9. Introduction à la mécanique analytique

La mécanique analytique permet d'obtenir immédiatement les équations d'évolution en fonction des forces appliquées uniquement. Les liaisons (ou contraintes) sont supposées parfaites, *c.a.d.*, les forces de liaison ne travaillent pas. Ceci permet de les introduire dans le formalisme en choisissant des coordonnées tennant compte des degrés de liberté et de la symétrie du problème. On appelle ces coordonnées généralisées parce que elles représentent des déplacements linéaires ainsi qu'angulaires. Dans le premier cas, les forces et moments associés sont les composants des vecteurs force et quantité de mouvement ; cependant, dans le deuxième cas, ce sont les composants des vecteurs moment de force et moment cinétique. Le fait d'introduire les liaisons de cette façon présente un grand avantage dans la résolution des problèmes. En plus, comme le formalisme est basé sur des principes variationnels, nous allons introduire ici brièvement ces principes utiles pour résoudre des problèmes d'optimisation.

9.1 Principe de d'Alembert et équations de Lagrange

Dans la suite nous considérons un système de n points matériels, énumérés par l'indice i, soumis à des forces de contrainte ou de liaison parfaites. Ces forces imposent que le système a k degrés de liberté. Comme nous avons $3n$ coordonnées, décrivant les positions des n points, et $k < 3n$ degrés de liberté, les $3n$ coordonnées ne sont pas indépendantes mais reliées par $3n - k$ équations. Ces équations de liaison ou de contrainte ont la forme suivante

$$f_\nu(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = 0,\ \nu = 1, \ldots, 3n - k$$

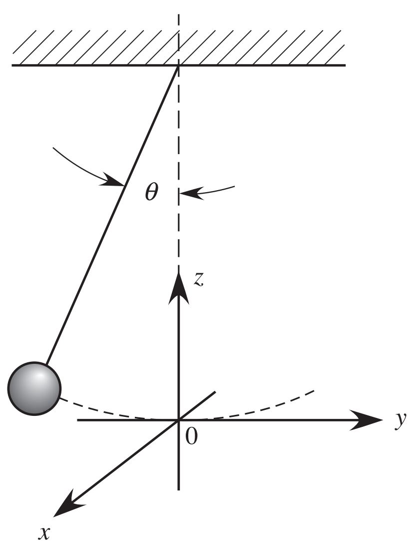
En principe, ces équations peuvent contenir les vitesses $\mathbf{v}_i$, mais nous nous limitons ici au cas rencontré le plus souvent où les contraintes ne dépendent pas des $\mathbf{v}_i$. Ce cas est connu sous le nom de liaisons holonômes.

En tenant compte des $3n - k$ contraintes on peut trouver des nouvelles coordonnées $q_1, \ldots, q_k$ décrivant, ensemble avec le temps t, entièrement le système :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \quad i = 1, \ldots, n$$

Ces nouvelles coordonnées généralisées sont le choix idéal pour décrire le système car elles sont moins nombreuses et elles contiennent les liaisons.

<u>exemple</u> : pendule mathématique plan



En choisissant les coordonnées cartésiennes (x, y, z) pour décrire le mouvement du point matériel attaché au fil on a les liaisons holonômes parmi eux

$$x = 0 \quad \text{(plan)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$$

La dernière équation est dûe à la force de liaison qui est la tension du fil.
On est parti de 3 coordonnées (un seul point matériel, $n = 1$) et on a trouvé 2 équations de liaison, le système a donc $k = 1$ degré de liberté. La coordonnée généralisée est l'angle polaire θ.

Avec ces bases nous introduisons maintenant le principe de d'Alembert pour trouver des équations pour l'énergie cinétique et ensuite les équations de Lagrange. Le principe de d'Alembert est de décomposer les forces en forces de contraintes $\mathbf{F}_c$ et en forces appliquées $\mathbf{F}_a$. Ensuite on multiplie la loi de Newton avec un déplacement (virtuel) $\delta\mathbf{r}$ compatible avec les contraintes.

