

7. COLLISIONS.

Dans la vie courante on essaye d'éviter des collisions. Les collisions sont accompagnées de changements de vitesse importants ce qui implique de grandes accélérations et de grandes forces qui impliquent des dégâts ou des désagréments. Des collisions sont parfois recherchées dans certains sports ou passe-temps (boules, billard, golf, polo, bowling, etc.).

Mais les collisions de loin les plus nombreuses sont celles qui ont lieu à l'échelle microscopique, entre molécules, atomes et électrons. Les molécules des gaz de l'air passent leur temps à s'entrechoquer ou à rebondir sur les solides ou les liquides qu'elles rencontrent. Les molécules des liquides font de même. Finalement, les électrons dans les solides s'entrechoquent entre eux ou avec les atomes du solide.

Ces collisions sont responsables des échanges de chaleur et notamment du flux de chaleur des substances plus chaudes vers les parties plus froides. Elles permettent aussi des réactions chimiques dans les gaz et dans les liquides. Pratiquement toutes les réactions biochimiques de la vie ont lieu lors de collisions entre molécules.

À un niveau encore plus petit, les réactions entre particules élémentaires (électrons, neutrons, quarks, etc.) comportent des collisions.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à des collisions entre objets simples qui ressemblent plus à des atomes ou à des neutrons qu'à des boules de billard. La raison est que des boules de billard peuvent tourner (autour de n'importe quel axe) ce qui modifie la collision. Nous ne prendrons que des objets qui ne tournent pas. Malgré cette restriction, beaucoup des résultats que nous allons trouver décrivent assez bien le comportement des objets macroscopiques dans des collisions... sans trop de rotations.

7.1 Collisions en une dimension.

Les collisions en une dimension sont très rares dans la nature. Il s'agit, par exemple du choc entre deux balles ou entre deux billes dont les deux centres se déplacent sur une même droite. C'est un choc central à la suite duquel les deux billes continuent à se déplacer le long de la même droite. On peut obtenir, dans la pratique, des collisions à une dimension en maintenant les objets sur une trajectoire droite déterminée par un mécanisme de guidage (des rails, par exemple). Le seul intérêt d'étudier ce type de collisions est la simplicité du processus et des calculs à faire.

Prenons deux objets de masses m_1 et m_2 qui se déplacent sur une droite à des vitesses (avant le choc) u_1 et u_2 ⁽¹⁾.

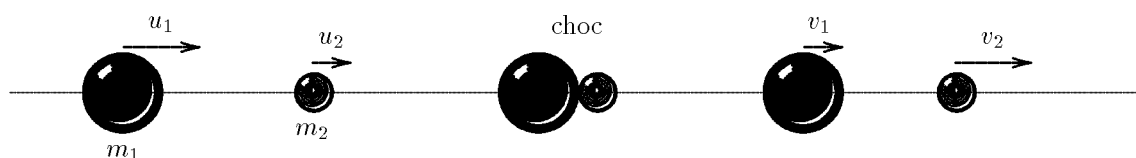


Figure 7.1 Avant le choc l'objet de gauche rattrape celui de droite. Après les objets s'éloignent.

Nous avons déjà mentionné le fait que, dans certaines collisions, l'énergie cinétique est conservée et que, dans d'autres, une partie ou toute l'énergie cinétique se transforme en chaleur ou en un autre type d'énergie (potentielle, par exemple). Les collisions qui se classent dans le premier

⁽¹⁾ Je copie la notation sur le Resnick-Halliday: les vitesses d'avant le choc sont des u et celles d'après sont des v .

type reçoivent le nom de **collisions élastiques** ou **collisions complètement élastiques**. Dans le deuxième cas les collisions sont des **collisions inélastiques**. Dans le cas où le maximum d'énergie cinétique est transformée on a des **collisions totalement inélastiques**.

Commençons par faire le calcul pour le cas où toute l'énergie cinétique est conservée. Dans ce cas:

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

D'autre part, le moment linéaire est toujours conservé:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (7.1)$$

Nous avons un système de deux équations à deux inconnues (v_1 et v_2). En multipliant par deux la première équation et en regroupant dans les deux équations les termes correspondants à chaque objet nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} m_1 (u_1^2 - v_1^2) &= m_2 (v_2^2 - u_2^2) \\ m_1 (u_1 - v_1) &= m_2 (v_2 - u_2) \end{aligned}$$

En divisant la première équation par la seconde⁽²⁾:

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

soit:

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1$$

Le terme $u_1 - u_2$ est la vitesse à laquelle se rapprochent les deux objets avant le choc (la vitesse relative entre les deux). Et le terme $v_2 - v_1$ est la vitesse à laquelle les deux objets s'éloignent après le choc. Autrement dit: dans un choc complètement élastique la vitesse relative entre les objets s'inverse au moment du choc. S'ils se rapprochaient à vitesse v , après ils s'éloignent à la même vitesse v .

On constate par l'expérimentation que ce qui caractérise les chocs entre deux objets donnés est le rapport entre la vitesse relative avant et après le choc. Par exemple, si vous faites rebondir une balle au sol, à chaque rebond la vitesse du rebond sera 80% de la vitesse d'impact. Si vous faites la même expérience avec une autre balle vous obtiendrez, peut-être, 95% ou 60%. Mais pour chaque balle le même coefficient se répète. On définit le **coefficient de restitution** e comme le rapport (inversé de signe) entre la vitesse relative après le choc et la vitesse relative avant le choc.

$$\text{Coefficient de restitution} = e = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2} \quad (7.2)$$

La valeur du coefficient de restitution est comprise entre 1 pour des collisions totalement élastiques et zéro pour des collisions totalement inélastiques.

Pour trouver les valeurs des vitesses après la collision pour un coefficient de restitution donné e , nous sortons la variable v_2 de la définition 7.2:

$$v_2 = v_1 + e(u_1 - u_2)$$

et la remplaçons dans l'équation 7.1:

$$m_1 v_1 + m_2 (v_1 + e(u_1 - u_2)) = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

d'où on extrait v_1 :

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} - e \frac{m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2) \quad (7.3)$$

en faisant la même opération pour v_2 on trouve:

$$v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} + e \frac{m_1}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2) \quad (7.4)$$

⁽²⁾ Rappel: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Remarquez que le premier terme dans les deux dernières équations est la vitesse du centre de masses du système. Ces équations s'allègent si l'on travaille dans le référentiel du centre de masses.

Remarquez aussi que pour un choc totalement inélastique ($e = 0$), on retrouve le résultat que nous connaissions, à savoir que, comme les deux objets restent collés, la vitesse finale des deux objets est la même et égale à celle du centre de masses.

Exemple 7.1 La balle qui rebondit. Prenons une balle qu'on laisse tomber sur une surface horizontale solide. La masse de la balle sera m , et la hauteur de chute h_0 . L'objet 2 n'est autre que la terre elle-même dont la masse est immensément plus grande que celle de la balle. L'équation 7.3 devient (limite quand $m_2 \rightarrow \infty$):

$$v_1 = u_2 - e(u_1 - u_2)$$

mais u_2 est la vitesse de la terre qui est égale à zéro puisque nous mesurons les vitesses par rapport à la terre. Donc:

$$v_1 = -eu_1$$

Quand la balle rebondit au sol, sa vitesse s'inverse et sa valeur absolue est, en pratique, plus faible que la vitesse d'arrivée.

Si la balle est descendue d'une hauteur h_0 sa vitesse d'arrivée sera:

$$v_1 = \sqrt{2gh_0}$$

la vitesse du rebond sera:

$$u_1 = ev_1$$

et la hauteur à laquelle la balle remontera sera: $h_1 = \frac{u_1^2}{2g}$. En remplaçant:

$$h_1 = \frac{e^2 2gh_0}{2g} = e^2 h_0$$

Pour le nouveau rebond la balle part d'une hauteur réduite d'un facteur e^2 , et pour le suivant la hauteur sera encore réduite de e^2 , et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Jusqu'à l'infini? Eh non! Un résultat amusant est que, même si théoriquement le nombre de rebonds est infini, le temps mis pour les faire est fini.

Le temps pour arriver à la hauteur h_1 est $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Donc le temps total du premier rebond (montée et descente) sera:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Le rebond suivant montera à une hauteur $h_2 = e^2 h_1$ et le temps sera:

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 2\sqrt{\frac{2e^2 h_1}{g}} = e 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = et_1$$

pour les rebonds suivants les temps seront $e^2 t_1, e^3 t_1, e^4 t_1, \dots$. Mais la somme de tous ces temps est finie. Le temps de tous les rebonds sera:

$$t_1(1 + e + e^2 + e^3 + \dots) = \frac{t_1}{1 - e}$$

Ce résultat est amusant et ne présente aucun intérêt en physique. Il prouve néanmoins que, théoriquement⁽³⁾, on peut avoir un nombre infini de processus physiques qui se déroulent dans un temps fini. Ceci montre l'idiotie des raisonnements sophistes comme celui de "Achille et la tortue"

⁽³⁾ Dans la pratique, les rebonds s'arrêtent quand leur fréquence atteint celle des modes d'oscillations propres de la balle.

qui sont basés sur l'hypothèse cachée qu'il est impossible d'avoir un nombre infini de subdivisions imaginaires dans un temps fini.

Exemple 7.2 Le carreau à la pétanque. Un cas remarquable de collision est celui de deux objets de même masse dont un à l'arrêt et avec un coefficient de restitution très proche de un.

En prenant $e = 1$, l'équation 7.3 nous donne v_1 :

$$v_1 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = 0$$

l'équation 7.4 donne:

$$v_2 = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} u_1 = u_1$$

Ainsi le premier objet, celui qui arrive sur l'autre immobile, s'arrête net, et celui qui était immobile part avec la même vitesse que le premier. Dans la réalité, et donc dans la pétanque, le coefficient de restitution n'est pas tout à fait égal à un. La boule du "tireur" n'arrive pas horizontalement. Finalement sa trajectoire ne passe pas exactement par le centre de la boule à terre. On pourrait s'attendre à que les "carreaux" soient très rares et que l'on ne voie que des "palets". Heureusement il y a le frottement avec la terre qui a tendance à freiner les petites déviations latérales.

7.2 Collisions en deux et trois dimensions.

Le cas plus général, et plus courant des collisions est celui de collisions non-centrales (vous faites un palet à la place d'un carreau). Comme pour la pétanque, l'écart entre la trajectoire actuelle et la trajectoire qui donnerait une collision centrale, est imprévisible dans la plupart des phénomènes physiques. Cet écart est nommé **paramètre du choc**. Comme sa valeur est imprévisible, sa définition ne présente aucun intérêt⁽⁴⁾.

Examinons la collision entre un objet 1 de masse m_1 et un autre de masse m_2 . Nous allons prendre le référentiel de l'objet 2. Ainsi, au départ, l'objet 1 se dirige à vitesse u_1 vers l'objet 2 à l'arrêt. Le fait de prendre le référentiel de l'objet 2 n'enlève pas de généralité au problème. Nous prendrons l'origine de coordonnées au point d'impact. L'axe horizontal sera celui des x et le vertical celui des y .

Après le choc l'objet 2 part dans la direction donnée par l'angle θ_2 (voir figure) et l'objet 1 dans la direction donnée par θ_1 . La conservation du moment linéaire nous donne, pour la direction x :

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2$$

Dans le sens des y le moment linéaire est zéro:

$$0 = m_1 v_1 \sin \theta_1 - m_2 v_2 \sin \theta_2$$

Supposons que le choc soit élastique. Dans ce cas l'énergie cinétique est conservée:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

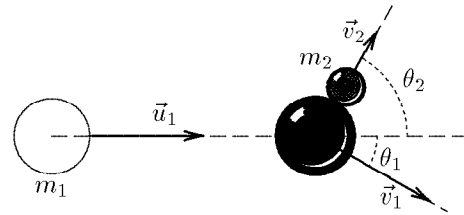


Figure 7.2 L'objet 1 percute l'objet 2 à l'arrêt. Dans ce choc non-central chaque objet part dans une direction différente.

