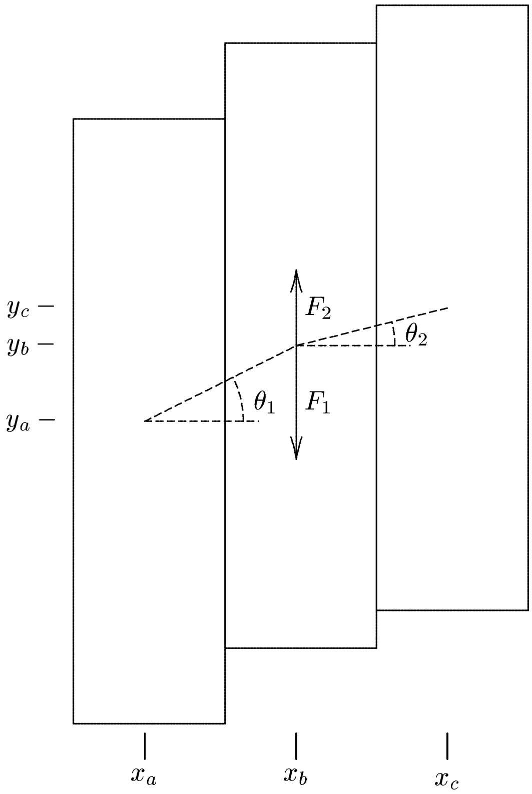


Figure 4.3 Onde transversale. Les forces de cisaillement qui tendent à ramener les couches vers leur position d'équilibre sont proportionnelles aux angles de déformation θ.

Si nous calculons les forces entre les couches pour un morceau de couche de surface S nous obtenons:

$$\frac{F_1}{S} = -G\frac{y_b - y_a}{\delta x} \qquad 4.1$$

$$\frac{F_2}{S} = G\frac{y_c - y_b}{\delta x} \qquad 4.2$$

où G est le module de rigidité du milieu. Notez que le signe $-$ vient du fait que nous avons dessiné la force F_1 vers la bas dans la figure 4.3.

La résultante des forces sera:

$$F_b = F_1 + F_2 = SG\left(\frac{y_c - y_b}{\delta x} - \frac{y_b - y_a}{\delta x}\right)$$

La force F_b sera égale au produit de la masse du morceau de couche b, d'épaisseur δx, surface S et densité ρ, multipliée par l'accélération de la couche $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_b$:

$$F_b = \rho S \delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_b = SG\left(\frac{y_c - y_b}{\delta x} - \frac{y_b - y_a}{\delta x}\right)$$

en divisant les deux membres par $\rho S \delta x$:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_b = \frac{G}{\rho}\frac{\frac{y_c - y_b}{\delta x} - \frac{y_b - y_a}{\delta x}}{\delta x} = \frac{G}{\rho}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_b$$

ce que nous venons de déduire pour une valeur quelconque x_b, est aussi vrai pour n'importe quelle coordonnée:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

et la vitesse de propagation des ondes transversales est:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (4.3)$$

Les ondes sonores transversales ne se propagent que dans les solides et de ce fait nous ne pouvons pas les entendre à moins de les transformer en ondes longitudinales par des moyens mécaniques ou électriques. Les ondes transversales peuvent se transmettre le long d'une barre ou d'une tige quelconque ou même d'un fil métallique, et ceci sans besoin que ce dernier soit sous tension. Même si ce fil métallique est sous tension, la vitesse des ondes de cisaillement ne dépend pas de la tension.

Dans une guitare on peut installer des cordes en boyau (guitare classique) ou des cordes métalliques (guitare moderne) Les ondes de cisaillement se transmettent très bien le long d'un fil en acier mais s'atténuent très vite le long d'un fil en boyau. Dans la guitare classique seules les ondes de tension (chapitre 2) subsistent. Par contre dans une guitare moderne les deux ondes coexistent et, comme les hautes fréquences se transmettent très bien dans les ondes de cisaillement, cela donne à la guitare moderne ce son métallique caractéristique.

Un autre cas remarquable des ondes de cisaillement est celui des ondes séismiques. On trouve des ondes séismiques de cisaillement (ondes S) et aussi des ondes longitudinales ou de pression (ondes P). Les ondes de cisaillement se propagent dans la croûte terrestre à $3600\,m/s$ et les ondes de pression à $6000\,m/s$. Lors d'un séisme ou d'une explosion atomique, les deux types d'onde seront produits mais comme les ondes se propagent à des vitesses différentes, elles n'arriveront pas en même temps à des stations de détection lointaines. C'est à partir de cette différence des temps d'arrivée que l'on détermine la distance à l'épicentre. La direction est obtenue à partir de la direction des oscillations. Seules les stations suffisamment éloignées pour recevoir les deux types d'onde séparément peuvent faire la détermination de l'épicentre.