Comme les contraintes sont supposées parfaites, elle ne travaillent pas et $\mathbf{F}_c \cdot \delta\mathbf{r} = 0$. Pour un point matériel cela donne :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_c \\
&\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} \\
&(\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_c - \dot{\mathbf{p}})\, \delta\mathbf{r} = 0 \\
&(\mathbf{F}_a - \dot{\mathbf{p}})\, \delta\mathbf{r} = 0
\end{aligned}$$

Pour plusieurs points matériels :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_{a,i} - m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right) \delta\mathbf{r}_i = 0}$$

Ceci est le principe de d'Alembert. Dans ce principe on a éliminé les contraintes en introduisant des déplacements virtuels compatibles avec les contraintes.

Maintenant nous exprimons les $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{v}_i$ en coordonnées généralisées, énumérées par l'indice j :
Pour un point matériel

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(q_1, \ldots, q_k, t) \\
&\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_{\substack{\text{tangente à la} \\ \text{trajectoire}}} \\
&\delta\mathbf{r} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j
\end{aligned}$$

En faisant ces remplacements dans l'équation de d'Alembert, il vient en particulier :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_a \cdot \delta\mathbf{r} &= \sum_j \mathbf{F}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \delta q_j \\
&= \sum_j Q_j \delta q_j
\end{aligned}$$

avec $Q_j = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$ la force généralisée associée à la coordonnée généralisée q_j. La quantité $Q_j \delta q_j$ a la dimension d'un travail. Quand δq_j est un déplacement linéaire, Q_j a la dimension d'une force, quand δq_j est un changement d'angle, Q_j a la dimension d'un moment de force.

Pour n points matériels les forces généralisées sont

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{a,i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Avec ceci le principe de d'Alembert vient

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (\mathbf{F}_{a,i} - \dot{\mathbf{p}}_i) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_j Q_j \delta q_j - \sum_{i,j} \dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

Nous analysons le deuxième terme pour un point matériel

$$m\ddot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) - m\dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right)$$

$$\begin{aligned} q_j, \dot{q}_j \quad &\text{indépendantes} \quad \Longrightarrow \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right) &= \sum_v \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_v \partial q_j} \dot{q}_v \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_v} \dot{q}_v = \frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j}\right) - m\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}T\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}T
\end{aligned}
$$

avec $T = \frac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique. Pour n points matériels $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_i^2$ et le principe de d'Alembert vient

$$
\sum_j \left(Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}T\right) + \frac{\partial}{\partial q_j}T\right)\delta q_j = 0
$$

Comme les déplacements virtuels δq_j sont indépendants, il faut que chaque coefficient des δq_j soit nul. On trouve ainsi les k équations de Lagrange de 1^{re} espèce

$$
\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}T\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}T = Q_j}
$$

Ce sont des équations différentielles du second ordre en les q_j.

On suppose maintenant que les forces $\mathbf{F}_{a,i}$ sont conservatives et qu'elles dérivent d'un potentiel $U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ de façon que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{a,i} &= -\boldsymbol{\nabla}_i U \\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i}\right) U
\end{aligned}
$$

Pour l'exemple d'un seul point matériel nous notons que

$$
U = U\left(x\left(q_1, \ldots, q_k\right), y\left(q_1, \ldots, q_k\right), z\left(q_1, \ldots, q_k\right)\right)
$$

on a donc

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial q_j} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)\\
&= -\boldsymbol{\nabla} U\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\\
&= \mathbf{F}_a\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}\\
&= Q_j
\end{aligned}
$$

En insérant cette expression pour Q_j et en se servant du fait que $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}U = 0, \forall j$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-U)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}(T-U)=0$$

On appelle le Lagrangien $L = T - U$ et on obtient ainsi les k équations de Lagrange de la seconde espèce pour les forces conservatives

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}L=0}$$

Avant de passer aux exemples, nous notons que ces équations peuvent se mettre sous la même forme également dans le cas d'un potentiel dé pendant de la vitesse, comme c'est le cas pour le potentiel à la base de la force de Lorentz. Dans ce cas on a $Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}U\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}U$ avec $U = U\left(q_1,\dots,q_k,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,t\right).$