⁽⁴⁾ Dans certains cas il est intéressant de faire un choc non central à la pétanque ou au bowling. Par contre, au billard, le paramètre de choc est fondamental et s'appelle la "quantité de bille". On le règle en ajustant le point d'impact de la queue sur la première bille en ajustant l'"effet de côté" et la "hauteur d'attaque".

Nous nous retrouvons avec 3 équations et 4 variables: v_1 , v_2 , θ_1 , et θ_2 . Il nous manque quelque chose relié au paramètre du choc qui nous donnerait une relation supplémentaire. Il nous faudrait encore savoir comment relier le paramètre du choc aux vitesses et aux angles. Imaginez par exemple que les objets, au lieu d'être gentiment sphériques comme dans le dessin, soient ovoïdes, parallélépipédiques, ou aient la forme d'un ballon de rugby. Chaque cas demande une étude particulière (mais il ne le mérite peut-être pas!). En dehors des cas très particuliers, comme le billard, on ne s'intéresse pas au résultat d'un choc pour un paramètre de choc particulier. On s'intéresse plus souvent aux relations entre les angles ou les vitesses finales des particules. C'est le cas en physique nucléaire où on étudie les trajectoires des particules (parfois des centaines) produites par une réaction entre particules ou entre noyaux. On construit des dispositifs (parfois gigantesques) pour mesurer les angles et les vitesses des particules issues de la réaction. C'est à partir de ces études que l'on conclut qu'une certaine particule a été créée (et qu'elle a disparu quelques femtosecondes après).

Une illustration de ce que l'on peut faire quand on ne connaît pas le paramètre de choc ni son influence sur les angles est la suivante: traitons le cas d'un choc entre deux objets de masses égales. Calculons quel est l'angle θ_2 pour un angle θ_1 donné.

Nous commençons par ré-écrire les trois équations après avoir éliminé m et le $\frac{1}{2}$:

$$u_1 = v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 \quad (7.5)$$

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2 \quad (7.6)$$

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (7.7)$$

On ré-écrit l'équation 7.5 sous la forme $u_1 - v_1 \cos \theta_1 = v_2 \cos \theta_2$, on l'élève au carré puis on lui additionne l'équation 7.6 élevée elle aussi au carré:

$$\begin{aligned} u_1^2 + v_1^2 \cos^2 \theta_1 - 2u_1 v_1 \cos \theta_1 &= v_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ v_1^2 \sin^2 \theta_1 &= v_2^2 \sin^2 \theta_2 \\ u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta_1 &= v_2^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

On soustrait l'équation 7.7 de l'équation 7.8:

$$2v_1^2 - 2u_1 v_1 \cos \theta_1 = 0$$

La solution $v_1 = 0$ est une solution étrangère introduite par les élévations au carré. On la rejette. Il nous reste:

$$v_1 = u_1 \cos \theta_1$$

On peut remplacer v_1 dans l'équation 7.7:

$$v_2^2 = u_1^2 - v_1^2 = u_1^2 - u_1^2 \cos^2 \theta_1 = u_1^2 (1 - \cos^2 \theta_1) = u_1^2 \sin^2 \theta_1$$

soit:

$$v_2 = u_1 \sin \theta_1$$

finalement, de l'équation 7.6 on tire $\sin \theta_2$ et on remplace v_1 et v_2 par les valeurs trouvées:

$$\sin \theta_2 = \frac{v_1}{v_2} \sin \theta_1 = \frac{v_1 \sin \theta_1}{u_1 \sin \theta_1} = \frac{v_1}{u_1} = \cos \theta_1$$

mais si $\sin \theta_2 = \cos \theta_1$ cela veut dire que θ_1 et θ_2 sont complémentaires, c'est-à-dire que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. En conclusion dans un choc entre deux objets de même masse, dans le référentiel d'un d'entre eux (un des deux à l'arrêt) les objets partent à 90° .

Ce résultat est peut-être intéressant, mais remarquez que si nous avons observé la même collision dans le référentiel du centre de masses, nous aurions obtenu que les deux objets partent dans des directions opposées et avec la même vitesse, et ceci sans besoin d'écrire une seule équation.

7.3 Exercices.

- 1 - Pour être dans les normes, une balle de tennis lâchée d'une hauteur de 100 pouces sur une surface en béton doit rebondir à 55 pouces. Calculez le coefficient de restitution e . Lâchée d'un mètre d'hauteur, combien de temps rebondit-elle avant de s'arrêter?

R.N.: 0,74; 3,02 s.

- 2 - Calculez le moment des objets suivants:

-une balle de calibre 45 de 12 grammes dont la vitesse est de 300 m/s.

-une balle de tennis de 58 grammes dont la vitesse est de 150 km/h

-un projectile de Flash-Ball de 28 grammes à 120 m/s.

-Le coup de poing d'un boxeur. Masse du poing + avant-bras: ~ 3 kg vitesse ~ 13 m/s.

-un ballon de football de 425 grammes à 26 m/s.

Calculez la vitesse acquise par un homme de 70 kg qui arrête chacun des objets (gilet pare-balles autorisé). Il est dit que le calibre 45 fut créé pour que la personne atteinte soit renversée en plus de blessée. Est-ce crédible?

R.N.: 3,6; 2,42; 3,36; 39; et 11 kg m/s. $v = 5$ cm/s pour le 45.

- 3 - La masse d'un ballon de basket-ball est de 595 grammes. Celle d'une balle de tennis est de 58 grammes. On réalise l'expérience suivante: on laisse tomber simultanément un ballon de basket et, au dessus une balle de tennis. La ballon de basket chute de 1 mètre avant de toucher le sol puis il rebondit. La balle de tennis rencontre, à la fin de sa chute de 1 mètre, le ballon de basket au début de sa course ascendante. On veut calculer la vitesse de la balle de tennis après sa collision avec le ballon de basket et la hauteur à laquelle elle monte. On supposera que les collisions sont élastiques.

Pour ceci calculez la vitesse du ballon de basket avant et après l'impact avec le sol. Calculez la vitesse de la balle de tennis à ce moment (juste avant la collision entre les balles). Calculez la vitesse du centre de masses des deux balles, puis la vitesse des deux balles dans le référentiel du centre de masses. Calculez la vitesse des deux balles dans le même référentiel après la collision. Re-transformez ces vitesses dans le référentiel du sol. Calculez la hauteur à laquelle monte la balle de tennis.

R.N.: 4,43 m/s; $V_{CM} = 3,64$ m/s; $v_t = 11,71$ m/s; $h = 7$ m.

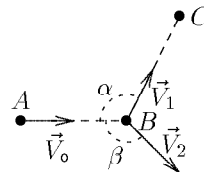
- 4 - Une voiture de masse $m_1 = 900$ kg roulant à 40 km/h (suite à un freinage insuffisant) s'encastre dans un camion de masse $m_2 = 15000$ kg venant en face à une vitesse de 50 km/h (freinage encore moins efficace). Calculez la vitesse (en km/h) de l'amas de ferraille. De combien a changé la vitesse (en km/h) de la voiture (et de ses occupants).

R.N.: 44,9 km/h; 84,9 km/h.

- 5 - Sachant que, dans un court de tennis, la hauteur du filet (au centre) est de 91,44 cm, calculez le temps minimum entre deux frappes successives d'un même joueur pendant un échange (non pour le service) et avec rebond à chaque échange. Remarquez que la vitesse horizontale de la balle n'intervient pas. Dans un premier temps faites le calcul comme si la balle était parfaitement élastique. Puis, examinez la situation avec un rebond partiellement élastique. Déterminez à quelle hauteur, après le rebond on doit jouer la balle pour que le temps soit minimum.

R.N.: $t = 1,73$ s; $h \simeq 0$.

- 6 - La bille A est envoyée sur la bille B de sorte de carambola la bille C. La vitesse \vec{v}_1 est de 2 m/s. L'angle est $\alpha = 116,56^\circ$. Calculez les valeurs de V_1 et V_2 et l'angle β . Les trois billes ont la même masse. On ignorera les rotations, les effets et les frictions. La collision es supposée élastique.



R.N.: $V_1 = 0,8944$ m/s; $V_2 = 1,789$ m/s; $\beta = 153^\circ$.

- 7 - On s'intéresse au choc frontal élastique entre une masse m_1 qui percute, à vitesse v_0 , une autre masse m_2 à l'arrêt. On veut calculer le transfert d'énergie η de la masse 1 à la masse 2 en fonction du rapport de masses $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$. Si E_0 est l'énergie initiale de la masse 1, et E_1 son énergie après la collision, $\eta = 1 - \frac{E_1}{E_0}$. Vérifiez que la fonction η présente un maximum pour $\gamma = 1$. Combien vaut ce maximum?

R.: $\eta(1) = 1$.

8. ROTATION.

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés uniquement aux mouvements de translation. Un objet subit un mouvement de translation si, entre deux instants quelconques, toutes les particules qui forment l'objet se sont déplacées de la même distance.

Un objet subit un mouvement de rotation si chaque particule décrit un arc de cercle et que le centre de ces cercles se situe sur une même ligne droite et perpendiculaire aux cercles.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux mouvements de rotation des objets rigides. Ceci exclut les déformations et les vibrations. Aucun objet dans la réalité n'est parfaitement rigide, mais pour beaucoup de phénomènes physiques on peut négliger les déformations ou les étudier séparément.

Dans la plupart des cas, le mouvement d'un objet qui subit simultanément un mouvement de translation et un mouvement de rotation, peut être étudié en séparant les deux mouvements. On étudie d'un côté le mouvement de translation du centre de masses et de l'autre côté la rotation autour du centre de masses. C'est cela ce que nous allons faire.

8.1 Rotation avec accélération angulaire constante.

Nous avons déjà donné, au chapitre 2, les définitions de vitesse angulaire et accélération angulaire. On peut faire le parallèle avec les formules obtenues pour le mouvement uniformément accéléré en une dimension: θ correspond à x , ω à v et α à a . Les différentes équations correspondantes se trouvent sur la table de la figure 8.10.

Calculons les équations pour un mouvement de rotation avec accélération angulaire constante. Si l'angle de rotation est θ , la vitesse angulaire est:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

et l'accélération angulaire α est:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

On peut calculer la vitesse angulaire en fonction du temps:

$$\int_1^2 d\omega = \int_1^2 \alpha dt$$

où 1 correspond à la situation initiale ($\omega = \omega_0$ et $t = t_0$) et 2 correspond à la situation finale (ω et t). Comme α est constant:

$$\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)$$

soit:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

On peut calculer aussi la position θ en fonction du temps. En remplaçant ω par $d\theta/dt$:

$$d\theta = (\omega_0 + \alpha(t - t_0)) dt$$

Si la position initiale est θ_0 :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t (\omega_0 - \alpha t_0) dt + \int_{t_0}^t \alpha t dt$$

d'où:

$$\theta = \theta_0 + (\omega_0 - \alpha t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t^2 - t_0^2)$$

Si nous pouvons poser $t_0 = 0$, l'équation devient plus agréable:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Finalement, de la définition d'accélération angulaire $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ nous pouvons écrire:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

d'où:

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

En intégrant entre la situation 1 et la 2:

$$\frac{1}{2}\omega_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 = \alpha(\theta_2 - \theta_1)$$

Les formules que nous venons de déduire ne sont qu'un traitement géométrique (et mathématique) de la rotation. Nous n'avons pas dit ce qu'il faut pour faire tourner un objet. Pour cela il faut revenir à la physique.