Les ondes sonores transversales sont polarisées. Leur direction de polarisation est la direction de déplacement latéral (dans notre calcul c'était la direction y).

Modules élastiques				
	Young	Rigidité	Élasticité volumique	Poisson
Matériau	Y	G	K	σ
Aluminium	$70\,10^9 N/m^2$	$25\,10^9 N/m^2$	$70\,10^9 N/m^2$	0,34
Cuivre	$123\,10^9 N/m^2$	$45\,10^9 N/m^2$	$131\,10^9 N/m^2$	0,34
Or	$80\,10^9 N/m^2$	$28\,10^9 N/m^2$	$166\,10^9 N/m^2$	0,42
Plomb	$15\,10^9 N/m^2$	$5{,}4\,10^9 N/m^2$	$50\,10^9 N/m^2$	0,45
Acier	$206\,10^9 N/m^2$	$89\,10^9 N/m^2$	$181\,10^9 N/m^2$	0,33
Verre	$70\,10^9 N/m^2$	$30\,10^9 N/m^2$	$50\,10^9 N/m^2$	0,25
Quartz	$310\,10^9 N/m^2$	$30\,10^9 N/m^2$		0,37
Caoutchouc	$3{,}4\,10^9 N/m^2$	$1{,}2\,10^9 N/m^2$	$5{,}7\,10^9 N/m^2$	0,4
Polystyrène	$3{,}8\,10^9 N/m^2$	$1\,10^9 N/m^2$	$4{,}7\,10^9 N/m^2$	0,4
Polyéthylène	$0{,}14\,10^9 N/m^2$	$0{,}05\,10^9 N/m^2$	$0{,}35\,10^9 N/m^2$	0,4

Figure 4.4 Coefficients élastiques de quelques solides. Ce ne sont que des valeurs typiques. La valeur exacte de chaque échantillon dépend de sa température et surtout de son histoire mécanique et thermique (écrouissage, recuit, trempage, etc.).

4.3 Puissance transportée.

Pour calculer la puissance transportée par une onde transversale, nous suivrons une démarche très proche de celle utilisée pour calculer la puissance transportée dans une corde. Cette fois la puissance transportée sera proportionnelle à la surface du front d'onde et nous calculerons donc la puissance transportée par unité de surface de l'onde.

Chaque couche de matériau du milieu qui, en se déplaçant, entraîne la couche suivante, le fait en effectuant un travail contre la force due à la déformation du milieu. Ce travail est toujours positif ou nul car la couche doit exercer une force qui a la même direction que son déplacement.

On avait vu (équation 4.1) que la force verticale (positive vers les y croissants) était, pour une couche de surface S:

$$F = -SG\frac{\partial y}{\partial x}$$

Ceci est la force exercée par une couche sur la couche suivante. Elle est positive (dirigée vers le haut) quand la couche suivante est située plus bas et que la dérivée de y est négative.

Quand la couche se déplace de dy, elle exerce un travail de:

$$dW = Fdy$$

Ce déplacement dy est un déplacement vertical et est dû aux variations de y dans le temps:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt$$

Si nous sommes en régime sinusoïdal nous pouvons exprimer y comme:

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

dans ce cas:

$$F = -SG(-k)A\cos(\omega t - kx)$$

et

$$dy = \omega A \cos(\omega t - kx)\, dt$$

d'où:

$$dW = SGk\omega A^2 \cos^2(\omega t - kx)\, dt$$

Pour calculer le travail exercé pendant une période il faudra intégrer de $t = 0$ à $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$W = SGk\omega A^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - kx)\, dt$$

On laisse au lecteur le soin de prouver que l'intégrale vaut $\frac{\pi}{\omega}$:

$$W = SGk\omega A^2 \frac{\pi}{\omega}$$

Pour calculer la puissance transportée par unité de surface il faut diviser le travail calculé par le temps nécessaire à le produire (une période $= \frac{2\pi}{\omega}$) puis par la surface S. Cette puissance par unité de surface est aussi appelée **intensité de l'onde**:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} kG\omega A^2$$

Si nous remplaçons k par $\frac{\omega}{v}$ et v par $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ nous obtenons:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\sqrt{\rho G}\,\omega^2 A^2$$

Comme $\sqrt{\rho G} = \rho v$, on peut aussi écrire cette formule sous la forme:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\rho v\,\omega^2 A^2 \tag{4.4}$$

4.4 Réflexion et transmission.

Quand les ondes arrivent à la frontière entre deux milieux, une partie de la puissance de l'onde incidente sera transmise à l'autre milieu, et le reste sera transporté en arrière par une onde réfléchie.

