7. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

7.1 Un spectre étendu.

Le spectre des ondes électromagnétiques est très étendu. Les fréquences vont de quelques fractions de Hertz à quelques $10^{23} Hertz$. Néanmoins, l'amplitude des signaux pour des fréquences inférieures à quelques dizaines de KHz est tellement faible, que l'on peut les ignorer. Suivant la gamme de fréquences ces ondes reçoivent des noms différents. Voici une liste.([1])

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES			
Fréquence	Longueur d'onde	Énergie (eV)	Dénomination
$3\,KHz$ à $30\,KHz$	$100\,Km$ à $10\,Km$	10^{-11} à 10^{-10}	VLF
$30\,KHz$ à $300\,KHz$	$10\,Km$ à $1\,Km$	10^{-10} à 10^{-9}	LF
$300\,KHz$ à $3\,MHz$	$1\,Km$ à $100\,m$	10^{-9} à 10^{-8}	MF
$3\,MHz$ à $30\,MHz$	$100\,m$ à $10\,m$	10^{-8} à 10^{-7}	HF
$30\,MHz$ à $300\,MHz$	$10\,m$ à $1\,m$	10^{-7} à 10^{-6}	VHF
$300\,MHz$ à $3\,GHz$	$1\,m$ à $100\,mm$	10^{-6} à 10^{-5}	Micro-ondes UHF
$3\,GHz$ à $30\,GHz$	$100\,mm$ à $10\,mm$	10^{-5} à 10^{-4}	Micro-ondes SHF
$30\,GHz$ à $300\,GHz$	$10\,mm$ à $1\,mm$	10^{-4} à 10^{-3}	Micro-ondes EHF
$300\,GHz$ à $4\,10^{14}Hz$	$1\,mm$ à $750\,nm$	10^{-3} à 1,5	Infrarouge
$4\,10^{14}Hz$ à $8{,}5\,10^{14}Hz$	$750\,nm$ à $350\,nm$	1,5 à 3,5	Lumière visible
$8{,}5\,10^{14}Hz$ à $3\,10^{16}Hz$	$350\,nm$ à $10\,nm$	3,5 à 10^{2}	Ultraviolet
$3\,10^{16}Hz$ à $3\,10^{19}Hz$	$10\,nm$ à $10^{-2}\,nm$	10^{2} à 10^{5}	Rayons X
$3\,10^{19}Hz$ à $3\,10^{22}Hz$	$10^{-2}\,nm$ à $10^{-5}\,nm$	10^{5} à 10^{8}	Rayons γ
$3\,10^{22}Hz$ à $3\,10^{23}Hz$	$10^{-5}\,nm$ à $10^{-6}\,nm$	10^{8} à 10^{9}	Rayons cosmiques

Nous sommes totalement insensibles aux champs magnétiques. Nous pouvons parfois sentir la force que le champ électrostatique exerce sur nos poils (p.ex. en passant le bras devant un écran de télévision)... mais il faut être poilu. Toutes les autres influences des champs électriques ou magnétiques se situent dans le cadre de la paranoïa, de la parapsychologie, du paranormal ou des maladies psychosomatiques. Nous n'en parlerons pas ici, mais vous trouverez sans problème des charlatans pour vous en parler.

Par contre, nous sommes sensibles à l'énergie transportée par certains types d'ondes électromagnétiques: notre peau ou nos muscles peuvent être chauffés par des ondes radio, des ondes infrarouges ou visibles. Nos rétines sont sensibles au champ électrique des ondes électromagnétiques visibles. Nous absorbons d'autres ondes électromagnétiques sans nous en rendre compte, si l'énergie

([1]) Un **électron-volt (eV)** est une unité de mesure d'énergie. Elle est égale à $1{,}6\,10^{-19} Joules$. L'énergie des photons correspondant à une onde électromagnétique de fréquence f est égale à hf où $h = 6{,}63\,10^{-34}$ est la **constante de Plank**.

absorbée ne nous réchauffe pas sensiblement. Mais si les photons associés à ces ondes sont assez énergétiques, ils peuvent causer des dégâts dans nos cellules (notamment à l'ADN). C'est le cas des rayons ultraviolets, des rayons X, gamma et cosmiques.

Pour des fréquences au dessous de $9\,10^{12} Hz$ (ce qui correspond à une longueur d'onde de $32 \mu m$) l'énergie de photons associés à ces ondes est inférieure à l'énergie due à l'agitation thermique correspondante à $300\,K$ (température ambiante). Donc, au dessous de ces fréquences, le seul effet que les ondes électromagnétiques peuvent avoir sur notre organisme est celui de réchauffer les cellules, si la puissance absorbée est suffisante.

Au dessus de $9\,10^{12} Hz$ les ondes électromagnétiques peuvent agir sur la matière (vivante ou non) par un processus quantique: l'absorption d'un photon. Si le photon a l'énergie adéquate, cette absorption peut, éventuellement, agir sur les liaisons atomiques. Cette interaction n'est pas synonyme de cancer ou de maladie: la vision a lieu par ce type de phénomène.

7.2 Équations de Maxwell.([2])

Bien que ce fascicule soit dédié aux ondes et non à l'électromagnétisme nous sommes bien obligés de parler un peu des champs électrique et magnétique et des équations de Maxwell.

Le **champ électrique** $\vec{E}$ est un champ vectoriel. Ses unités sont des $\frac{volts}{mètre} = kg \frac{m}{As^3}$.

L'**induction magnétique** $\vec{B}$ est aussi un champ vectoriel. Son unité est le $Tesla = \frac{Weber}{m^2} = \frac{kg}{As^2}$.