Il est peut-être utile de rappeler que l'on associe des vecteurs à la vitesse angulaire et à l'accélération angulaire. Les vecteurs sont ceux donnés par la "règle du tire-bouchon": quand vous tournez le volant à droite le vecteur vitesse angulaire de votre volant est dirigé vers l'avant et le bas, le long de la barre de direction. Pour l'accélération la direction est la même: si vous accélérez la rotation vers la droite le vecteur est vers le bas. Si vous décélérez la rotation vers la droite (vous arrêtez de tourner le volant à droite) le vecteur est vers vous.

8.2 Couple ou moment d'une force.

On n'a pas besoin d'être physicien pour savoir que pour faire tourner une roue il faut exercer une force. On sait aussi que c'est d'autant plus facile que la force exercée a un "bras de levier" important et qu'il vaut mieux exercer la force tangentiellement que radialement. Toute cette connaissance pratique correspond bien à la réalité. En physique, l'efficacité d'une force à faire tourner quelque chose s'appelle **couple** ou aussi **moment d'une force**⁽¹⁾ par rapport à un point donné. Elle est définie comme:

$$\tau = r F_T$$

où r est la distance entre le point d'application de la force et le point de référence et F_T est la composante tangentielle de la force. Le couple se mesure en *Newtons · mètre*. **Attention!** c'est bien des *Newtons · mètre* mais ce ne sont surtout pas des *Joules*. Un couple n'est pas un travail (ni rien d'approché) même si les unités semblent être les mêmes.

Dans les cas où la force F n'est pas tangentielle le couple est:

$$\tau = r F \sin \theta$$

où θ est l'angle formé par le rayon r (voir figure 8.1) et la direction de la force.

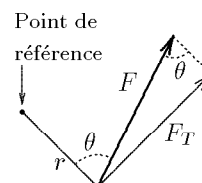


Figure 8.1 Le couple est le produit du rayon par la composante tangentielle de la force.

⁽¹⁾ Le nombre de définitions en physique qui utilisent le mot "moment" est remarquable. La racine du mot, en latin, veut dire "instant" mais aussi "impulsion". La diversité de concepts baptisés avec le mot "moment" est déroutante. En tout cas on peut dire que les physiciens ont fait preuve d'un manque total d'imagination.

Comme pour la vitesse et l'accélération angulaire, on attribue aussi un vecteur au couple. Pour ceci on commence par attribuer un vecteur au segment qui va du point de référence au point d'action de la force. Le vecteur couple $\vec{\tau}$ est le **produit vectoriel**⁽²⁾ du vecteur r et la vecteur force F :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Remarquez que la direction du vecteur couple est la même que celle du vecteur accélération et vitesse angulaire que le couple a tendance à créer. Évidemment ce n'est pas un hasard.

Dans beaucoup de cas il est plus pratique de remplacer le calcul du produit vectoriel par le calcul de la force par son bras. Dans la figure on peut constater que $|\vec{r}_b| = |\vec{r}| \sin \theta$. Comme le module du couple est $rF \sin \theta$, on voit que on peut l'obtenir directement en multipliant la force par son "bras" (le *bras de levier* dans la vie de tous les jours). Le bras de la force est la distance entre le centre et la droite qui contient la force.

Évidemment ceci ne nous donne que le module du couple. On obtient la direction en utilisant la "règle du tire-bouchon" ou une autre similaire.

Mais cette définition ne nous permet pas de calculer l'accélération angulaire qu'un couple impose sur un objet. Pour cela nous allons passer par la conservation de l'énergie: le travail fait par la force du couple se transforme en énergie cinétique de rotation.

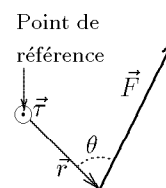


Figure 8.2 Le vecteur couple se situe à l'origine (symbole \odot) et sort du papier.

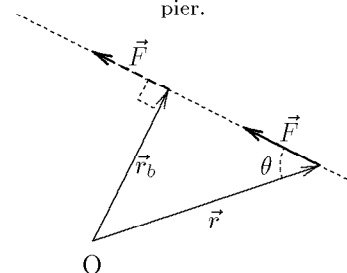


Figure 8.3 Le couple est égal à la force par le bras.

Produit vectoriel.

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ et $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ est un vecteur perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs et dont le module est le produit des modules des deux vecteurs multiplié par le sinus de l'angle formé par les deux vecteurs. Ainsi, si les deux vecteurs sont dans le plan du papier, le produit vectoriel est perpendiculaire au papier. Pour la direction on peut utiliser plusieurs "règles". Celle que j'utilise est celle du "tire-bouchon": pour le produit $\vec{A} \times \vec{B}$ on fait tourner le vecteur \vec{A} pour le rendre parallèle au vecteur \vec{B} (avec les pointes dans la même direction). Si on tourne vers la droite le tire-bouchon s'enfonce. Si l'on tourne vers la gauche le tire-bouchon ressort.

Si l'on connaît les modules des vecteurs et l'angle qu'ils forment entre eux, on peut calculer le module du vecteur produit en multipliant les modules entre eux et par le sinus de l'angle qu'ils forment:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

L'angle θ est mesuré de \vec{A} vers \vec{B} par le chemin le plus court ($-\pi \leq \theta \leq \pi$). Le produit vectoriel n'est pas commutatif:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Si l'on connaît les composantes on peut calculer les composantes du produit:

$$(A_x, A_y, A_z) \times (B_x, B_y, B_z) = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

Le produit vectoriel est maximum si les deux vecteurs sont perpendiculaires et est zéro si les deux vecteurs sont parallèles.

⁽²⁾ Pour le produit vectoriel, j'utilise la notation $\vec{A} \times \vec{B}$, que l'on trouve dans majorité des livres de physique, à la place de la notation franco-française $\vec{A} \wedge \vec{B}$ que l'on ne trouve que dans les livres français.

8.3 Énergie cinétique de rotation.

L'énergie cinétique de rotation est la somme des énergies cinétiques dues à la vitesse tangentielle de chacune des particules du corps.

$$E_r = \sum \frac{1}{2} m_i V_{Ti}^2$$

Dans un corps rigide, chaque particule a une vitesse tangentielle différente, mais toutes ont la même vitesse angulaire. On peut remplacer V_{Ti}^2 par $r_i^2 \omega^2$, où r_i est la distance de la particule à l'axe de rotation.

$$E_r = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$$

En réalité, comme toute la masse de chaque m_i doit être située au même rayon, il faut prendre de toutes petites masses et transformer la somme en intégrale:

$$E_r = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{vol} r^2 dm$$

ici "vol" indique qu'il faut étendre l'intégrale à tout le volume du solide. L'intégrale reçoit le nom de "moment d'inertie" (voir paragraphe suivant). On le représente souvent par la lettre I . Avec ceci l'énergie cinétique de rotation s'exprime:

$$E_r = \frac{1}{2} I \omega^2$$

ce qui fait un joli parallèle avec l'énergie cinétique de translation $\frac{1}{2} m v^2$.

8.4 Moment d'inertie.

Comme nous venons de l'écrire, le **moment d'inertie**⁽³⁾ d'un solide autour d'un axe est:

$$\text{moment d'inertie} = I = \int_{vol} r^2 dm$$

où r est la distance du différentiel de masse à l'axe de rotation et le "vol" de l'intégrale veut dire qu'il faut intégrer sur tout le volume du solide.

Pour des masses ponctuelles (ou presque), au lieu d'une intégrale, nous aurons une somme:

$$\text{moment d'inertie} = I = \sum m_i r_i^2$$

où la somme s'étend à toutes les masses ponctuelles.

Exemple 8.1 Moment d'inertie d'un anneau.

Soit un anneau de rayon externe R_2 , de rayon interne R_1 , de largeur h et de densité (masse spécifique, etc.) ρ . Calculons son moment d'inertie autour de l'axe de symétrie cylindrique. Dans la figure de droite nous avons dessiné l'anneau avec l'axe de symétrie perpendiculaire au papier. Pour calculer l'intégrale il nous faut choisir un différentiel de masse dont toute la masse se trouve à la même distance de l'axe. Nous allons donc choisir un anneau d'épaisseur dr à une distance r de l'axe. Remarquez que, comme dr est infiniment petit, on satisfait à la condition que toute la masse de ce différentiel se trouve à la même distance de l'axe.

Maintenant il faut calculer la masse de cet anneau. Elle est égale à la densité multipliée par le volume. Or, le volume de quelque chose de mince est égal à la surface multipliée par l'épaisseur.

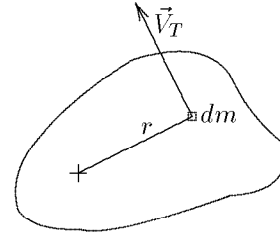


Figure 8.4 Le solide tourne autour du +.

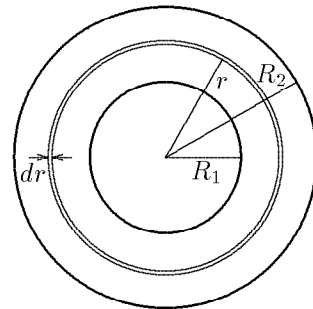


Figure 8.5 L'axe de rotation est au centre de l'anneau.

(3) Encore une chose qui s'appelle moment!

La surface de l'anneau est $2\pi r h$ (longueur par largeur). Le volume est $2\pi r h dr$. La masse sera: $dm = 2\pi\rho r h dr$. Le moment d'inertie sera donc:

$$I = \int_{vol} 2\pi\rho r h r^2 dr$$

Pour que l'intégrale somme sur tout le volume il suffit que l'anneau mince que nous avons pris, prenne tous les rayons possibles entre R_1 et R_2 :

$$I = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{1}{4} [r^4]_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2}\pi\rho h (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2}\pi\rho h (R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2)$$

Comme la masse M de l'anneau est $M = \pi (R_2^2 - R_1^2) h\rho$, le moment d'inertie est finalement:

$$I_{anneau} = \frac{1}{2}M (R_2^2 + R_1^2)$$

Remarquez que le moment d'inertie ne dépend pas de la largeur de l'anneau. Il peut sembler surprenant, à première vue, que dans les parenthèses on trouve un signe plus. On pourrait penser que le moment d'inertie d'un anneau creux est plus grand que celui d'un disque. En fait c'est vrai *pour une même masse*. En effet, si pour une même masse totale vous envoyez la masse vers l'extérieur le moment d'inertie augmente.

On déduit immédiatement que le moment d'inertie d'un disque ou d'un cylindre est:

$$I_{disque} = \frac{1}{2}MR^2$$

Exemple 8.2 Moment d'inertie d'une sphère pleine.

Nous allons calculer le moment d'inertie d'une sphère pleine de rayon R et de densité ρ autour d'un diamètre. Pour cela nous allons diviser la sphère en un nombre infini de disques perpendiculaires à l'axe de rotation (axe des x). Pour un angle θ (voir dessin), la position du disque en x est:

$$x = R \cos \theta$$

et l'épaisseur du disque correspondant à une petite variation $d\theta$ de l'angle est:

$$dx = \frac{d}{d\theta} R \cos \theta = -R \sin \theta d\theta$$

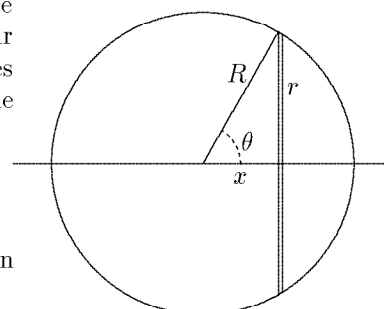


Figure 8.6 L'axe de rotation (l'axe des x) est le diamètre de la sphère .