9.2 Illustrations du formalisme Lagrangien

La marche à suivre pour traiter un problème avec le formalisme Lagrangien est la suivante :

1. choix d'un système de coordonnées généralisées $q_1, \ldots, q_k$; ce sytème doit être holonôme ;
2. calculer le Lagrangien L en exprimant T et U en fonction des variables $\{q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t\}$;
3. écrire les k équations de Lagrange ;
4. étudier leurs solutions.

exemple 1 mouvement rectiligne d'un point matériel
$n = 1, k = 1$, soit x la coordonnée rectiligne et coordonnée généralisée

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x)$$

L'impulsion généralisée associée à q, où le moment conjugué à q, est

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L = m\dot{x}$$

la quantité de mouvement, p.
La force généralisée associée à q est

$$\frac{\partial}{\partial q} L = \frac{\partial}{\partial x} L = -\frac{\partial U}{\partial x} = F$$

une force. On retrouve donc la loi de Newton $F = \dot{p}$.

exemple 2 pendule mathématique plan
$n = 1, k = 1$, prenons l'angle polaire θ comme coordonnée généralisée et choisissons la normalisation que $U(\theta = 0) = 0$.

$$U = mgh = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

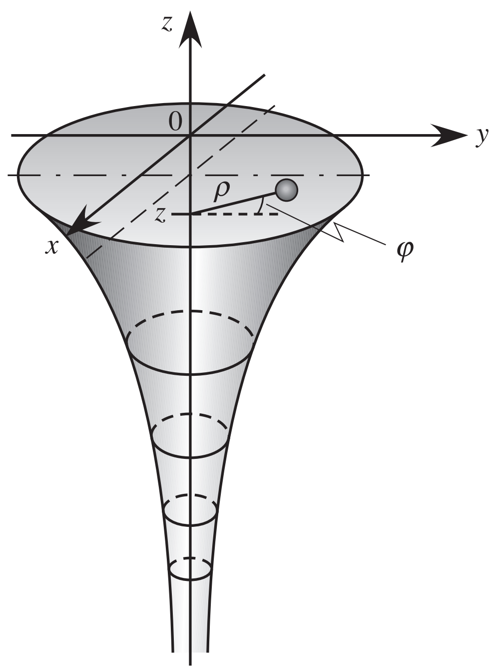
$$L = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell + mg\ell\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} = I\omega \qquad \text{moment cinétique}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta \qquad \text{moment de force}$$

Ici, l'équation de Lagrange donne le théorème du moment cinétique. Comme les équations de Lagrange sont $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{dL}{dq_j}$ d'une manière générale chacune d'elle stipule que la dérivée temporelle de l'impulsion généralisée est égale à la force généralisée, les deux étant associées à la même coordonnée q_j.

<u>exemple 3</u> point matériel sur une surface



Soit un point matériel se déplaçant sous l'action de la pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ sur la surface de révolution d'équation

$$z = -\frac{A}{\rho^\alpha}$$

avec A, α constantes, et (ρ, φ, z) les coordonnées cylindriques du point.

La surface fait la liaison holonôme entre z et ρ, nous pouvons donc supprimer une des deux pour obtenir par exemple (ρ, φ) comme coordonnées généralisées. On exprime d'abord L en (ρ, φ, z), ensuite on remplace les termes en z et $\dot{z}$ par les expressions contenant ρ et $\dot{\rho}$.

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

Ici on définit l'énergie potentielle égale à zéro à $z = 0$ et négative quand le point matériel descend dans le vase. La définition du zéro de U n'est pas important ; les dérivées $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}$ et $\frac{\partial}{\partial q_j}$ d'une constante ne donnant pas de contribution dans les équations de Lagrange. Bien évidemment il est important de décrire juste la variation de U avec les paramètres q_j, dans notre cas c'est $U(z) = mgz$.