D'un point de vue formel, on peut accepter les équations de Maxwell comme des postulats ou des "Lois" de la physique.([3])

Dans toute leur élégance, voici les équations de Maxwell dans le vide:([4])

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_\circ \vec{j}$$
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Ici $\vec{\nabla}$ (**nabla**) est l'opérateur vectoriel:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ρ est la densité de charge (charge volumique?) mesurée en $\frac{Coulombs}{m^3}$.

$\vec{j}$ est la densité (surfacique?) de courant, mesurée en $\frac{A}{m^2}$

$\varepsilon_\circ$ est la **permittivité du vide** égale à $8{,}85\,10^{-12} \frac{Farad}{mètre}$

([2]) James Clerk Maxwell (1831-1879). Écossais.

([3]) Les "Lois" de la physique ne sont pas immuables: on les garde tant qu'elles font l'affaire et décrivent raisonnablement les expériences. Quand elles ne le font plus on les change ou on les garde pour les situations où elles fonctionnent correctement (comme les Lois de Newton).

([4]) J'utilise la notation $\vec{A} \cdot \vec{B}$ pour le produit scalaire, et la notation $\vec{A} \times \vec{B}$ pour le produit vectoriel. Ceci est la notation utilisée partout sauf en France où on lui préfère la notation franco-française $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

$\mu_\circ$ est la **perméabilité du vide** égale à $4\pi\, 10^{-7} \frac{Henri}{mètre}$.

c est la vitesse de la lumière dans le vide $\simeq 3\, 10^8 m/s$.

La force $\vec{F}$ est la force subie par une charge électrique q se déplaçant à vitesse $\vec{v}$ dans un champ électrique $\vec{E}$ et dans un champ magnétique $\vec{B}$.

Les constantes c, $\mu_\circ$ et $\varepsilon_\circ$ ne sont pas indépendantes. Elles sont reliées par la formule:

$$\mu_\circ \varepsilon_\circ c^2 = 1$$

Dans des milieux matériels, les équations de Maxwell sont presque les mêmes. Il faut seulement remplacer $\varepsilon_\circ$ et $\mu_\circ$ par les ε et μ propres au milieu. Dans ce cas la vitesse de la lumière dans le milieu ne sera pas c mais

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Nous allons faire des calculs uniquement dans le cas le plus simple. D'abord nous nous limiterons à le faire dans le vide ou, au moins, dans des endroits où on ne trouve pas de charges électriques mobiles. Ceci constitue déjà une bonne simplification. En effet comme il n'y a pas de charges mobiles il n'y a pas de courant et $\vec{j} = 0$. De plus, s'il n'y a pas de charges mobiles, les seules charges possibles seront des charges fixes qui produiront un champ électrostatique mais ne participeront pas à l'onde électromagnétique. On n'aura pas non plus à s'occuper des forces sur les charges puisqu'elles ne peuvent pas bouger.

Nous pouvons ignorer l'équation concernant $\vec{F}$, et considérer que ρ et $\vec{j}$ sont égaux à zéro. Avec ceci les équations deviennent:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{7.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{7.4}$$

Nous voyons déjà le mécanisme des ondes électromagnétiques: les variations de $\vec{B}$ créent (équation 7.2) du champ électrique et, à leur tour, les variations de champ électrique (équation 7.4) créent du champ magnétique.

Pour retrouver l'équation d'onde il nous faut éliminer soit $\vec{B}$ ou soit $\vec{E}$ de ces équations. Commençons par éliminer $\vec{B}$. Nous allons calculer le rotationnel de l'équation 7.2:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

En physique, sauf un ou deux cas très particuliers, on peut permuter l'ordre des dérivées partielles, d'intégrations successives ou d'intégration et dérivation. Ici nous allons inverser l'ordre de dérivation dans le côté droit de l'équation: au lieu de dériver d'abord par rapport au temps puis par rapport à x, y ou z (dans le calcul du rotationnel), nous allons calculer d'abord le rotationnel et après nous allons dériver par rapport au temps:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right)$$

Maintenant nous pouvons remplacer le rotationnel de $\vec{B}$ par l'équation 7.4:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

soit:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Le terme de gauche (le rotationnel du rotationnel de $\vec{E}$) peut se simplifier grâce à l'identité suivante:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) \equiv \vec{B} \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right) \vec{C}$$

pour le terme de gauche il faut remplacer $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par $\vec{\nabla}$ et $\vec{C}$ par $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \equiv \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E}$$

Mais l'équation 7.1 nous indique que la divergence de $\vec{E}$ est égale à zéro. Avec ceci l'équation d'onde du champ électromagnétique dans le vide est:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad 7.5$$

On peut éliminer $\vec{E}$ des équations 7.1 à 7.4. On prend le rotationnel de l'équation 7.4:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)$$

L'équation 7.2 nous permet de remplacer le rotationnel de $\vec{E}$ par la dérivée temporelle de $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

On utilise la même identité du produit vectoriel pour remplacer le rotationnel du rotationnel de $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \equiv \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) - \nabla^2 \vec{B}$$

Et comme la divergence de $\vec{B}$ est nulle (équation 7.3), on obtient l'équation d'onde pour l'induction magnétique des ondes électromagnétiques dans le vide:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad 7.5$$

Cette équation est la même que celle du champ électrique: toute solution valable pour l'un des champs le sera aussi pour l'autre. Mais il ne faut pas oublier que les deux champs sont intimement liés, et que une solution d'un des champs impose celle de l'autre.

Nous allons limiter notre étude à des ondes planes, comme nous l'avions fait pour les ondes sonores. Nous allons choisir le plan zy parallèle au plan caractéristique des ondes planes. C'est-à-dire que à un instant quelconque le champ électrique aura la même valeur dans tous les points d'un même plan parallèle au plan yz. Et de même pour l'induction magnétique $\vec{B}$. Cela veut dire, mathématiquement que $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ seront toujours nulles si nous les appliquons à n'importe quelle composante des champs.