Le rayon du disque est $r = R \sin \theta$. La (petite) masse du disque est (densité par surface par épaisseur):

$$dM = \rho\pi r^2 dx$$

Le moment d'inertie de chacun des disques est $dI = \frac{1}{2}r^2 dM$. Le moment d'inertie total sera la somme de tous les moments d'inertie:

$$I = \int \frac{1}{2}r^2 dM = \int_0^\pi \frac{1}{2}R^2 \sin^2 \theta \rho\pi R^2 \sin^2 \theta (-R \sin \theta d\theta) = -\frac{1}{2}\rho\pi R^5 \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta$$

On peut calculer séparément l'intégrale de \sin^5 :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta &= \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (1 + \cos^4 \theta - 2\cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \left[-\cos \theta - \frac{1}{5}\cos^5 \theta + \frac{2}{3}\cos^3 \theta \right]_0^\pi = -2 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = -\frac{16}{15} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne:

$$I = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$$

Comme la masse de la sphère est $\rho \frac{4}{3} \pi R^3$, nous obtenons:

$$I_{sphère} = \frac{2}{5} M R^2$$

Je laisse au lecteur le soin de calculer le moment d'inertie d'un parallélépipède autour de son centre de masses.

Comme vous avez pu le constater, dans les exemples que nous venons de faire, nous avons calculé les moments d'inertie par rapport à des axes qui passaient par le centre de masses. Nous allons maintenant calculer le moment d'inertie par rapport à n'importe quel autre axe parallèle à un axe qui passe par le centre de masses et pour lequel on connaît le moment d'inertie.

On connaît le moment d'inertie pour l'axe qui passe par le centre de masses (point 0 dans le dessin). On veut calculer le moment d'inertie pour un autre axe parallèle qui passe par le point 1, situé à une distance d . Par définition le nouveau moment d'inertie I_1 est:

$$I_1 = \sum m_i r_{1i}^2$$

où les r_{1i} sont les distances de chaque masse au point 1. Le **théorème du cosinus** ou **théorème de Pythagore généralisé** nous dit que:

$$r_{1i}^2 = r_{0i}^2 + d^2 - 2dr_{0i} \cos \theta$$

si nous remplaçons:

$$I_1 = \sum m_i (r_{0i}^2 + d^2 - 2dr_{0i} \cos \theta) = \sum m_i r_{0i}^2 + d^2 \sum m_i - 2d \sum m_i r_{0i} \cos \theta$$

Le premier terme de la somme est simplement le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par le centre de masses. Le dernier terme est nul car $r_{0i} \cos \theta$ n'est autre chose que la coordonnée en x de la masse m_i mesurée par rapport au point 0 (le centre de masses). Finalement:

$$I_1 = I_0 + M d^2$$

Une conséquence immédiate de cette égalité est que, comme le terme $M d^2$ est toujours positif ou nul, le moment d'inertie par rapport à un axe qui passe par le centre de masses est plus petit que par rapport à n'importe quel autre axe parallèle.

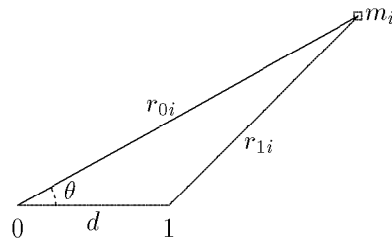


Figure 8.7 Connaissant le moment d'inertie pour l'axe qui passe par 0 (centre de masses) on calcule le moment d'inertie pour l'axe qui passe par 1.

8.5 Couple et accélération angulaire.

Maintenant nous avons tout ce qu'il faut pour calculer l'accélération angulaire d'un objet soumis à un couple. Nous avons un objet qui peut tourner autour d'un axe. Le moment d'inertie de l'objet autour de cet axe est I . Il tourne à vitesse angulaire ω . On applique une force F à une distance r de l'axe de rotation. Pendant un court intervalle de temps l'objet va tourner d'un angle $\delta\theta$ en subissant une accélération angulaire α du fait du couple que nous appliquons. La force appliquée va effectuer un travail qui vaut $r d\theta F \sin \phi$ où ϕ est l'angle que forme la force avec le rayon. Mais $rF \sin \phi$ est simplement le couple τ . Le travail effectué par la force est donc:

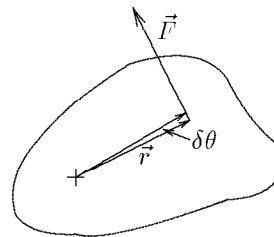


Figure 8.8 Quand l'objet tourne de $\delta\theta$, la force effectue un travail $\tau \delta\theta$.

$$\delta T = \tau \delta\theta$$

Ce travail doit se convertir en augmentation de l'énergie cinétique de rotation du corps:

$$\delta T = \tau \delta\theta = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Mais nous avons déjà calculé que dans un mouvement de rotation uniformément accéléré:

$$\frac{1}{2}\omega_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 = \alpha(\theta_2 - \theta_1)$$

où α est l'accélération angulaire (que nous cherchons). Dans notre cas $\theta_2 - \theta_1 = \delta\theta$:

$$\tau \delta\theta = I\alpha \delta\theta$$

donc:

$$\tau = I\alpha$$

Cette formule est à comparer avec $F = ma$ du mouvement linéaire.

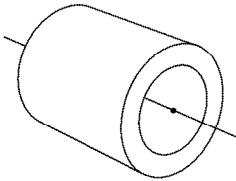
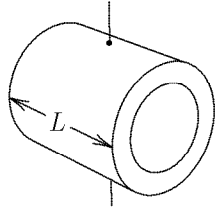
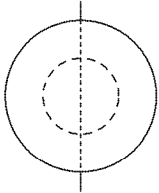
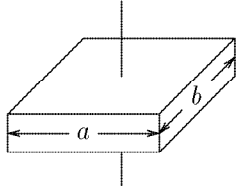
<p>Cylindre creux/plein Disque Anneau autour de l'axe du cylindre</p>  $I = \frac{M}{2}(R_{ext}^2 + R_{int}^2)$	<p>Cylindre creux/plein Disque Anneau autour du diamètre central</p>  $I = \frac{M}{4}(R_{ext}^2 + R_{int}^2) + \frac{ML^2}{12}$
<p>Sphère creuse/pleine autour d'un diamètre</p>  $I = \frac{2}{5}M \frac{R_{ext}^5 - R_{int}^5}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}$	<p>Parallépipède droit autour d'un axe normal passant par le centre de masses</p>  $I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$

Figure 8.9 Moments d'inertie de quelques solides. Pour les cylindres et les sphères pleins, R_{int} est égal à zéro. Pour des axes qui ne passent pas par le centre de masses mais qui sont parallèles à ceux de la figure on peut calculer le moment d'inertie en utilisant la formule $I_1 = I_0 + Md^2$ démontrée plus haut.

Correspondance entre mouvements linéaires et rotationnels		
	Linéaire	Rotationnel
Position	x	θ
Vitesse	v	ω
Accélération	a	α
Vitesse	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
Déplacement	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Vitesse	$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + \alpha(x - x_0)$	$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 + \alpha(\theta - \theta_0)$
Masse	m	Moment d'inertie $I = \sum m_i r_i^2$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
Force	\vec{F}	Couple = $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Accélération	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
Moment	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$

Figure 8.10 Correspondance entre diverses grandeurs de mouvements linéaire et rotationnel.

Exemple 8.3 CD-ROM La masse d'un CD-ROM est de $14,8\text{ g}$. Le diamètre externe est 12 cm et le diamètre du trou central est $1,5\text{ cm}$. Son moment d'inertie est:

$$I = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2) = \frac{1}{2}14,8 \cdot 10^{-3} \left((6 \cdot 10^{-2})^2 + (0,75 \cdot 10^{-2})^2 \right) = 2,71 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Quand il tourne à 3600 tours/minute, son énergie cinétique rotationnelle est:

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}2,71 \cdot 10^{-5} (2\pi 60)^2 = 1,92\text{ J}$$

Si on utilisait cette énergie pour le faire monter en hauteur, on aurait:

$$mgh = 1,92$$

$$h = \frac{1,92}{14,8 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 13,24\text{ m}$$

Exemple 8.4 Boule qui roule. Une boule de masse M est lâchée à l'arrêt en haut d'un plan incliné, d'une hauteur h . Si l'on suppose que la boule roule sans friction, quelle sera sa vitesse en bas du plan incliné?

L'astuce de ce problème est que quand une boule roule, elle a les deux types d'énergie cinétique: linéaire et rotationnelle. Mais elles sont reliées car si elle tourne, à chaque tour elle avance d'une distance $2\pi R$. Vue du référentiel du centre de masses la vitesse tangentielle de la surface de la boule est $V_T = \omega R$. Mais comme la vitesse du bas de la boule est zéro (elle est en contact avec le sol), la vitesse du centre de masses, vue du sol, est V_T . L'énergie totale sera:

$$E = E_c + E_r = \frac{1}{2}MV_T^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV_T^2 + \frac{1}{2}I\frac{V_T^2}{R^2}$$

Le moment d'inertie I d'une boule est: $\frac{2}{5}MR^2$:

$$E = \frac{1}{2}(M + \frac{2}{5}M)V_T^2 = \frac{7}{10}MV_T^2$$

Si cette vitesse provient d'une descente d'une hauteur h :

$$Mgh = \frac{7}{10}MV_T^2$$

et

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Si la boule ne roulait pas, elle serait arrivée avec une vitesse $\sqrt{2gh}$, supérieure à la précédente, car il n'y aurait pas eu d'énergie utilisée à faire tourner la boule.

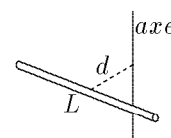
8.6 Exercices.

1 - Retrouvez la formule du moment d'inertie d'un parallélépipède droit autour du centre de masses (figure 8.9 du fascicule): $I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$. Où a et b sont les deux dimensions perpendiculaires à l'axe de rotation et M est sa masse.

2 - À partir du résultat de la question précédente, trouvez la formule du moment d'inertie d'une tige extrêmement fine de masse m et longueur L , autour du centre de masses (à $L/2$ de l'extrémité). Une tige est extrêmement fine si les dimensions perpendiculaires à la longueur sont négligeables devant celle-ci.

R.: $\frac{mL^2}{12}$.

3 - Utilisez le résultat de l'exercice 2 pour calculer le moment d'inertie d'une fine tige de longueur L et masse m autour d'un axe perpendiculaire à la tige mais qui passe par un point situé à distance d du centre de la tige. Les droites qui contiennent la tige, la distance d et l'axe de rotation sont perpendiculaires entre elles.



R.: $I = m \left(\frac{L^2}{12} + d^2 \right)$.

4 - Utilisez le résultat précédent pour calculer le moment d'inertie:

a- d'un cylindre creux infiniment mince (rayon R , longueur L , masse m) autour d'un axe perpendiculaire à l'axe du cylindre et qui passe par son centre de masses.

b- d'un cylindre creux (rayons R_1 et R_2 , longueur L , masse m) autour d'un axe perpendiculaire à l'axe du cylindre et qui passe par son centre de masses.

R.: a: $\frac{m}{2}R^2 + \frac{m}{12}L^2$; b: $\frac{m}{4}(R_2^2 + R_1^2) + \frac{mL^2}{12}$.

5 - Utilisez le résultat de l'exercice 2 pour calculer le moment d'inertie d'une fine tige de longueur L et masse m autour d'un axe perpendiculaire à la tige mais qui passe par son extrémité.