Avec $\dot{z} = \alpha \frac{A}{\rho^{\alpha+1}} \dot{\rho}$ on trouve

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \left(\left(1 + \left(\frac{\alpha A}{\rho^{\alpha+1}} \right)^2 \right) \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mg \frac{A}{\rho^\alpha} \\ &= L\left(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \ \text{ entraîne } \ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} = cste.$$

Dans notre exemple φ est une variable dite cyclique car L ne dépend pas explicitement de φ. En général, on a pour toute variable cyclique que le moment conjugué est une constante du mouvement.

Si le temps est homogène, *c.a.d.*, si L ne dépend pas explicitement du temps, on a une deuxième constante du mouvement, c'est la fonction $\mathcal{H}\left(q, \dot{q}\right)$ définie par

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - L$$

Nous vérifions

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \sum_j \left(\dot{p}_j \dot{q}_j + p_j \ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} p_j = \dot{p}_j \ \text{voir équations de Lagrange}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \ \text{par définition}$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Par conséquent, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ entraine $\mathcal{H} = cste.$

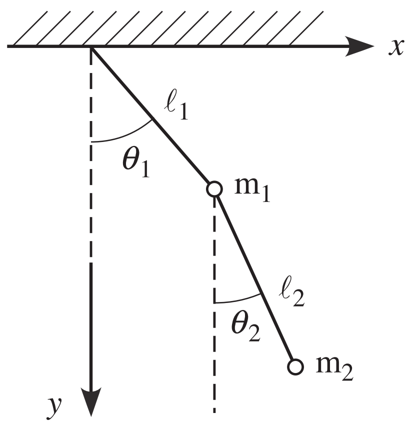
La fonction $\mathcal{H}$ est l'énergie mécanique dans le cas où les liaisons sont indépendantes du temps, telle que les forces appliquées dérivent d'un potentiel $U\left(q, t\right)$ indépendant des vitesses.

Dans ce cas $\dot{q}_j$ apparait uniquement dans T et au carré, on a

$$\sum_j \dot{q}_j p_j = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

Donc $\mathcal{H} = 2T - (T - U) = T + U = E_{méc}$.

<u>exemple 4</u> pendule double



2 degrés de liberté, coordonnées généralisées θ_1,θ_2.

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$U_1 = -mg\ell_1 \cos\theta_1$$

$$x_2 = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2$$

$$y_2 = \ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2$$

$$\dot{x}_2 = \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$

$$\dot{y}_2 = -\ell_1 \dot{\theta} \sin\theta_1 - \ell_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2}{2} \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \\ &= \frac{m_2}{2} \Big(\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\Big) \\ U_2 &= m_2 g \ell_1 \cos\theta_1 - m_2 g \ell_2 \cos\theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= T_1 + T_2 - U_1 - U_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ &+ \left(m_1 + m_2\right) g \ell_1 \cos\theta_1 + m_2 g \ell_2 \cos\theta_2 \end{aligned}$$

Equations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\Big((m_1+m_2)\,\ell_1^2\dot{\theta}_1+m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\Big)+m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$+(m_1+m_2)\,g\ell_1\sin\theta_1=0$$

$$\frac{d}{dt}\Big((m_1+m_2)\,\ell_2^2\dot{\theta}_2+m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\Big)-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$+m_2g\ell_2\sin\theta_2=0$$

$$\begin{matrix}\theta_1\ll 1 & & \cos\theta_1\approx 1 & \sin\theta_1\approx\theta_1\\ & \Longrightarrow & & \\ \theta_2\ll 1 & & \cos\theta_2\approx 1 & \sin\theta_2\approx\theta_2\end{matrix}$$

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\,\ell_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2+(m_1+m_2)\,g\ell_1\theta_1=0\\ m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1+m_2g\ell_2\theta_2=0\end{cases}$$