Si nous développons l'équation 7.1:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Comme les dérivées par rapport à y et z sont nulles,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Cela veut dire que E_x est une constante car il a la même valeur dans tout l'espace (il ne varie pas non plus avec y ou z). S'il est constant dans tout l'espace il ne peut être que constant et nul.

$$E_x = 0$$

Ceci implique que seules les composantes E_y et E_z peuvent être différentes de zéro et que le champ électrique est parallèle au plan yz. Nous allons choisir notre système de coordonnées de sorte que l'axe y soit aligné avec le champ électrique, avec ceci:

$$\vec{E} = (0,\, E_y,\, 0)$$

et

$$|\vec{E}| = E_y$$

L'équation vectorielle 7.5 sera réduite à une seule équation pour l'unique composante E_y:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

Mais les dérivées par rapport à y et z sont nulles:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

Cette fois nous avons une équation d'onde classique et dont nous connaissons la solution: n'importe quelle fonction f de la variable ξ:

$$E_y = f(\xi) = f(t \pm \frac{x}{c})$$

L'onde est une perturbation du champ électrique de direction y qui se déplace dans la direction x à la vitesse de la lumière c.

Développons l'équation 7.2 dans ses trois composantes:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\
\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}
\end{aligned} \qquad 7.6$$

On voit que $B_x = 0$ et comme E_z est aussi zéro B_y est aussi zéro.

Dans une onde électromagnétique plane, la perturbation est transversale c'est-à-dire, perpendiculaire à la direction de déplacement. Aussi bien $\vec{E}$ que $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de déplacement et sont perpendiculaires entre eux.

Prenons une onde qui se propage dans le sens positif des x. Le champ électrique (orienté dans le sens positif des y) sera:

$$E = E_\circ(t - \frac{x}{c})$$

il est évident que

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

si l'on compare à l'équation 7.6:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

on peut écrire:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

ou encore:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_y}{c} - B_z\right) = 0$$

L'expression à l'intérieur de la parenthèse ne dépend pas du temps. Comme le E_y et le B_z de l'onde dépendent du temps, cela veut dire que le E_y et le B_z d'une onde électromagnétique plane obéissent à la relation:

$$\frac{E_y}{c} - B_z = 0$$

ou bien, puisque les seules composantes des champs sont E_y et B_z,

$$E = cB$$

Cette onde plane dont le champ électrique est toujours orienté parallèle à l'axe y est dite **polarisée linéairement** suivant l'axe y.

Dans une onde plane les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre droit orienté positivement: vu de l'intérieur du trièdre, si vous tournez dans le sens positif (à gauche) vous passez de $\vec{v}$ à $\vec{E}$ à $\vec{B}$ (voir figure 7.1).

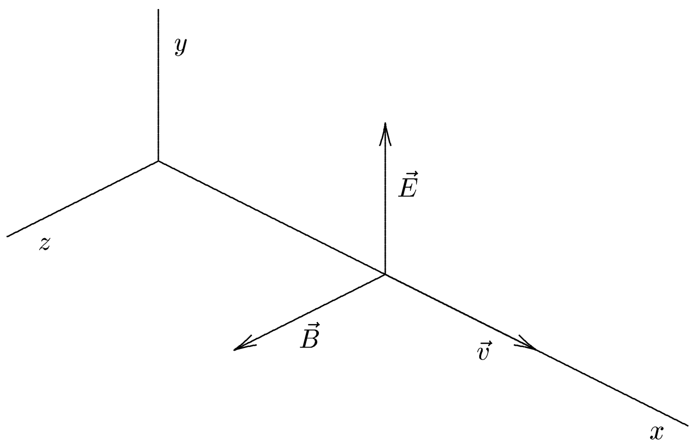

Figure 7.1 Dans une onde plane se propageant dans le sens des x croissants, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux et au sens de propagation x. Quand E est positif dans la direction y, B est positif dans la direction z. Dans le vide v est égale à c.

7.3 Régime sinusoïdal.

De la même façon que nous l'avons fait pour les types d'ondes traités précédemment, nous allons nous limiter à des ondes sinusoïdales. La justification de cette simplification est que l'on peut toujours décomposer une forme d'onde quelconque en somme (éventuellement infinie) d'ondes sinusoïdales. Nous écrirons, par exemple:

$$E_y = E_\circ \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

On peut calculer le B_z correspondant:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_\circ \frac{\omega}{v} \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

On déduit B_z en intégrant (comme d'habitude, nous ne nous intéressons pas aux composantes continues):

$$B_z = \int -E_\circ \frac{\omega}{v} \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) dt = \frac{E_\circ}{v} \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Ces équations seront plus compactes en utilisant le *nombre d'onde* k défini dans les chapitres précédents:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Les équations deviennent:

$$E_y = E_\circ \cos(\omega t - kx)$$

$$B_z = \frac{E_\circ}{v} \cos(\omega t - kx)$$

Si les enfants sont couchés, on peut aller encore plus loin et utiliser le formalisme des impédances, et écrire:

$$E_y = E_\circ e^{j(\omega t - kx)}$$

$$B_z = \frac{E_\circ}{v} e^{j(\omega t - kx)}$$

Encore une fois ce type de notation est réservé aux personnes qui savent l'utiliser et l'interpréter et qui ne vont pas conclure que l'on peut trouver des champs électriques ou magnétiques complexes dans notre monde.