R.: $\frac{mL^2}{3}$.

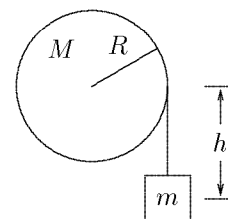
6 - Une fine tige de longueur L et masse m est appuyée verticalement sur une extrémité. Comme elle est instable elle commence à basculer. On admet que l'extrémité basse ne glisse pas sur le support. Calculez la diminution d'énergie potentielle quand la tige s'incline d'un angle θ par rapport à la verticale. Cette diminution d'énergie potentielle s'est transformée en énergie de rotation de la tige. Calculez la vitesse angulaire de celle-ci.

Calculez la vitesse **linéaire** de l'extrémité supérieure de la tige quand la tige atteint l'horizontale. Comparez cette vitesse à celle d'un corps qui serait tombé de la même hauteur L que la longueur de la tige. Que se passe-t-il si, à la place d'une tige rigide, on a à faire à un long empilement de briques (non collées)?

R.: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos \theta)}$; $\sqrt{3gL}$.

7 - Une masse m est accrochée à une ficelle enroulée autour d'un cylindre plein de masse M et de rayon R . Au temps $t = 0$ on libère le cylindre. Calculez la position et la vitesse de la masse m en fonction du temps, ainsi que l'angle tourné et la vitesse angulaire du cylindre.

R.: $a = g \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}$; $\alpha = a/R$; $v = at$; $h = h_0 + \frac{1}{2}at^2$; $\omega = \alpha t$;
 $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$.



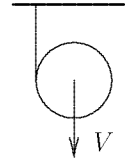
8 - Une boule de bowling est lancée sur la piste à vitesse V_0 . Au moment de la pose elle ne tourne pas mais glisse sur le parquet. Les forces de friction créent un couple qui crée une accélération angulaire qui fait que la boule se met à tourner de plus en plus vite. Ces mêmes forces de friction créent une accélération linéaire négative et la boule ralentit. Ceci dure jusqu'à ce que la vitesse de rotation et la vitesse de translation fassent que la surface de la boule ne glisse plus sur le parquet. La boule continue à rouler sans friction à vitesse

(presque) constante. Démontrez que cette vitesse est $\frac{5}{7}V_0$. Elle ne dépend ni de g ni du coefficient de friction μ .

Démarche: Calculez la force de friction en supposant μ connu. Avec cette force calculez l'accélération linéaire et la vitesse V en fonction du temps. Avec cette même force calculez le couple, l'accélération angulaire puis la vitesse angulaire ω en fonction du temps. Le glissement s'arrête quand la vitesse de translation du point bas de la boule est zéro (la vitesse du parquet!). Déduisez le temps pour que la condition soit satisfaite et, avec ce temps, calculez la vitesse.

- 9 - Un cylindre plein de masse $M = 1,2 \text{ kg}$ et rayon $R = 5 \text{ cm}$ est attaché au plafond par une ficelle enroulée autour de lui. On lâche le cylindre au temps $t = 0$. Calculez les accélérations linéaires et angulaires du cylindre ainsi que sa position en fonction du temps. Quelle sera sa vitesse angulaire après une chute d'un mètre? On admettra que la ficelle est assez longue pour la considérer comme verticale.

R.N.: $a = \frac{2}{3}g$; $\alpha = 130,8 \text{ r/s}^2$; $\omega = 11,5 \text{ T/s}$.



9. CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE OU MOMENT ANGULAIRE.

La conservation du moment cinétique (ou moment angulaire) joue le même rôle pour le mouvement de rotation que la conservation de la quantité de mouvement (ou moment linéaire) pour le mouvement linéaire. Elle constitue une part aussi importante dans la description des systèmes microscopiques (atomes, noyaux) que dans des systèmes astronomiques.

9.1 Moment cinétique d'une particule.⁽¹⁾

Dans les livres de physique américains le moment cinétique est appelé “**moment angulaire**”.

Soit une particule de masse m et moment linéaire $\vec{p} = m\vec{v}$. À l'instant considéré, la particule se trouve à l'extrémité d'un vecteur \vec{r} par rapport au point fixe d'origine O .

Le **moment cinétique** de la particule par rapport au point O est:

$$\text{moment cinétique} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Le module du moment cinétique est donc $L = rp \sin \theta$ où θ est l'angle formé entre \vec{r} et \vec{p} . La direction de \vec{L} est perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs (voir l'encadré sur le produit vectoriel à la page 8.3). Nous allons déduire la plus importante relation entre le couple et le moment cinétique.

Dérivons l'expression de la définition du moment cinétique:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

La dérivée d'un produit de vecteurs se traite de la même façon que la dérivée de n'importe quel autre produit, en faisant attention à ne pas changer l'ordre des facteurs:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Mais $d\vec{r}$ est simplement le vecteur déplacement pendant le temps dt . Donc $\frac{d\vec{r}}{dt}$ n'est pas autre chose que la vitesse \vec{v} . Comme $\vec{p} = m\vec{v}$, la première parenthèse donne:

$$\vec{v} \times m\vec{v}$$

c'est-à-dire, le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles. Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles étant zéro, il nous reste:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}m\vec{v} = \vec{r} \times (m\vec{a})$$

⁽¹⁾ Encore un concept qui porte le nom de “moment”! Les américains appellent ce moment “**moment angulaire**”. Dans les livres français le nom est “**moment cinétique**”. Je ne trouve pas le nom américain très réussi, mais le nom français me paraît complètement raté. Dans “cinétique” il n'y a rien qui rappelle que tout se passe par rapport à un point donné. On pourrait le confondre facilement avec le moment linéaire. Malheureusement c'est avec le nom de “cinétique” qu'il risque de figurer dans les questions des concours.

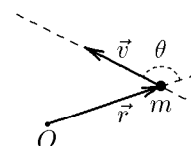


Figure 9.1 Le moment cinétique de la particule est le produit de son moment linéaire $m\vec{v}$ par le vecteur \vec{r} .

le dernier facteur $m\vec{a}$ est la masse par l'accélération, c'est-à-dire, la force qui agit sur la particule:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Le produit vectoriel de \vec{r} par la force est le couple produit par la force. Ceci est le résultat que nous cherchions: "la dérivée temporelle du moment cinétique est égale au couple exercé sur la particule".

Exemple 9.1 Moment cinétique (angulaire) d'une particule.

Soit une particule de masse m et moment linéaire $\vec{p} = m\vec{v}$. À l'instant considéré, la particule se trouve à l'extrémité d'un vecteur \vec{r} par rapport au point fixe d'origine O . En appliquant la définition, le moment cinétique de la particule par rapport au point O est:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Le module du moment cinétique est donc $L = rp \sin \theta$ où θ est l'angle formé entre \vec{r} et \vec{p} . La direction de \vec{L} est perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs. Dans la figure 9.2 vous constaterez que $r \sin \theta = \ell$. Le module du moment angulaire de la particule est le produit du moment linéaire (ou quantité de mouvement) $p = mv$ multiplié par la distance ℓ entre la trajectoire de la particule et le point de référence.

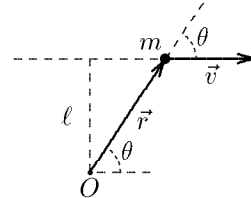


Figure 9.2 Le module du moment cinétique de la particule est le produit de son moment linéaire mv par la distance d .

$$L = mv\ell$$

Si nous accélérons la particule en lui appliquant une force F parallèle à sa vitesse, son accélération sera: $a = \frac{F}{m}$. La variation du module du moment cinétique sera:

$$\frac{dL}{dt} = m\ell \frac{dv}{dt} = \ell m a = \ell m \frac{F}{m} = F\ell = \tau$$

où τ est le couple de la force d'accélération par rapport au point de référence. Remarquez que comme la particule suit une trajectoire droite, la distance ℓ reste constante.

9.2 Moment cinétique d'un ensemble de particules.

Le moment cinétique d'un ensemble de particules est la somme des moments cinétiques de chaque particule:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

La variation du moment cinétique sera:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{\tau}_i \quad (9.1)$$

Le terme de droite est la somme de tous les couples produits par toutes les forces agissant sur les particules. Parmi ces forces il peut y avoir des forces externes et des forces internes (les forces internes sont celles exercées par une particule de l'ensemble sur une autre particule de l'ensemble). Mais la troisième loi de Newton nous dit que les forces et leurs réactions sont égales et de signe opposé, et qu'elles agissent sur la même droite. Comme elles sont situées sur la même droite, leurs couples par rapport à n'importe quel point sont égaux et de signe opposé. Donc, les seuls couples qui peuvent ne pas se compenser dans la somme, sont les couples externes (ceux produits par des forces externes):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\tau}_{ext.}$$

Donc, la variation temporelle du moment cinétique d'un ensemble de particules par rapport à un point fixe est égale à la somme des couples externes.

Dans le cas où les particules forment un corps rigide, nous avons vu que le couple externe est égal au moment d'inertie multiplié par l'accélération angulaire:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Donc:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

en intégrant:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (9.2)$$

(la constante d'intégration est nulle car pour une vitesse angulaire nulle, les vitesses des particules et leurs moments cinétiques sont aussi nuls: pour $\vec{\omega} = 0$ on sait que $\vec{L} = 0$).

On peut faire le parallèle entre cette formule et la définition du moment linéaire ou quantité de mouvement: $\vec{p} = m\vec{v}$. Le moment d'inertie correspond à la masse, la vitesse angulaire à la vitesse linéaire et le moment cinétique au moment linéaire.

Si on introduit l'équation (9.2) dans la (9.1) nous obtenons:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} I\vec{\omega} \quad (9.3)$$

Si le moment d'inertie est constant, comme c'est le cas pour un corps rigide, cette équation nous donne à nouveau:

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

qui est l'équation correspondante à $\vec{F} = m\vec{a}$. Par contre, si ce n'est pas un corps rigide ou s'il s'agit d'un ensemble de corps ou de particules, l'équation 9.3 reste tout de même valable. Seulement, cette fois, aussi bien le moment d'inertie I que la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ peuvent varier dans le temps

9.3 Conservation du moment cinétique.

Quand les couples externes sont zéro $\vec{\tau} = 0$, l'équation (9.3) nous donne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Ce qui implique que $\vec{L} = \text{constant}$. Remarquez que comme \vec{L} est un vecteur, L reste constant en magnitude et direction.

Prenons un corps qui peut changer de forme. Sous une certaine configuration son moment d'inertie est I_1 et sa vitesse angulaire est $\vec{\omega}_1$. Si le corps change de forme (sans intervention d'un couple extérieur) et que la nouvelle distribution des masses fait que son nouveau moment d'inertie est I_2 il changera sa vitesse angulaire de sorte que:

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$$

Comme le moment d'inertie est un scalaire, la direction du vecteur vitesse angulaire restera constante mais la valeur de la vitesse angulaire aura changé.

Par exemple une patineuse⁽²⁾ qui fait une pirouette. Elle commence par se donner un moment cinétique en créant un couple avec un patin alors qu'elle pivote sur la pointe de l'autre.

⁽²⁾ Je prends une patineuse car les forces de friction avec la glace sont plus faibles que celles des chaussons d'une ballerine avec le parquet.

Elle le fait avec les bras ouverts ce qui lui donne un moment d'inertie important autour d'un axe vertical. Tout en gardant son équilibre, elle serre les bras près du corps ce qui lui fait diminuer son moment d'inertie. La conservation du moment cinétique lui fait augmenter sa vitesse angulaire. Quand elle veut arrêter sa pirouette, elle ouvre ses bras et peut-être même la jambe libre. Ceci lui fait augmenter son moment d'inertie et diminuer sa vitesse de rotation. Il ne lui reste qu'à appuyer le patin libre pour créer un couple qui réduira son moment cinétique.