Nous utiliserons l'indice 1 pour le milieu de l'onde incidente et 2 pour l'autre milieu. L'amplitude de l'onde incidente sera A_i, celle de l'onde réfléchie A_r et celle de l'onde transmise sera A_t. Nous travaillerons en régime sinusoïdal et avec le formalisme des impédances. Finalement, pour simplifier les calculs nous situerons l'origine des x à la frontière entre les deux milieux.

Le déplacement dans le milieu 1 sera:

$$y_1 = A_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + A_r e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

le déplacement dans le milieu 2 sera:

$$y_2 = A_t e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

Les conditions que ces deux déplacements doivent satisfaire à la frontière des deux milieux (pour $x = 0$) sont, d'une part, que les deux déplacements doivent être égaux:

$$y_1 = y_2 \qquad \text{pour } x = 0$$

D'autre part, par la première loi de Newton, la force verticale exercée par la dernière couche du milieu 1 sur la première couche du milieu 2 doit être égale à celle exercée par la première couche du milieu 2 sur la dernière couche du milieu 1. Autrement dit, les forces verticales doivent être continues partout, y compris à la frontière. Comme nous l'avons déjà vu, les forces verticales ont une valeur égale à:

$$F = -SG\frac{\partial y}{\partial x}$$

et la condition de continuité à satisfaire sera:

$$G_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0} = G_2\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0}$$

La première condition de continuité nous donne:

$$A_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + A_r e^{j(\omega t + k_1 x)} = A_t e^{j(\omega t - k_2 x)} \qquad \text{pour } x = 0$$

donc:

$$A_i + A_r = A_t$$

La deuxième condition nous donne:

$$G_1\left(-jk_1 A_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + jk_1 A_r e^{j(\omega t + k_1 x)}\right) = G_2(-jk_2)A_t e^{j(\omega t - k_2 x)} \qquad \text{pour } x = 0$$

ce qui se réduit à:

$$G_1 k_1(-A_i + A_r) = -G_2 k_2 A_t$$

Le système à résoudre est:

$$A_t - A_r = A_i$$
$$G_2 k_2 A_t + G_1 k_1 A_r = G_1 k_1 A_i$$

et la solution est:

$$A_t = \frac{2G_1 k_1}{G_1 k_1 + G_2 k_2} A_i$$
$$A_r = \frac{G_1 k_1 - G_2 k_2}{G_1 k_1 + G_2 k_2} A_i$$

Si l'on remplace Gk par $\omega\sqrt{\rho G}$, la solution précédente peut s'écrire:

$$A_t = \frac{2\sqrt{\rho_1 G_1}}{\sqrt{\rho_1 G_1} + \sqrt{\rho_2 G_2}} A_i \tag{4.5}$$
$$A_r = \frac{\sqrt{\rho_1 G_1} - \sqrt{\rho_2 G_2}}{\sqrt{\rho_1 G_1} + \sqrt{\rho_2 G_2}} A_i \tag{4.6}$$

Comme $\sqrt{\rho G} = \rho v$, on peut écrire ces formules sous cette autre forme:

$$A_t = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_i \tag{4.7}$$
$$A_r = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_i \tag{4.8}$$

4.5 Exercices.

Rappel: Le moment (ou couple) $\vec{M}$ d'une force F par rapport à un point P est défini comme