On peut encore généraliser la formule précédente pour des ondes planes qui ne se propagent pas dans le sens de l'axe x mais dans une direction quelconque. Pour ceci nous définissons le:

$$\textbf{Vecteur d'onde} = \vec{k} = k\vec{\xi}$$

Où k est le nombre d'onde (scalaire) et $\vec{\xi}$ est le **vecteur unitaire**(5) dont la direction est la direction de propagation des ondes. Si nous appelons

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

le vecteur qui va de l'origine de coordonnées au point où on calcule le champ, le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{r}$ mesure la distance parcourue dans la direction de propagation des ondes, multiplié par le nombre d'onde (scalaire) k. Avec cette notation les équations deviennent:

$$E_y = E_\circ e^{j(\omega t - k \cdot r)}$$

$$B_z = \frac{E_\circ}{v} e^{j(\omega t - k \cdot r)}$$

dans lesquelles je n'ai même pas daigné mettre des petites flèches sur k et r. Mais on admet que, à ce niveau, tout le monde sait de quoi et comment on parle, et qu'il n'y a pas de confusion entre les variables scalaires et vectorielles.

Il n'est pas facile de se faire une image mentale d'une onde électromagnétique. Les champs électriques et magnétiques sont immatériels et invisibles. Pour vous aider j'ai fait, dans la figure 7.2, un dessin d'une région de l'espace, sur lequel se déplace une onde plane.

(5) Un vecteur unitaire est un vecteur dont le longueur est égale à 1.

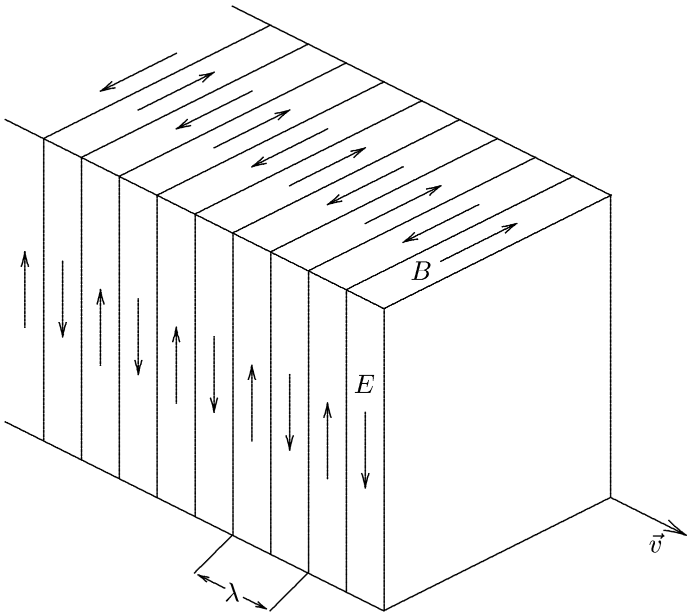

Figure 7.2 Morceau d'une onde plane se propageant vers la droite et vers le bas de l'observateur. Chaque tranche d'espace correspond à une orientation opposée des champs. La longueur d'onde est égale à l'épaisseur de deux tranches. Les tranches se déplacent vers la droite à la vitesse de la lumière.

Il s'agit d'un parallélépipède droit, dont une face est parallèle aux plans caractéristiques de l'onde plane. À l'intérieur de ce parallélépipède j'ai dessiné des tranches (comme dans un pain de mie tranché). L'onde se propage vers l'observateur, un peu à droite et vers le bas. Chaque tranche correspond à une orientation des champs. Dans la tranche la plus proche de l'observateur le champ électrique est dirigé vers le bas et le champ magnétique est orienté vers la droite. Dans les tranches successives l'orientation des champs est alternée. Juste à frontière des tranches les champs sont nuls.

Il faut voir que la valeur des champs à l'intérieur de chaque tranche n'est pas constante. Les champs sont maximum (positifs ou négatifs) au milieu des tranches, puis diminuent sinusoïdalement pour arriver à zéro aux frontières des tranches.

Dans une onde plane les tranches sont de dimensions infinies mais l'épaisseur de chaque tranche est égale à $\lambda/2$. L'ensemble des tranches se déplace vers l'observateur à la vitesse de la lumière.

Quant aux dimensions du dessin et de l'observateur, tout dépend de la valeur de la longueur d'onde. S'il s'agit des ondes radio dans la gamme des "grandes ondes" (p. ex. France Inter à 162 KHz), l'observateur ne sera qu'une poussière minuscule dans le dessin. Par contre, s'il s'agit de lumière visible ($\lambda \simeq 0{,}5\mu m$), le dessin est microscopique par rapport à votre pupille.

7.3.1 Puissance transportée

Les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie. Cela au moins on peut le sentir en se chauffant au soleil. On peut aussi le constater quand on se sert d'un four à micro-ondes.

Curieusement on ne sait pas calculer l'énergie par unité de volume d'un champ électromagnétique. Par contre on sait que si l'on fait le calcul comme si les champs électriques et magnétiques étaient des champs statiques (champ électrostatique et champ magnétostatique), les résultats obtenus correspondent aux valeurs expérimentales. C'est cela que nous allons faire.

Du cours d'électrostatique nous apprenons que l'énergie par unité de volume, due au champ électrostatique, d'une zone de l'espace où ce champ vaut E est:([6])

$$\frac{W}{Vol} = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ E^2$$

Nous allons calculer l'énergie contenue dans un parallélépipède de deux tranches de longueur et de surface S (voir figure 7.3). Nous choisirons l'axe des x parallèle au sens de propagation des ondes et nous placerons l'origine des x au début de la tranche de gauche.