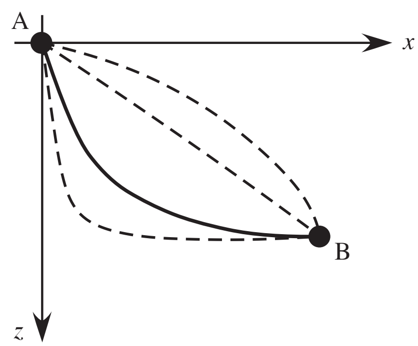
$$\begin{cases}(m_1+m_2)\,\ell_1\ddot{\theta}_1+m_2\ell_2\ddot{\theta}_2+(m_1+m_2)\,g\theta_1=0\\ \ell_2\ddot{\theta}_2+\ell_1\ddot{\theta}_1+g\theta_2=0\end{cases}$$

Système d'équations différentielles linéaires du $2^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants.

9.3 Introduction au calcul variationnel

Le calcul variationnel extrémise une quantité, par exemple il minimise le temps pris pour aller de A à B en identifiant la trajectoire idéale pour des conditions de propagation posées. Il s'agit d'un problème d'optimisation. De tels problèmes sont très fréquents pour les ingénieurs.

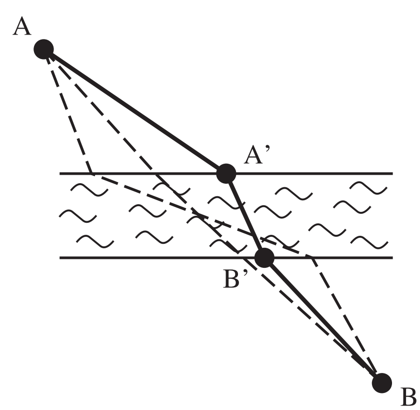
exemple 1 la brachistochrone



Le problème est de trouver la trajectoire qui minimise le temps pris par un corps de A à B, le corps soit lâché avec une vitesse initiale nulle et soumis à un champ gravitationel.
Nous trouverons dans le calcul plus loin que la courbe est une cycloïde.

exemple 2 principe de Fermat

Le principe de Fermat est que le chemin pris par la lumière est celui minimisant le temps.

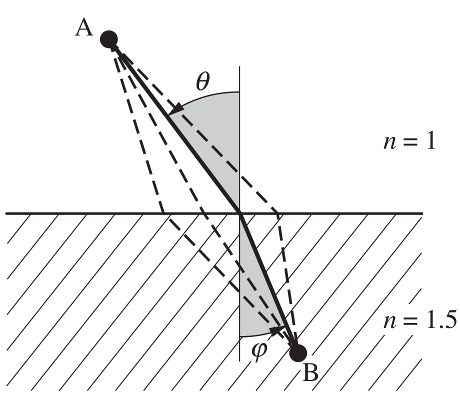


Considérons d'abord l'analogie d'un coureur-nageur (vitesse v_1 et v_2 avec $v_1 > v_2$) qui souhaite aller en un temps minimal de A à B (voir figure).

Le temps est donné par

$$
\begin{aligned}
t &= \int_A^B \frac{ds}{v} \\
&= \int_A^{A'} \frac{ds}{v_1} + \int_{A'}^{B'} \frac{ds}{v_2} + \int_{B'}^{B} \frac{ds}{v_1} \\
&= \frac{1}{v_1}\left(|AA'| + |BB'|\right) + \frac{1}{v_2}\,|A'B'|
\end{aligned}
$$

Rendre le temps extrémal, dans ce cas minimal, correspond à chercher des trajectoires où le passage aux trajectoires au voisinage immédiat de la trajectoire trouvée n'induit pas de variation en t, $\delta t = 0$. Dans notre exemple la variation de la trajectoire correspond à déplacer les points A' et B' le long des quais de la rivière. La trajectoire consiste donc en 3 bouts droits et elle est paramétrisée par les deux coordonnées $x_{A'}$ et $x_{B'}$.