Dans d'autres sports qui comprennent des tours, vrilles, pirouettes, etc, comme le trampolone, plongeon, gymnastique, etc., la sportive utilise des méthodes de modification de sa vitesse angulaire en modifiant sa position de sorte d'augmenter ou diminuer son moment d'inertie. Par exemple en plongeon de haut vol, l'athlète quitte la plateforme, le corps tendu, avec une faible vitesse angulaire horizontale (elle tourne vers l'avant ou vers l'arrière) puis, une fois en l'air, elle diminue son moment d'inertie horizontal en se mettant en position "groupé" (jambes repliées sur la poitrine et enserrées avec les bras), sa vitesse angulaire augmente et elle tourne sur elle-même. Vers la fin de son saut elle déplie le corps et sa vitesse angulaire redevient celle qu'elle avait en quittant la plateforme. On a l'impression qu'elle rentre dans l'eau sans tourner.

Un autre exemple vous montre que tout le monde est au courant de la conservation du moment cinétique. Imaginez que vous êtes debout et habillé sur le bord d'une piscine en lui tournant le dos. Quelqu'un vous pousse en arrière et vous êtes sur le point de tomber. Que faites-vous pour essayer de vous rattraper? Vous faites des moulinets avec vos bras en les faisant tourner très vite vers l'arrière. Vos bras qui tournent vers l'arrière ont un vecteur moment cinétique dirigé horizontalement vers votre droite. La conservation du moment cinétique exige que le reste de votre corps ait un vecteur moment cinétique dirigé horizontalement vers votre gauche ce qui correspond à votre corps pivotant sur vos pieds vers l'avant (et vers le sec). Si vous réussissez à donner à votre corps un moment cinétique plus grand que celui qui vous envoyait vers l'arrière, vous resterez au sec. Cette réaction est intuitive et tout le monde le fait sans réfléchir. Si on vous pousse vers l'avant vous tournerez vos bras vers l'avant.

Les chats sont particulièrement doués pour utiliser la conservation du moment cinétique. Ils tournent leurs pattes et leur corps de sorte de retomber sur leurs pattes.

Une autre utilisation de la conservation du moment cinétique est le contrôle d'attitude⁽³⁾ des satellites artificiels. Presque tous les satellites ont besoin d'être orientés précisément (directions des antennes, caméras, etc.). L'observatoire orbital Hubble doit être orienté avec une précision supérieure à 1/10 de seconde d'arc (ce n'est pas la peine d'avoir un bon télescope si la photo est "bougée"). On crée du couple avec des fusées d'appoint qui tirent sur le côté. Cela permet d'orienter le satellite, mais ces fusées ne sont pas très précises. De plus, les fusées d'appoint consomment du carburant, qui est une denrée précieuse et limitée dans un satellite. Pour enlever le moment cinétique résiduel on fait tourner un disque (volant d'inertie), avec un moteur électrique, dans le sens où le satellite tourne, jusqu'à ce que le disque ait un moment cinétique égal à celui que l'on veut "supprimer". En réalité on ne l'a pas supprimé, il est bien conservé, mais maintenant il n'y a que le disque qui tourne.

On utilise aussi la méthode du volant d'inertie pour modifier l'orientation du satellite: si vous voulez que le satellite regarde plus à gauche, vous faites tourner un volant d'inertie à droite. La conservation du moment cinétique fait que le reste du satellite se met à tourner à gauche. Quand le satellite est arrivé à la position désirée, on arrête le volant ce qui arrête la rotation du satellite.

La conservation du moment cinétique a des conséquences aussi en astronomie. Par exemple quand, vers la fin de leur vie, certaines étoiles se transforment en étoiles neutroniques, toute leur masse se concentre dans une petite sphère de quelques kilomètres de diamètre et d'une densité de l'ordre de celle des noyaux atomiques. Leur moment d'inertie diminue énormément, et leur vitesse angulaire augmente d'autant. On a observé des pulsars dont la période n'est que de quelques millisecondes.

À cause des marées, la lune exerce un couple sur la terre. Celui-ci diminue le moment cinétique de la terre qui, en conséquence, augmente celui de la lune. Dans le cas d'un satellite, quand on lui augmente son énergie, comme ici à la lune, sa vitesse angulaire diminue, le rayon de

⁽³⁾ Attitude: en général: position. Dans le cas des satellites, orientation de celui-ci par rapport à la terre, les étoiles, etc.

son orbite augmente et sa période augmente. La lune s'éloigne de la terre, le mois lunaire s'allonge et le jour s'allonge. Réciproquement, il y a très longtemps, la lune était plus proche, les marées plus fortes et les mois et les jours plus courts.

9.4 Le gyroscope, la toupie et le vélo.

9.4.1 Le gyroscope.

Le gyroscope est, en principe, un disque ou un cylindre qui tourne sur un axe, comme celui dessiné sur la figure. Imaginons que l'axe est fixe et que le disque peut tourner sur l'axe sans friction, grâce à des roulements à billes.

Imaginez que le gyroscope tourne dans le sens indiqué dans la figure et que vous le tenez par l'axe avec la main gauche au fond et la main droite sur la partie proche de l'axe. Si maintenant vous essayez de tourner le gyroscope vers la droite, en descendant votre main droite et en montant la gauche, vous sentirez une sensation très surprenante car le gyroscope va pousser votre main droite vers vous et votre main gauche vers l'avant.

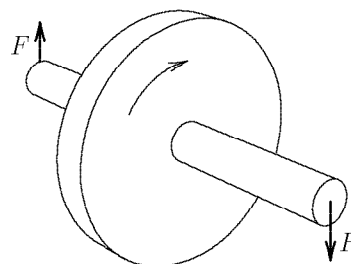


Figure 9.3 Quand vous poussez le côté droit vers le bas, au lieu de descendre il pousse vers vous .

Vous exercez un couple qui aurait fait tourner n'importe quel autre objet autour d'un axe horizontal. Le gyroscope réagit en tournant sur un axe vertical.

De plus, si vous le lâchez à droite en lui laissant la liberté de tourner sur l'axe de gauche, le gyroscope, au lieu de tomber à droite comme le ferait un objet "normal", va se mettre à tourner autour du support de l'axe gauche, en gardant l'axe toujours horizontal. Cette rotation de la direction de rotation du gyroscope s'appelle **précession**.

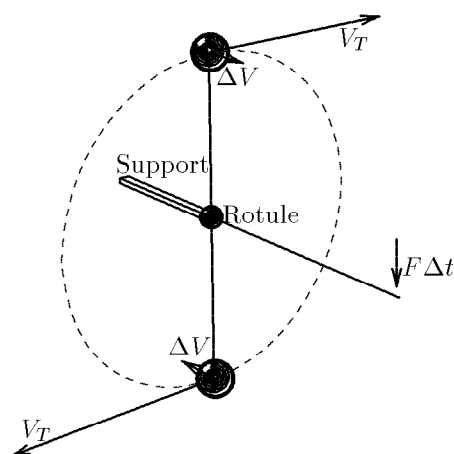


Figure 9.4 Quand on donne un petit coup sur l'extrémité de la barre horizontale on communique aux masses une vitesse horizontale perpendiculaire à leur vitesse tangentielle.

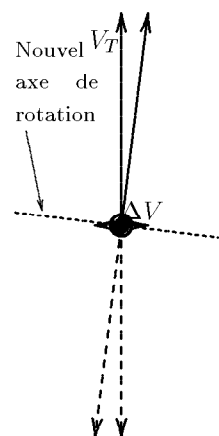


Figure 9.5 Vue d'en haut du dessin de gauche. Les vitesses de la masse d'en haut sont en continu et celles de la masse d'en bas sont en pointillés.

Pour comprendre la raison de base de ce comportement vraiment étrange, nous allons imaginer un dispositif simplifié. Au lieu d'avoir un disque ou un cylindre nous allons nous restreindre à deux masses ponctuelles. Ces deux masses sont reliées par une barre rigide de masse négligeable. Du centre de cette barre part une autre perpendiculaire. L'ensemble est tenu à la liaison des deux barres par une rotule⁽⁴⁾ fixée à un support rigide.

⁽⁴⁾ En mécanique, une rotule est un axe solidaire d'une sphère, laquelle se trouve à l'intérieur d'un morceau de sphère creuse. Le morceau de sphère creuse fait un peu plus qu'une demi sphère ce qui fait que la bille est fixe tout en pouvant tourner totalement ou partiellement autour de n'importe quel axe.

Au départ les masses tournent autour d'un axe horizontal qui coïncide avec la barre horizontale (voir figure 9.4). Juste au moment où une des masses passe en haut, on donne un petit coup (une impulsion) sur la barre horizontale. Comme la barre est rigide, ce coup se transmet aux masses et leur communique une petite vitesse ΔV horizontale. Cette vitesse est dirigée vers la droite pour la masse d'en haut et vers la gauche pour la masse d'en bas. Maintenant la nouvelle vitesse des masses sera l'addition de la vitesse précédente avec celle, perpendiculaire, que nous venons de lui communiquer.

Dans la figure 9.5 nous avons dessiné les vitesses des masses vues d'en haut. Celle de la masse d'en haut sont en trait continu et celles de la masse d'en bas sont en pointillés. Le résultat de l'addition de vitesses est que la vitesse de la masse d'en haut est maintenant dirigée un peu vers la droite, et que la vitesse de la masse d'en bas est dirigée un peu vers la gauche.

Maintenant les masses vont tourner sur un plan qui contient les nouvelles vitesses. Ce plan est un peu tourné vers la droite par rapport au plan de rotation précédent. Le nouvel axe de rotation aura tourné aussi horizontalement vers la droite. Nous retrouvons ainsi le comportement surprenant du gyroscope: nous lui avons donné un coup pour que l'axe de rotation s'incline vers le bas et ce que nous obtenons est une rotation verticale vers l'arrière.

Dans le cas d'un gyroscope, au lieu d'avoir deux masses, nous en avons une infinitude. L'addition des vitesses est un peu plus compliquée car cette fois les vitesses des différentes masses ont des composantes verticales. Néanmoins, pour toutes les masses de la moitié supérieure, la composante horizontale de la vitesse tangentielle est dirigée vers le fond (comme dans la figure 9.5) et pour ces mêmes masses la vitesse ajoutée est dirigée vers la droite. Donc, toutes les particules de la moitié supérieure ont leur vitesse déviée vers la droite. Par le même raisonnement on déduit que toutes les particules de la moitié inférieure ont leur vitesse déviée vers la gauche (à nouveau comme dans la figure 9.5). Le résultat est que le gyroscope se comporte de la même manière que notre objet avec seulement deux masses.

Vous pouvez peut-être vous dire: "je suis fort et je peux forcer le gyroscope de sorte que l'axe de droite tourne vers le bas". Vous avez raison. Vous n'avez même pas besoin d'être très fort. Mais pendant que vous forcez l'axe de droite vers le bas, vous constaterez que la force que vous êtes obligé d'exercer n'est pas dirigée vers le bas, mais vers l'avant!