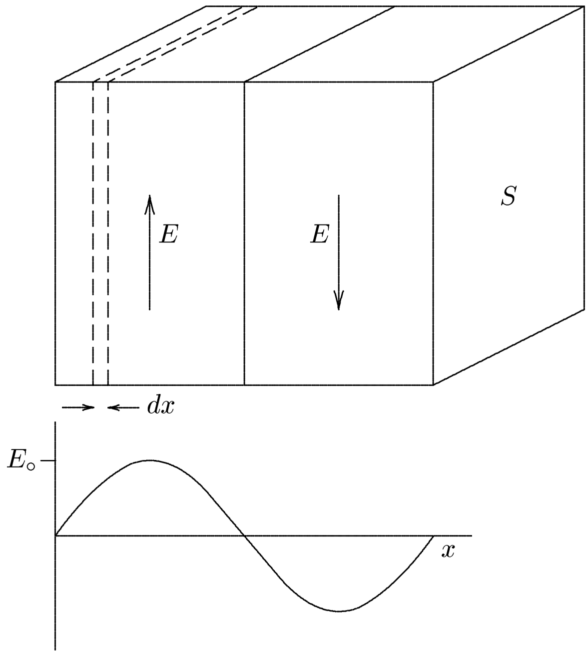

Figure 7.3 Morceau de tranches de surface S. Le volume du petit morceau (en pointillé) sera Sdx.

La valeur du champ électrique sera:

$$E = E_\circ \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = E_\circ \sin kx$$

Le volume indiqué par les pointillés sera Sdx et l'énergie contenue dans ce volume sera:

$$dW = \frac{1}{2}S\varepsilon_\circ E^2 dx = \frac{1}{2}S\varepsilon_\circ E_\circ^2 \sin^2 kx\, dx$$

Il faut intégrer entre zéro et λ:

$$W = \int_0^\lambda \frac{1}{2}S\varepsilon_\circ E_\circ^2 \sin^2 kx\, dx = \frac{1}{2}S\varepsilon_\circ E_\circ^2 \int_0^\lambda \sin^2 kx\, dx$$

On laisse au lecteur le soin de prouver que l'intégrale vaut $\lambda/2$([7]). L'énergie contenue dans le parallélépipède sera:

$$W = \frac{1}{4}S\lambda\varepsilon_\circ E_\circ^2$$

Cette énergie sera sortie complètement du parallélépipède quand l'onde électromagnétique aura avancé de λ. Ce temps est évidemment une période $T = \lambda/c$. La puissance qui traverse la surface S sera W/T:

$$\mathcal{P}_é = \frac{W}{T} = \frac{1}{4}Sc\varepsilon_\circ E_\circ^2$$

([6]) Nous allons utiliser la lettre W (pour work) pour l'énergie car E est déjà utilisée pour le champ électrique.

([7]) Vous pouvez faire le changement de variable $\theta = kx$ (sans oublier de changer les limites d'intégration), puis remplacer $\sin^2\theta$ par $\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$.

et la puissance par unité de surface sera:

$$\frac{\mathcal{P}_é}{\mathcal{S}} = \frac{1}{4} c\varepsilon_\circ E_\circ^2$$

Cette puissance par unité de surface est due au champ électrique, nous allons calculer celle due à l'induction magnétique B.

La magnétostatique nous apprend que l'énergie par unité de volume due au champ magnétique est:

$$\frac{W}{Vol} = \frac{1}{2\mu_\circ} B^2$$

Le calcul est identique à celui fait pour le champ électrique le seul changement est que, à la place de $\varepsilon_\circ$ nous avons $1/\mu_\circ$ et que, à la place de E nous avons B. Le résultat sera:

$$\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\mu_\circ} c B_\circ^2$$

Mais nous avions trouvé que $B = E/c$. Donc, si l'on exprime la puissance par unité de surface transportée, due au champ magnétique, mais exprimée en fonction du champ électrique, on obtient:

$$\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{S}} = \frac{1}{4\mu_\circ c} E_\circ^2$$

et comme $\frac{1}{\mu_\circ c} = \varepsilon_\circ c$:

$$\frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{S}} = \frac{1}{4} c\varepsilon_\circ E_\circ^2$$

Ce qui est exactement égal à la puissance par unité de surface transportée par le champ électrique.

Dans une onde électromagnétique la puissance transportée est répartie en parts égales entre le champ électrique et le champ magnétique. La puissance totale sera donc:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_\circ E_\circ^2$$

Si, à la place d'utiliser la valeur crête $E_\circ$ du champ on utilise la valeur efficace E_{eff}:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = c\varepsilon_\circ E_{eff}^2$$

De plus, si l'on fait l'approximation $c = 3\,10^8$(8) on obtient $c\varepsilon_\circ = \frac{1}{\mu_\circ c} \simeq \frac{1}{120\pi}$ et:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \frac{E_{eff}^2}{120\pi}$$

Cette formule n'est valable que dans le vide et le résultat est exprimé en $Watts/m^2$.

Si nous faisions le calcul dans la matière et non dans le vide, le résultat obtenu serait:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{S}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} \frac{E_{eff}^2}{120\pi}$$

où ε_r est la **permittivité <u>relative</u>** du milieu et μ_r est la **perméabilité <u>relative</u>** du milieu.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ} \qquad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_\circ}$$

La permittivité relative ε_r est plus connue sous le nom de **constante diélectrique**.

(8) Une valeur plus précise est $2{,}998\,10^8 m/s$

7.3.2 Réflexion et transmission.

Comme toutes les autres ondes, les ondes électromagnétiques qui arrivent à la frontière entre deux milieux, sont partiellement transmises et partiellement réfléchies. Nous allons calculer les fractions transmise et réfléchie dans le cas le plus simple.