Revenons à la lumière. Elle se propage dans un médium d'indice de réfraction n avec $v = \frac{c}{n}$.
On a donc

$$
\delta t = \delta \int_A^B \frac{n}{c} ds = 0
$$

$$
\Longrightarrow \ \delta \int_A^B n ds = 0
$$

Dans ce cas la trajectoire est composée de deux bouts droits, et elle est paramétrisée par la position x de l'intersection. De dire que $\delta \int_A^B n ds = 0$ équivaut à dire que $\frac{dt(x)}{dx} = 0$ et emmène à la loi de réfraction (voir exercice).

Le principe de moindre action

On va maintenant utiliser l'approche du calcul variationnel pour dériver un grand principe, de nature très fondamentale en physique. Nous partons du principe de d'Alembert :

$$\left(\mathbf{F} - m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\delta\mathbf{r} = 0$$
$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\mathbf{F} - m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\delta\mathbf{r} = 0$$

Comme le début et la fin de la trajectoire sont fixes on a $\delta\mathbf{r}\left(t_1\right) = \delta\mathbf{r}\left(t_2\right) = 0$. Pour des forces qui dérivent d'un potentiel U on a

$$\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} = -\nabla U\cdot\delta\mathbf{r} = -\delta U$$

δU est le changement de potentiel suite au déplacement $\delta\mathbf{r}$.
Par ailleurs

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt\ m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} = \underbrace{-m\delta\mathbf{r}\cdot\ \mathbf{v}\big|_{t_1}^{t_2}}_{0\text{ car }\delta\mathbf{r}(t_1)=\delta\mathbf{r}(t_2)=\mathbf{0}} + \int_{t_1}^{t_2} dt\ m\ \mathbf{v}\frac{d}{dt}\left(\delta\mathbf{r}\right)$$

On va se convaincre que $\frac{d}{dt}\left(\delta\mathbf{r}\right) = \delta\mathbf{v}$, pour cela on pose (pour une coordonnée)

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon f\left(x\right) \\ \delta x &= x_1 - x \\ &= \varepsilon f\left(x\right) \end{aligned}$$

avec ε infiniment petit.

$$\begin{aligned} \delta v &= \delta\dot{x} \\ &= \dot{x}_1 - \dot{x} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\varepsilon f\left(x\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\delta x\right) \end{aligned}$$

et des relations analogues pour les autres coordonnées. On a ainsi

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt\ m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} dt\ m\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v} = \int dt\delta\left(T\right)$$

soit finalement

$$\int dt\ \delta\left(T-U\right) = 0$$

L'intégrale $\int dtL = S$ s'appelle **l'action**. On vient de démontrer le **principe de Hamilton de la moindre action** :

L'action est extrémum pour le chemin de l'espace de configuration $(q_i, \dot{q}_i)$ qui correspond au chemin effectif.

De Hamilton à Lagrange

Considérons $L = L\left(q, \dot{q}_i, t\right)$, *i.e* une seule coordonnée, pour simplifier les écritures. Soit $q\left(t\right)$ qui minimise S (l'action). Calculons S pour $q\left(t\right)+\delta q\left(t\right)$, où $\delta q\left(t\right)$ est quelconque, avec $\delta q\left(t_1\right) = \delta q\left(t_2\right) = 0$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t\right)dt - L\left(q, \dot{q}, t\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q})dt\end{aligned}$$

Une intégration par partie du deuxième terme donne :

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2} - \int \delta q\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q dt\end{aligned}$$

Comme on doit avoir $\delta S = 0$ pour δq quelconque il faut

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

La brachistochrone

Pour donner un exemple explicite nous donnons ci-dessous la solution de la brachistochrone. On utilise une équation paramétrique de la trajectoire du point matériel. Soit q ce paramètre, variant de $q = a$ en A à $q = b$ en B. Comme il n'y a pas de frottement et que la courbe est supposée faire partie d'un référentiel d'inertie, l'énergie mécanique est conservée.

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U = -mgz$$

l'axe z est vers le bas et $U = 0$ en A. En A, $v = 0$, donc $E_{méc} = T + U = 0$.