On peut calculer la **vitesse de précession** du gyroscope. Imaginons que son moment cinétique soit \vec{L} , et qu'on lui applique un couple $\vec{\tau}$ perpendiculaire au moment cinétique. L'équation 9.3 nous dit que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

La variation de \vec{L} durant un intervalle de temps Δt sera:

$$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$$

Remarquez que $\Delta\vec{L}$ a la même direction que $\vec{\tau}$ et qu'il est perpendiculaire à \vec{L} . Comme l'intervalle de temps est petit ΔL est petit devant L et l'angle que fait le nouveau moment cinétique $\vec{L} + \Delta\vec{L}$ avec l'ancien \vec{L} est:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\tau\Delta t}{L}$$

La vitesse de précession que nous cherchons est la vitesse angulaire du vecteur \vec{L} , qui est la même que celle de l'axe de rotation du gyroscope. Cette vitesse angulaire est:

$$\text{Vitesse de précession} = \Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L}$$

La vitesse de précession est d'autant plus faible que le moment cinétique du gyroscope est grand.

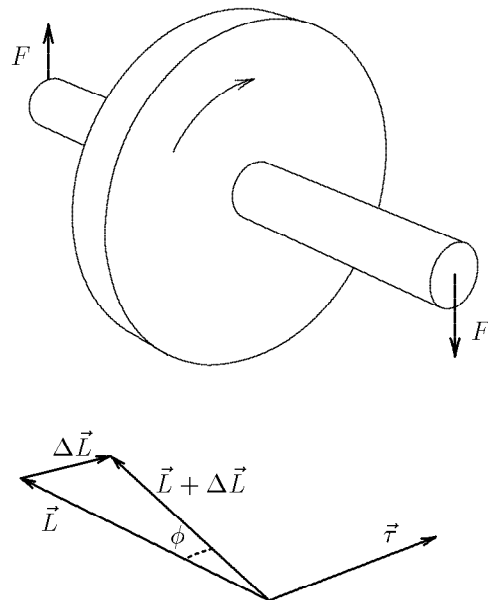


Figure 9.6 Tous les vecteurs du dessin en bas se trouvent sur un plan horizontal. Les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\Delta\vec{L}$ sont parallèles entre eux et perpendiculaires à \vec{L} .

L'intérêt d'utiliser un gyroscope pour maintenir une référence de position est la suivante: un objet quelconque, soumis à un couple, présente une *accélération* angulaire constante ce qui donne un angle de déplacement proportionnel au carré de l'intervalle de temps. Par contre, sur un gyroscope, un couple produit une *vitesse* angulaire constante ce qui donne un angle de déplacement proportionnel au temps. De plus, pour une même masse de l'objet, on peut atténuer la conséquence d'un couple en augmentant le moment cinétique de l'objet. Ceci s'obtient avec une bonne distribution de la masse et une vitesse de rotation élevée⁽⁵⁾.

On a utilisé des gyroscopes pour stabiliser mécaniquement des navires, aussi bien de surface que des sous-marins. Le *Nautilus*, premier sous-marin atomique, comportait un énorme gyroscope de plusieurs tonnes.

On a utilisé des gyroscopes pour créer des "plateformes inertielles", c'est-à-dire, des plateformes qui gardent leur orientation dans l'espace même quand elles sont tenues dans un support mouvant, comme un navire ou un avion. On les utilise encore pour stabiliser des caméras installées sur des hélicoptères.

Dans les avions conçus récemment, on n'utilise plus de gyroscopes mécaniques, mais des gyroscopes optiques qui fonctionnent sur des principes totalement différents.

9.4.2 La toupie.

Dans la figure de droite nous avons représenté une toupie qui tourne à gauche et qui est inclinée vers la gauche. Le poids de la toupie exerce une force $m\vec{g}$ sur le centre de masses. Cette force crée un couple $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g}$ dirigé horizontalement et perpendiculaire au moment cinétique \vec{L} de la toupie.

Comme nous l'avons vu pour le gyroscope, ce couple produit, dans un intervalle de temps Δt une variation $\Delta L = \tau \Delta t$ de moment cinétique. Cette variation est perpendiculaire au vecteur moment cinétique \vec{L} , et parallèle au couple. Après ce temps Δt le nouveau vecteur \vec{L} aura le même module qu'auparavant mais aura tourné dans la direction de $\vec{\tau}$. Mais cela veut dire que l'axe de la toupie aura tourné dans la direction de $\vec{\tau}$. Mais à mesure que l'axe de rotation de la toupie tourne, le centre de masses tourne aussi et la direction de $\vec{\tau}$ aussi. Si l'axe de rotation de la toupie est incliné de θ par rapport à la verticale, une variation ΔL du moment cinétique implique une rotation de l'axe de la toupie autour de l'axe y de:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta}$$

L'axe de rotation de la toupie tourne autour de l'axe z avec une vitesse de précession:

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta L}{L \sin \theta}}{\Delta t} = \frac{\frac{\tau \Delta t}{L \sin \theta}}{\Delta t} = \frac{mgr \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{mgr}{L}$$

Remarquez que la vitesse de précession ne dépend pas de l'inclinaison de l'axe de rotation de la toupie. Cette propriété est indispensable pour le fonctionnement des appareils utilisant la IRM (Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire) et, notamment, pour l'imagerie médicale.

⁽⁵⁾ Dans les avions on utilisait le "secteur" à 400 Hz ce qui donne une vitesse angulaire de 2513 rad/sec ou 24000 tours/min.

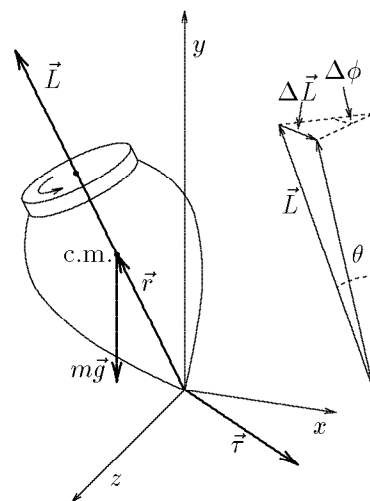


Figure 9.7 La vitesse de précession ne dépend pas de l'inclinaison de la toupie.

9.4.3 Le vélo.

L'effet gyroscope permet à des personnes "normales" sans qualités d'équilibristes de faire du vélo. Rester sur deux roues à l'arrêt, en équilibre, sur un vélo ou une moto est possible, mais peu de gens sont capables de le faire. Par contre rouler sur deux roues presque tout le monde peut le faire après une phase d'apprentissage qui consiste surtout à laisser tranquille le guidon. Car un vélo ou une moto qui roulent restent d'eux mêmes sur leurs deux roues

Dans la figure de droite nous avons représenté schématiquement un vélo en mouvement avec le guidon droit mais incliné vers la gauche. Le poids du vélo crée un couple $\vec{\tau}$ qui pousse le vélo à s'incliner d'avantage et à tomber. Mais si le vélo avance, la roue avant⁽⁶⁾ a un moment cinétique \vec{L} dirigé vers la gauche. Le couple crée une variation de moment cinétique $\Delta\vec{L}$ dirigée vers l'arrière. Cela veut dire que le moment cinétique de la roue avant tourne vers la gauche et cela se fait en tournant la roue avant vers la gauche (comme si on avait tourné le guidon vers la gauche). Le vélo amorce un virage à gauche et aussi longtemps que le couple incline le vélo à gauche le guidon tourne de plus en plus à gauche en diminuant le rayon de courbure du virage.

Vu du système accéléré (et non newtonien) du vélo, le virage se resserre, ce qui augmente la force centrifuge sur le vélo et qui crée un couple qui a tendance à pousser le vélo à droite et donc, à compenser le couple du poids qui l'incline vers la gauche. Quand les deux couples se compensent exactement le guidon s'arrête de tourner et le vélo continue son virage à rayon constant. S'il ne rencontre pas d'obstacle, la friction avec l'air le fera ralentir. En ralentissant la force centrifuge diminue et ne compense plus le couple dû au poids. Le guidon tourne un peu plus à gauche et le vélo continue son virage avec un rayon de courbure plus petit. Un vélo lancé droit (sans cycliste) commence à tourner et le rayon de courbure diminue à mesure que la vitesse du vélo diminue. Quand le guidon se bloque ou les roues dérapent, le vélo tombe.

Si on lance un vélo de la même façon mais avec le guidon bloqué, le vélo tombe sur le côté comme si on le lâchait à l'arrêt.

La situation est identique avec une roue ou une pièce de monnaie que vous faites rouler. Dès qu'un couple l'incline, la pièce change d'orientation de sorte que la force centrifuge équilibre le couple de déséquilibre. Le résultat est, comme pour le vélo, que la pièce décrit une spirale à mesure que sa vitesse diminue. Elle finit par décrire une spirale "sur place" quand la pièce est déjà presque horizontale.

9.4.4 Précession des équinoxes.

Un effet curieux de l'effet gyroscope est celui de la précession des **équinoxes**⁽⁷⁾. La terre tourne autour du soleil sur une orbite légèrement elliptique, contenue dans un plan qui contient également le soleil. Ce plan s'appelle, en astronomie, l'écliptique. La terre tourne autour d'elle-même autour de son axe de symétrie nord-sud. Or cet axe n'est pas perpendiculaire à l'écliptique mais incliné d'environ 23,5 degrés. De ce fait, quand la terre tourne autour du soleil la moitié de l'année le pôle nord "voit" le soleil en permanence (soleil de minuit), alors que le sud reste dans le noir (nuit polaire) et l'autre moitié de l'année c'est l'inverse: le pôle sud avec le soleil de minuit et le pôle nord sous la nuit polaire. Les deux jours de l'année où se fait la transition, des deux

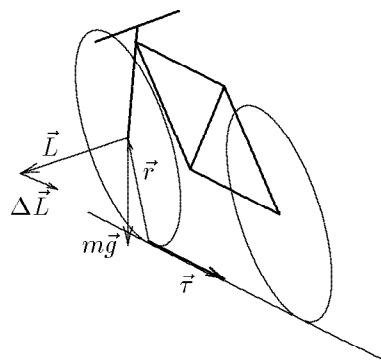


Figure 9.8 Quand le vélo penche vers la gauche, le couple créé par le poids sur la roue avant déplace le moment cinétique de celle-ci vers l'arrière et le fait tourner à gauche. Ceci continue jusqu'à que le couple créé par la force centrifuge créée par le virage, compense le couple dû au poids.

⁽⁶⁾ La roue arrière a aussi un moment cinétique mais la façon comme elle est fixée ne lui permet de jouer aucun rôle dans l'équilibre du vélo.

⁽⁷⁾ Du latin aequus (égal) et nox (nuit)

pôles on voit le (demi) soleil faire le tour de l'horizon, et dans tous les autres endroits de la terre la durée de la journée est la même que celle de la nuit (12 heures, évidemment).

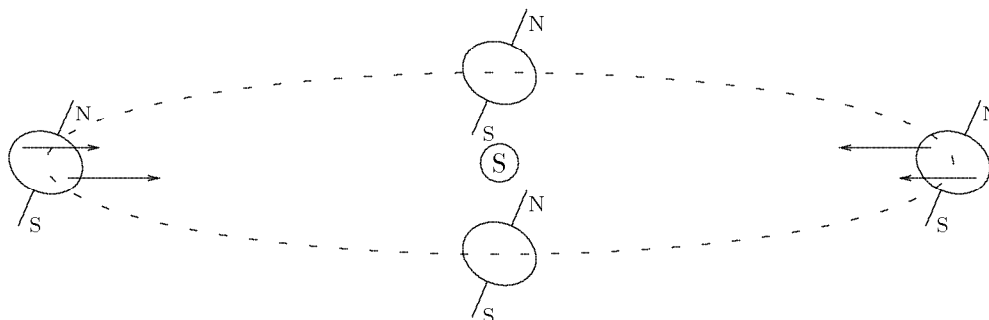


Figure 9.9 Dans la figure l'aplatissement polaire de la terre est très exagéré. Les deux terres au centre sont aux équinoxes et les deux autres aux solstices. Les forces d'attraction sur le gonflement équatorial, sont différentes de chaque côté de la terre à cause de leur dépendance avec l'inverse du carré de la distance.