La première simplification que nous ferons sera de travailler dans des milieux non magnétiques, ou, plus exactement, des milieux où la perméabilité magnétique μ est très proche de celle du vide $\mu_\circ$. Ce n'est pas une très grande perte de généralité, dans la mesure où seuls les matériaux ferromagnétiques (fer, nickel, cobalt, ferrites, et plusieurs oxydes de fer et autres métaux) ont des μ très différents de $\mu_\circ$.

La deuxième simplification consistera à ne traiter que l'incidence normale. C'est-à-dire que les ondes incidentes arrivent à l'interface entre les deux milieux perpendiculairement à la surface. Autrement dit, les plans caractéristiques de l'onde plane sont parallèles à l'interface. Cette simplification est beaucoup plus restrictive et elle nous éloigne de l'aspect "optique" des ondes électromagnétiques (loi de Snell, lentilles, prismes, etc.).

La dernière simplification consistera à ne pas traiter la réflexion sur des conducteurs (métaux et plasmas). Avec ceci nous ignorerons les miroirs. Comme la réflexion sur des conducteurs est, quand même, très importante, nous en parlerons un peu, mais sans faire de démonstrations ni de calculs.

Dans un milieu matériel, la vitesse v de la lumière est plus faible que c (dans le vide). On défini l'**indice de réfraction** du milieu n:

$$n = \frac{c}{v}$$

Dans le milieux isolants (diélectriques) n est toujours plus grand que 1, par exemple 1,33 pour l'eau et 1,5 pour le verre.

Dans un milieu matériel non magnétique $\mu_1 = \mu_\circ$ de perméabilité ε_1 on trouve:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\circ}} = \sqrt{\varepsilon_r}$$

L'indice de réfraction est égal à la racine carrée de la constante diélectrique.

Nous allons calculer l'amplitude des ondes transmise E_t et réfléchie E_r en fonction de l'amplitude E_i de l'onde incidente. L'amplitude des composantes magnétiques sera, respectivement, B_t, B_r et B_i.

Sans démonstration, les conditions limites que les composantes parallèles à l'interface des champs électriques et magnétiques, de chaque côté de l'interface, doivent satisfaire sont les suivantes:

$$E_1 = E_2$$
$$\frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B_2}{\mu_2}$$

où les indices 1 et 2 désignent les deux milieux.

Dans notre cas, comme nous ne considérons que les milieux non magnétiques, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_\circ$, la deuxième équation se réduit à:

$$B_1 = B_2$$

De plus, comme nous ne traitons que l'incidence normale, tous les champs sont parallèles à l'interface, et les conditions de continuité doivent être satisfaites simplement par les amplitudes des ondes.

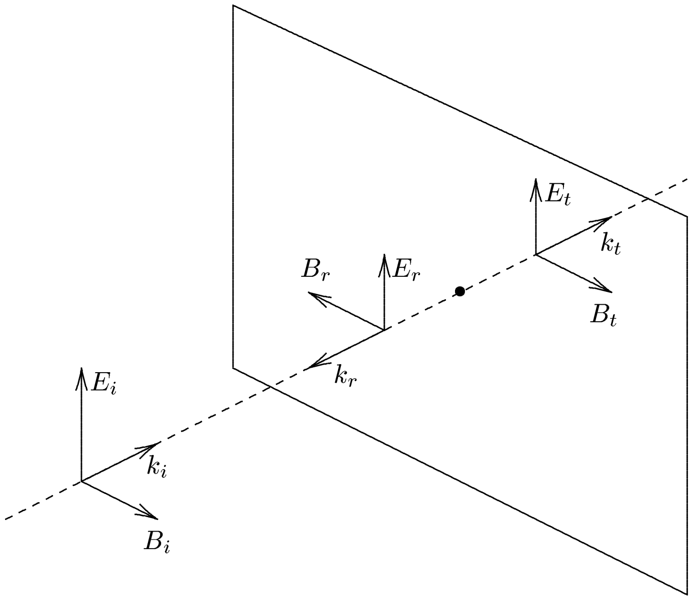

Figure 7.4 Réflexion d'une onde plane à l'interface entre deux milieux. Remarquez que aussi bien le k que le B ont changé de direction dans l'onde réfléchie.

Les conditions limites nous donnent:

$$E_i + E_r = E_t$$
$$B_i - B_r = B_t$$

Mais $E = vB = \frac{c}{n}B$. Donc on peut remplacer les B dans la seconde équation par $B = \frac{n}{c}E$. Avec ceci, et après avoir éliminé c nous obtenons:

$$E_i + E_r = E_t$$
$$n_1E_i - n_1E_r = n_2E_t$$

la solution du système est:

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Il est facile de constater que si $n_1 = n_2$, c'est-à-dire, si les deux matériaux ont les mêmes propriétés, l'onde réfléchie est nulle et l'onde transmise est égale à l'onde incidente.

On peut maintenant calculer la fraction de la puissance par unité de surface réfléchie. Comme nous sommes dans le même milieu et que la puissance par unité de surface est proportionnelle au carré des champs électriques:

$$\frac{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_r}{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_i} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

La fraction de puissance par unité de surface transmise sera égale à celle qui n'est pas réfléchie:

$$\frac{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_t}{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_i} = 1 - \frac{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_r}{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_i} = 1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$\frac{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_t}{(\mathcal{P}/\mathcal{S})_i} = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

7.4 Retour à la réalité.

Comme d'habitude, la plupart des ondes, électromagnétiques ou non, sont générées par des sources plus ou moins étendues. Loin de ces sources, quand la distance aux sources est très grande par rapport aux dimensions de la source, cette dernière peut être vue comme une source ponctuelle et les ondes émises comme des ondes sphériques. Dans ce cas comme la surface sur laquelle se répand la puissance émise, augmente comme le carré de la distance r à la source, l'amplitude du champ électrique (et aussi celle de B) diminue comme $1/r$ de sorte que la puissance par unité de surface diminue comme $1/r^2$.