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz$$

$$v^2 = 2gz$$

La trajectoire est donnée par

$$x = x(q)$$

$$z = z(q)$$

avec

$$q = a \quad \text{le point matériel est en } A$$

$$q = b \quad \text{le point matériel est en } B$$

Le mouvement de la masse est donné par $q = q(t)$ avec $x = x(q), z = z(q)$ définissent la position de la masse en fonction du temps.

Calcul de la vitesse

$$\dot{x} = \frac{dx}{dq} \cdot \dot{q}$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dq} \cdot \dot{q}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 2gz$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{2gz}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} \cdot \frac{dq}{dt} = \sqrt{2gz}$$

$$\sqrt{2g} \cdot dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{z}}$$

$$\int_0^t \sqrt{2g} \cdot dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{z}}$$

$$\sqrt{2g} \cdot t = I = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} \cdot \frac{dq}{\sqrt{z}}$$

Ce qu'on cherche c'est $\begin{cases} x = x\left(q\right) \\ z = z\left(q\right) \end{cases}$ qui rend I minimum.

C'est ce type de problème qui débouche sur le calcul des variations qui est très utilisé par les ingénieurs. Il n'y a pas lieu de développer un savoir faire complet en la matière. Ce passage est montré à titre d'invitation à l'élargissement des horizons de la mécanique.

Imaginez que vous deviez déterminer expérimentalement quelle est la courbe optimale. Vous partiriez d'une courbe que vous pensez être la bonne. Puis vous évalueriez des courbes voisines, par la mesure du temps pris sur la courbe, et chercheriez ainsi l'optimum. L'optimum est atteint quand le temps ne varie plus en passant aux courbes voisines.

On suppose que $\begin{cases} x = x(q) \\ z = z(q) \end{cases}$ est la solution, et on considère une courbe infiniment proche.

$$x_1 = x + \varepsilon\alpha(q)$$
$$z_1 = z$$

avec ε infiniment petit et $\alpha(q)$ quelconque, nul à $q = a$ et à $q = b$. On va substituer dans l'intégrale pour les valeurs x_1 et z_1 :

$$I_1 = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{z}} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dq}\right)^2} \cdot dq$$

On veut calculer $I_1 - I$. Il y aura des termes en ε et ε^2. Si $x(q)$ et $z(q)$ donnent le minimum de I, alors le terme en ε doit être nul.

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dq}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq} + \varepsilon\frac{d\alpha}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} + \varepsilon\frac{d\alpha}{dq}\left[\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} 2\frac{dx}{dq}$$

$$= R + \varepsilon\frac{d\alpha}{dq}\frac{1}{R}\frac{dx}{dq} \quad \text{, où } R = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2}$$

$$I_1 - I = \varepsilon \int_a^b \frac{1}{\sqrt{z}} \underbrace{\frac{1}{R}\frac{dx}{dq}\frac{1}{\sqrt{z}}}_{u} \overbrace{dq\frac{d\alpha}{dq}}^{dv}$$

$$= \varepsilon\left(\underbrace{\frac{1}{R}\frac{dx}{xq}\frac{1}{\sqrt{z}}\alpha\ (q)\Big|_a^b}_{=0 \text{ car } \alpha(a)=(b)=0} - \int_a^b \alpha \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{1}{R}\frac{dx}{xq}\right)\right) + \varepsilon^2 \ldots$$

α est quelconque. On pourrait prendre α tel que l'intégrant soit toujours > 0.

Pour que le coefficient de ε soit nul, il faut donc que

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{1}{R}\frac{dx}{dq} = C = cste$$

$$dx = C\sqrt{z}\sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2}dq$$

$$dx^2 = C^2 z\left(\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2\right)dq^2$$

$$dx^2 = C^2 z\left(dx^2 + dz^2\right)$$

$$dx^2 = \frac{C^2 z dz^2}{1 - C^2 z}$$

$$dx = dz\sqrt{\frac{z}{\frac{1}{C^2} - z}}$$

Cette équation différentielle est connue pour être l'équation différentielle d'une cycloïde

$$x = R\left(\vartheta - \sin\left(\vartheta\right)\right)$$

$$z = R\left(1 - \cos\left(\vartheta\right)\right)$$