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

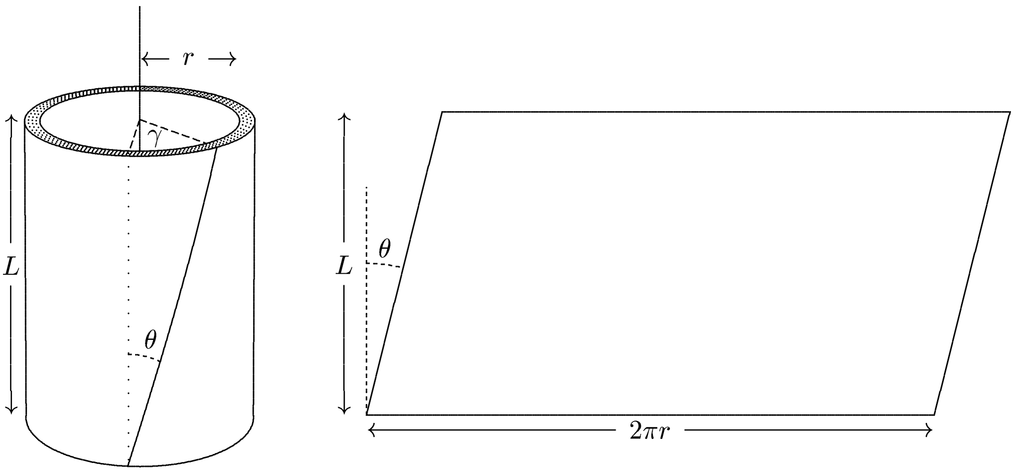
où $\vec{r}$ est le vecteur qui va du point P au point où la force est appliquée. Il est évident que le moment est maximum quand la force est perpendiculaire au rayon $\vec{r}$ et qu'il est d'autant plus grand que $\vec{r}$ est grand. Le moment (ou couple) résultant de l'application de plusieurs forces est égal à la somme des moments:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{k} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{k} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Le couple ou le moment est ce qui fait tourner les objets. On obtient le même résultat en appliquant une force de $100N$ avec un bras de levier ($\vec{r}$ des formules précédentes) de $10\,cm$ qu'en appliquant une force de $10N$ avec un bras de levier de $1\,m$.

Avec ces définitions nous allons calculer le moment ou le couple nécessaire pour déformer un objet solide. Plus précisément nous allons calculer le couple nécessaire pour tordre un tube fin, puis un cylindre massif et finalement une barre parallélépipédique.

1 - Calculez le couple δM nécessaire pour obtenir une torsion, d'un angle γ, sur un tube de rayon r, de longueur L et d'épaisseur δr. Le module de rigidité du matériau est G.



Réponse: $\delta M = \frac{2\pi G\gamma}{L} r^3 \delta r$.

2 - Calculez le couple nécessaire pour tordre, d'un angle γ, un cylindre plein de rayon R et de longueur L. Utilisez les résultats de l'exercice précédent et intégrez de $r = 0$ à $r = R$
Réponse: $M = \frac{\pi G\gamma}{2L} R^4$

3 - En serrant fort, à la main, avec un bon tournevis, on exerce un couple d'environ $6\,N \cdot m$. En utilisant cette valeur calculez de quelle valeur d'angle on tord une tige d'acier d'un centimètre de diamètre et un mètre de longueur. Utilisez la valeur de $89\,10^9 N/m^2$ pour le module de rigidité de l'acier.
Réponse: $\gamma = 3{,}9°$

4 - Nous allons maintenant calculer le couple nécessaire pour tordre, d'un angle γ, une barre de section rectangulaire de longueur L, largeur a et épaisseur b. Pour ce faire utilisez le résultat du premier exercice pour calculer le couple (en fait, le différentiel de deuxième ordre d^2M) pour tordre un petit secteur du tube, correspondant à un angle $d\beta$. Ceci vous donnera le couple nécessaire pour tordre une fine baguette de section $r\,d\beta\,dr$.
Vous pouvez maintenant considérer la barre comme formée par des petites baguettes de section dS. Il suffira d'intégrer ce résultat sur toute la surface de la section de la barre.
Réponse: $M = \frac{G\gamma}{12L} ab(a^2 + b^2)$

5 - Expérience de Cavendish. Cavendish utilisa la balance de torsion inventée par Coulomb pour mesurer la constante de gravitation universelle. Il mesura la force gravitationnelle d'attraction entre deux masses en plomb et deux plus petites masses fixées aux extrémités d'un bras, lui même suspendu par un fil métallique extrêmement fin.
La force d'attraction entre deux masses de $6\,kg$ et $5\,g$ séparées de $6\,cm$ est de $5{,}6\,10^{-10}N$. Calculez le couple dû à deux forces de cette valeur appliquées aux extrémités d'une tige de $20\,cm$ de longueur. Calculez la torsion obtenue avec ce couple sur un fil (cylindre massif) d'acier de $20\mu m$ de diamètre et de $1\,m$ de longueur.
Réponse: 4,6°

6 - Dans l'exercice précédent vous vous êtes, peut-être, demandé si un fil d'une telle finesse est réalisable et quelle est sa résistance à la rupture.
Pour ce qui concerne la faisabilité d'un tel fil, la réponse est oui. Le filament de tungstène des ampoules $220V$ peut être bien plus fin que ça, surtout pour les ampoules de faible puissance (comme les veilleuses). Pour la balance de Cavendish le fil était probablement en bronze. Calculez le poids (et la masse) qu'un fil d'acier de $20\mu m$ de diamètre peut supporter avant de casser. Pour l'acier, la charge de rupture vaut environ 1,3 GPa.
Réponse: $0{,}408\,N$