$$E = \frac{A}{r} e^{-\beta r} e^{j(\omega t - k \cdot r)}$$

Beaucoup de milieux absorbent une partie de la puissance des ondes qui les traversent. L'absorption dépend de la nature du milieu et de la fréquence des ondes. Pour tenir compte de cette absorption on peut rajouter un terme avec une exponentielle qui reflète la diminution d'amplitude avec la progression de l'onde. Par exemple:

$$E = E_\circ e^{-\beta r} e^{j(\omega t - k \cdot r)}$$

On peut aussi inclure le coefficient β dans le k ce qui nous donnera un coefficient k complexe mais, une fois de plus, ceci est réservé aux adultes.

7.5 Interaction avec la matière.

Les ondes électromagnétiques interagissent avec la matière parce que celle-ci est composée de particules chargées: les protons et les électrons. L'interaction avec les protons est négligeable par rapport à l'interaction avec les électrons parce que ces derniers ont une masse environ 2000 fois plus petite que les protons. Les électrons réagissent environ 2000 fois plus que les protons à un même champ électrique. L'interaction de la matière et de l'induction magnétique est aussi négligeable car le champ magnétique ne fait que changer la direction du mouvement des électrons mais ne modifie pas leur énergie.

Dans un isolant, les électrons sont liés à leur atome et le champ électrique se limite à les agiter légèrement mais sans qu'ils quittent leur atome. S'il s'agit de molécules avec des électrons partagés entre des atomes (liaison covalente), la situation est similaire et le champ électrique se limite à agiter les électrons sans leur faire quitter leur molécule.

Les électrons oscillent dans la direction et à la fréquence du champ électrique de l'onde incidente et leur amplitude est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente.

Mais un électron qui oscille émet une onde électromagnétique dont le champ électrique a la direction des oscillations de l'électron. Cette onde émise l'est dans toutes les directions mais avec un maximum sur le plan perpendiculaire aux oscillations.

Prenons une fine couche plane de diélectrique (fine devant la longueur d'onde) parallèle au plan des ondes. Tous les électrons de la couche oscilleront synchroniquement et toutes les petites ondes électromagnétiques émises par chaque électron seront en phase et s'ajouteront. Le résultat sera deux ondes planes (avec les plans parallèles à la couche de diélectrique). Une onde partira dans la direction opposée à l'onde incidente et l'autre onde partira dans la même direction et avec l'onde incidente. La phase des deux ondes créées est la même mais elles seront en opposition de phase ou en phase avec l'onde incidente suivant les valeurs de n_1 et n_2 (voir plus haut). L'onde qui part en arrière constitue l'onde réfléchie (le E_r de la section précédente), et l'onde qui part dans la même direction, une fois additionnée avec l'onde incidente, donne l'onde transmise.

Si, au lieu d'avoir une couche mince, la couche de diélectrique est épaisse, la situation sera à peu près la même, mais les deux ondes créées par l'oscillation des électrons seront le résultat d'additionner toutes les petites ondes créées par chaque couche mince, en tenant compte du déphasage dû à la différence de position, aussi bien pour l'excitation que pour l'émission.

Ceci est la grosse différence de la réflexion des ondes électromagnétiques et des ondes matérielles. Les ondes matérielles se réfléchissent parce qu'elles trouvent un obstacle ou une différence de propriétés mécaniques du milieu. Les ondes électromagnétiques sont immatérielles et leur réflexion n'est qu'apparence. L'onde réfléchie n'est pas, à proprement parler, une partie de l'onde incidente mais une onde créée par l'onde incidente.

Les ondes électromagnétiques peuvent traverser avec peu de réflexion des milieux matériels comme une épaisse paroi de verre, et peuvent être réfléchies complètement par des milieux presque immatériels comme la ionosphère terrestre.

Si, à la place d'un diélectrique, nous considérons l'interaction d'une onde électromagnétique avec un métal, la situation est encore plus marquée. Dans un métal on trouve des électrons non liés à aucun atome en particulier, mais qui peuvent se déplacer librement dans le métal. Ils reçoivent, à juste titre, le nom d'**électrons libres**.

Dans un métal, les deux ondes créées ont presque([9]) la même amplitude que l'onde incidente. Et elles sont en opposition de phase. Donc, vu de loin, l'onde réfléchie a la même amplitude et est en opposition de phase avec l'onde incidente. L'onde transmise est égale à l'onde incidente plus une autre onde de même amplitude et en opposition de phase: le résultat est zéro.

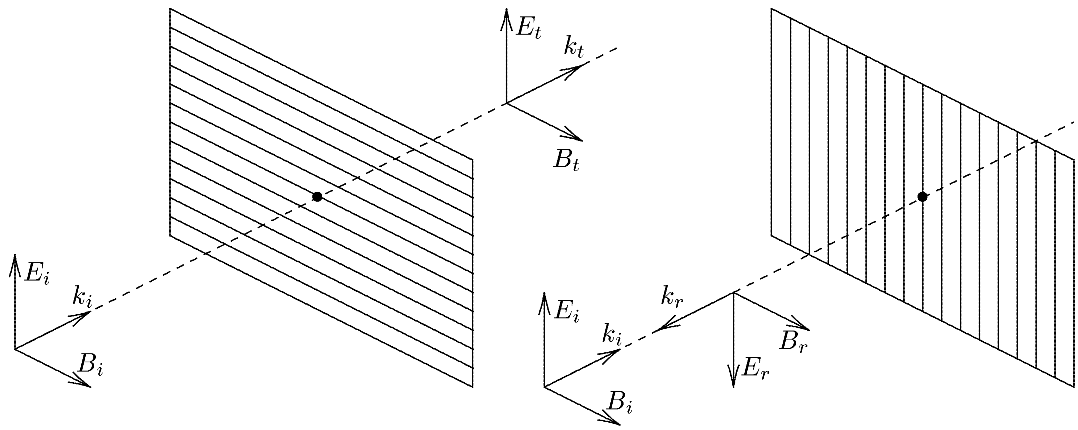

Figure 7.5 Une onde électromagnétique se réfléchit sur une grille formée par des conducteurs parallèles au champ électrique (à droite). Par contre (à gauche), si les conducteurs sont perpendiculaires au champ électrique, l'onde traverse la grille sans se réfléchir.

