Université Paris 7 - Denis Diderot septembre **2008**
PH 457

Introduction à la Relativité Générale

Durée 3h.

Les calculatrices ne sont pas autorisées (et d'ailleurs complètement inutiles ici), pensez à éteindre vos téléphones portables. Barème très très indicatif : 3, 2, 15

Les notations et conventions sont celles du cours, à l'exception de l'exercice I on se placera dans un système d'unités où $c = 1$.

I. Questions de cours.

A. On considère deux observateurs A et B, situés dans le vide, en mouvement uniformément accéléré de même accélération $\boldsymbol{a} = \| \boldsymbol{a} \| \frac{\boldsymbol{AB}}{\|\boldsymbol{AB}\|}$ et de vitesses $v \ll c$. On peut donc rapporter ces deux observateurs à un référentiel commun. L'observateur B, que nous supposons placé à une distance spatiale l en arrière de A, envoie à t_0 un photon de longueur d'onde λ_e vers A. L'observateur A reçoit le photon à t_1 tel que $\triangle t = t_1 - t_0 = l/c$. La longueur d'onde du photon observé est notée λ_o.

(a) Montrer que

$$z := \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{al}{c^2}. \tag{1}$$

On rappelle l'expression du décalage Doppler non relativiste entre deux observateurs, placés dans une configuration identique a la précédente mais avec une différence de vitesse Δv constante :

$$z = \frac{\Delta v}{c}. \tag{2}$$

(b) Dans le cadre de la Relativité Générale ce résultat persiste-t'il si l'accélération est d'origine gravitationelle ?

B. On rappelle l'expression de la métrique de Schwarzschild dans le système de coordonnées «sphériques» $\{t, r, \theta, \varphi\}$:

$$\begin{aligned} d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - \\ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \tag{3}$$

(a) Donner, en justifiant votre réponse, un vecteur de Killing dans ce système de coordonnées.

II. Approximation newtonienne et constante cosmologique

A. On considère les équations d'Einstein *avec* constante cosmologique et une distribution de matière telle que seule la composante $T_{00} = \rho$, ou ρ est la densité de matière, est non nulle.

(a) Montrer que :

$$R^i{}_j = \delta^i{}_j \left(\frac{1}{2}\mathcal{R} + \Lambda\right).$$

(b) En déduire :

$$\mathcal{R} = -2(R^0{}_0 + 3\Lambda).$$

(c) En admettant que $g_{00}R^0{}_0 \gg g_{i0}R^i{}_0$ en déduire :

$$R_{00} = 4\pi G\rho - g_{00}\Lambda. \tag{4}$$

B. On considère à présent une métrique $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $h_{\mu\nu}$ une perturbation c'est-à-dire : $|h_{\mu\nu}| << 1$. On supposera de plus que toutes les dérivées de h sont du même ordre que h, i.e. $|\partial^{(n)} h_{\mu\nu}| \simeq |h|, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **Dans tous les calculs on se limitera au premier ordre en h ou en ses dérivées.**

(a) En posant $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + X^{\mu\nu\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$, montrer que l'on a :

$$X^{\mu\nu\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}.$$

On pourra donc poser dans la suite $h^{\mu\nu} := \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ et donc $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$.

(b) Montrer que dans cette approximation on a :

$$\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\kappa}\big(\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}\big). \tag{5}$$

(c) Montrer par un calcul explicite que l'approximation $g_{00}R^0{}_0 \gg g_{i0}R^i{}_0$, faite avec les hypothèses de la partie A, est justifiée pour les champs faibles.

C. On rappelle que l'équation purement newtonienne d'une particule libre de masse unité dans un potentiel statique Φ peut s'écrire :

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{d\lambda^2} + \boldsymbol{\nabla}\Phi\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0, \text{ avec } \frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0,$$

où $\lambda = at + b$ est un paramètre réel.

(a) Quelle est la nature de la trajectoire suivie par la particule du point de vue de la Relativité Générale ?

(b) En déduire que les coefficients de connexion correspondants à ce potentiel newtonien se réduisent à Γ^i_{00}, coefficient que l'on explicitera. On prendra garde au fait que dans l'équation ci-dessus c'est la métrique euclidienne à trois dimensions $(+,+,+)$ qui est utilisée, $\boldsymbol{\nabla}\Phi$ est le 3-vecteur de composantes $(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^i$.

(c) En déduire $g_{00} \equiv g_{tt}$ en fonction du potentiel statique Φ. Pour ce faire on considérera l'expression (5) pour une perturbation h indépendante du temps.

(d) Montrer que l'on a également $R_{00} = \triangle\Phi$.

(e) Comment se récrit l'équation (4) ? Commenter le résultat par rapport au cas newtonien.