On peut mettre ce processus en évidence en utilisant un “métal” anisotrope: une grille formée par des fils conducteurs parallèles. Quand on dirige une onde plane vers une telle grille, avec le champ électrique parallèle aux fils, l'onde est réfléchie car les électrons peuvent se déplacer dans le sens du champ. Par contre si les fils sont perpendiculaires au champ électrique, les électrons ne peuvent pas circuler dans le sens du champ électrique et l'onde traverse la grille sans se réfléchir.

7.6 Exercices.

1 - Un satellite géostationnaire se trouve sur une orbite située à $42000\,Km$ du centre de la terre. On veut obtenir un champ électrique $E_{eff} = 35\,\mu V/m$ au niveau du récepteur (sur terre). Calculez la puissance que devra émettre le satellite dans les cas suivants:

   a - Le satellite émet de façon isotrope dans tout l'espace.

([9]) “Presque” parce que les métaux ne sont pas des conducteurs parfaits.

b - Le satellite émet uniformément dans un cône qui "éclaire" seulement le globe terrestre (rayon de la terre: 6366 Km).

c - Même situation que en b) mais de plus le récepteur dispose d'une antenne parabolique de 1 m de diamètre capable de concentrer toute la puissance reçue dans une surface de 0,25 m de diamètre.

R.N.: a: $\simeq$ 57,4 KW (*) b: $\simeq$ 331 W c:$\simeq$ 20,7 W.

2 - On veut communiquer de la terre avec un récepteur sur la lune. Il faut que le champ électrique efficace sur la lune soit $E_{eff} = 10\mu V/m$. Si l'émetteur dispose d'une antenne capable d'"éclairer" seulement toute la lune, calculez la puissance que doit avoir l'émetteur. Distance terre-lune: 380000 Km. Diamètre de la lune: 3476 Km.
R.N.: 2,5 W

3 - Un radar émet des impulsions de 100 Kw dans un cône d'ouverture totale de 3° (on admet que le cône est parfaitement symétrique et que la puissance est rayonnée de façon isotrope à l'intérieur du cône). Une cible à 20 Km de l'émetteur présente une surface de 30 m^2 au faisceau. Si l'on suppose que toute la puissance incidente sur la cible est réfléchie uniformément dans toutes les directions, calculez:

a - Le champ électrique efficace, au niveau de l'émetteur, dû aux ondes réfléchies par la cible.

b - Si l'antenne du récepteur fait 6 m^2, calculez la puissance totale recueillie par celle-ci.

R.N.: a: 0,511 mV/m b: 4,16 $10^{-9} W$

4 - La grandeur utilisée pour décrire le signal émis par un satellite est le EIRP (equivalent isotropically radiated power). Le EIRP est la puissance que devrait avoir un émetteur isotrope situé à la place du satellite pour produire les mêmes champs au niveau du récepteur sur terre. Évidemment les émetteurs utilisés ne sont pas isotropes mais, bien au contraire, utilisent des antennes directives.
Le satellite TDF1 comportait cinq canaux, chacun équipé d'un émetteur de 250 W couplé à une antenne directive pointant vers la France. Le EIRP du satellite est de 63,9 dBW (décibels au dessus d'un watt). Calculez le EIRP en watts, les champs électrique et magnétique au niveau de la terre. En supposant que l'antenne émet de façon isotrope à l'intérieur d'un cône, calculez le diamètre de ce cône au niveau de la terre. Comparez ce diamètre avec les dimensions de la France.
Il est dit qu'il suffira d'une antenne parabolique de 75 cm de diamètre pour capter le satellite. Calculez la puissance reçue par un tel disque. À quelle tension efficace sur 50 Ω correspond cette puissance?
L'orbite géostationnaire se situe à 35900 Km au dessus de l'équateur. Rayon terrestre: 6366 Km. Fréquence d'émission: 12 GHz. Position: 19° ouest.
R.N.: EIRP: 2,45 MW Diamètre éclairé: 1524 Km P = 60,5 pW V = 55 μV

5 - Calculez le EIRP d'un satellite géostationnaire dont le champ électrique, au niveau des pôles de la terre, est de $E_{eff} = 100\,\mu V/m$.
On suppose que l'émission du satellite "éclaire" uniquement toute la terre (rien de perdu dans l'espace). Calculez la puissance réelle émise par le satellite.
R.N.: EIRP: 57,8 dBW P: 3,39 KW

6 - Calculez la puissance que devrait avoir l'émetteur d'une balise du type "balise Argos". On supposera que l'émetteur est isotrope, que le satellite survole la balise à 500 Km, et que le champ électrique au niveau du récepteur sur le satellite doit être de au moins 10 $\mu V_{eff}/m$.
R.N.: 0,833 W

(*) Les réponses notées $\simeq$ dépendent des valeurs laissées au choix (position de l'observateur, dimension de quelque chose, etc).