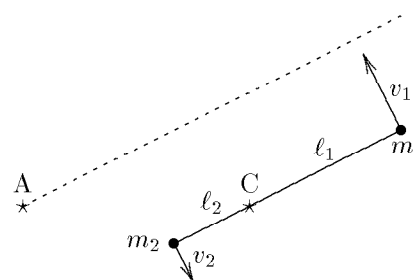
La terre tourne autour de son axe et la prolongation de cet axe de rotation vers le ciel tombe sur le pôle nord céleste. Près de cette direction se trouve une étoile bien connue: l'étoile polaire. Si rien ne venait troubler la rotation de la terre, son moment cinétique resterait constant et l'étoile polaire serait toujours la même. Comme vous l'avez deviné, ce n'est pas le cas. Le problème est que la terre est légèrement aplatie aux pôles à cause de la rotation et de la force centrifuge⁽⁸⁾. Ceci lui fait un "gonflement" autour de sa partie équatoriale. La force d'attraction gravitationnelle est inversement proportionnelle à la distance au carré. La conséquence est que le "gonflement" du côté du soleil est légèrement plus proche de celui-ci que le "gonflement" de l'autre côté de la terre. De plus, sauf aux équinoxes, les deux gonflements ne se trouvent pas à la même hauteur (chacun se trouve de l'autre côté de l'écliptique). Le résultat est un couple dirigé le long de l'orbite terrestre. Ce couple impose un mouvement de précession à la terre. L'axe de rotation de la terre reste toujours incliné de 23,5 degrés, mais tourne avec une période d'environ 27000 ans. Pendant ce temps, le pôle nord céleste décrit un cercle sur le ciel de 23,5 degrés de rayon. Le résultat est que les jours des équinoxes se décalent dans le temps. Ce n'est pas beaucoup mais cela fait quand même un jour tous les 74 ans, ce qui est énorme pour un astronome.

9.5 Exercices.

- 1 - Deux masses m_1 et m_2 tournent à vitesse angulaire ω autour de leur centre de masses C à des distances ℓ_1 et ℓ_2 . Calculez le moment angulaire en prenant comme référence ce centre de masses, puis calculez-le à nouveau en prenant comme référence un point quelconque A . Commencez par calculer le cas où $m_1 = m_2$ et $\ell_1 = \ell_2$.

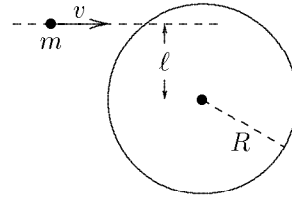
Suggestion: Utilisez la "méthode" $L = \sum mv \cdot (\text{bras de levier})$ et utilisez la ligne pointillée du dessin.

R.: Le moment angulaire ne dépend pas du point de référence.

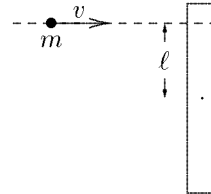


⁽⁸⁾ Ceci fut une des prédictions de Newton, conséquence de ses lois du mouvement. La vérification de cet aplatissement convainquit les plus réticents à la théorie de Newton.

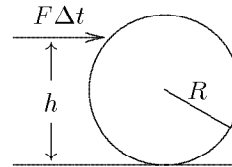
- 2 - Un projectile de masse $m = 10\text{ g}$ et vitesse $v = 300\text{ m/s}$ s'incruste dans une roue cylindrique en bois de masse $M = 2\text{ kg}$ et rayon $R = 25\text{ cm}$. La trajectoire du projectile traverse la roue à une distance $\ell = 20\text{ cm}$ de l'axe de rotation et perpendiculairement à celui-ci. Calculez la vitesse angulaire de la roue après l'impact.
R.N.: $9,54\text{ rad/s}$.



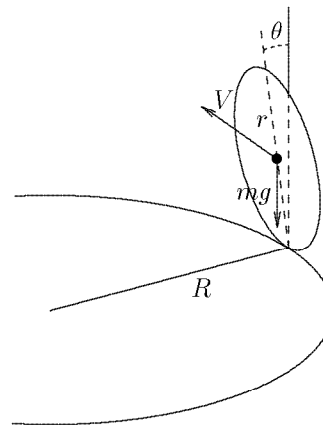
- 3 - Un projectile de masse $m = 10\text{ g}$ et vitesse $v = 300\text{ m/s}$ s'incruste dans un parallélépipède en bois de longueur $L = 50\text{ cm}$ et largeur $d = 8\text{ cm}$ et de masse $M = 2\text{ kg}$. Le parallélépipède repose sur une surface horizontale et peut se déplacer sans friction. La trajectoire du projectile traverse le parallélépipède à une distance $\ell = 20\text{ cm}$ du centre et parallèlement à la surface. Calculez la vitesse (linéaire) du centre de masses et la vitesse angulaire de l'objet après l'impact.
R.N.: $V_{cm} = 1,49\text{ m/s}$; $\omega = 13,91\text{ rad/s}$.



- 4 - Quant on attaque une bille de billard très bas (près du tapis), elle se met à avancer mais en tournant vers l'arrière ce qui fait que la bille ralentit et peut même inverser sa vitesse et revenir. Au contraire, si l'on attaque la bille très haut, l'excès de vitesse de rotation se traduit par une augmentation de la vitesse vers l'avant. Calculez la hauteur d'attaque h à laquelle il faut frapper une bille pleine de rayon R pour que la vitesse de translation et la vitesse de rotation communiquées par la queue fassent que la bille roule sans glisser (même si le coefficient de friction entre la bille et le tapis était zéro).
Nota: remarquez qu'à partir de $F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t}$ on déduit $F \Delta t = m \Delta v$. De même, à partir de $\tau = I \alpha = I \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$, on déduit $\tau \Delta t = I \Delta \omega$
R.: $h = \frac{7}{5} R$.



- 5 - Pièce qui roule (version soft). Quand une pièce de monnaie roule par terre, elle finit par s'incliner et décrit des cercles de rayon décroissant à mesure que la vitesse diminue. Quand la pièce est inclinée, son poids crée un couple qui tend à la faire tomber. Mais, comme la pièce roule, l'effet du couple est de créer un mouvement de précession qui fait que la monnaie tourne vers "la direction vers laquelle elle tombe" (si elle s'est inclinée vers la gauche, elle tourne à gauche). Elle ne tombe pas, mais décrit un cercle. Soit une pièce d'un euro (diamètre: $2r = 23,25\text{ mm}$, masse: $7,5\text{ g}$) qui roule à une vitesse $V = 1,2\text{ m/s}$ et qui présente une inclination de $\theta = 5^\circ$. Calculez la vitesse de rotation ω et le moment angulaire L de la pièce. Calculez le couple τ_p provoqué par le poids de la pièce. Calculez la vitesse (angulaire) Ω de précession. À partir de la vitesse tangentielle V et de la vitesse angulaire Ω déduisez le rayon R du cercle décrit au sol par la pièce.
R.N.: $R = v^2 / (2g \sin \theta) = 0,84\text{ m}$.



- 6 - Pièce qui roule (version adultes). À partir des résultats de l'exercice précédent, calculez la force centrifuge subie par la pièce du fait qu'elle décrit un cercle de rayon R . Cette force crée un couple qui tend à redresser la pièce. En conséquence, les résultats calculés dans l'exercice précédent sont faux car il fallait utiliser le couple résultant: couple dû au poids moins couple dû à la force centrifuge (lequel dépend du rayon de courbure, lequel dépend du couple résultant). Il faut donc exprimer la force centrifuge en fonction de Ω et de R (inconnus). À partir de ça, le couple résultant: couple dû au poids moins couple dû à la force centrifuge. Et à partir de ça, calculer la vitesse de précession Ω . Il vous restera une

équation en Ω et R . Comme $\Omega R = V$, on peut déduire R .

R.N.: $R = v^2(1 + 2 \cos \theta)/(2g \sin \theta) = 2,52 \text{ m}$.

- 7 - Un bâton fin de longueur L et de masse m est lancé à une vitesse v en tournoyant sur lui même avec une vitesse angulaire ω . À un instant où le bâton est perpendiculaire à sa trajectoire le bâton se divise en deux morceaux identiques de longueur et masse moitié. Montrez que chaque morceau continue à tourner avec la même vitesse angulaire ω . Calculez le moment angulaire du système après la séparation pour constater qu'il est égal à celui d'avant la séparation.
- 8 - Faites le problème précédent avec le bâton qui se sépare à un instant où il est parallèle à la sa trajectoire.
- 9 - On veut calculer le rapport des vitesses angulaires ω_2/ω_1 d'un patineur qui commence à tourner à vitesse angulaire ω_1 avec les bras ouverts et qui atteint ω_2 quand il serre les bras le long du corps. Pour ceci il faut faire un calcul approximatif du moment d'inertie d'un homme debout autour de son axe de symétrie vertical. Faites un calcul similaire pour le moment d'inertie d'un bras (du même homme) autour d'un axe passant par son milieu et perpendiculaire au bras. Faites le calcul approximatif du moment d'inertie du même sujet debout mais avec les deux bras ouverts.
- Approchez l'homme et ses bras par des cylindres de dimensions appropriées et de densité égale à celle de l'eau. Les rayons des cylindres à utiliser sont les rayons "moyens" et non les extrêmes.*

R.N.: $1,1 \text{ kg m}^2$ (valeur "officielle"); bras $\simeq 0,08 \text{ kg m}^2$; Homme bras ouverts: $\simeq 3,3 \text{ kg m}^2$;

$\frac{\omega_2}{\omega_1} \simeq 3$

10. STATIQUE OU ÉQUILIBRE DES CORPS.

Ce chapitre est dédié à la statique ou équilibre des corps, et exclusivement aux corps rigides. Un corps est en équilibre quand il ne bouge pas. Dans le langage de tous les jours on parle d'équilibristes et des corps en équilibre. C'est un usage un peu restrictif du mot car il s'agit des personnes ou des corps en équilibre instable ou presque instable. Nous allons utiliser le mot dans son sens large. La chaise sur laquelle vous êtes assis est en équilibre et la table aussi. Le stylo posé sur une extrémité plate ou un château de cartes sont aussi en équilibre, même s'il ne faut pas respirer trop fort. Nous irons plus loin: une aiguille placée sur sa pointe est en équilibre instable: la moindre perturbation (comme le mouvement brownien des molécules dans l'air) la fera sortir de son état d'équilibre. Néanmoins, avant de commencer à tomber, elle était en équilibre.

10.1 Conditions d'équilibre mécanique des corps.

Pour qu'un corps soit en équilibre de translation, il faut que l'accélération linéaire de son centre de masses soit zéro. Nous avons vu que pour que cette condition soit satisfaite il fallait que la somme des forces extérieures aux particules qui forment le corps soit zéro.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{ext.}}{M} = 0 \quad \implies \quad \vec{F}_{ext.} = 0$$

$\vec{F}_{ext.}$ est la somme de toutes les forces extérieures. C'est une équation vectorielle que l'on peut décomposer:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots = 0 \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots = 0 \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Pour qu'un corps rigide soit en équilibre rotationnel, il faut que l'accélération angulaire soit égale à zéro. Nous avons vu que pour cela il fallait que la somme de tous les couples externes $\vec{\tau}$ soit égale à zéro:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots = 0$$

Comme précédemment, cette équation vectorielle peut être décomposée:

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_{1x} + \tau_{2x} + \dots = 0 \\ \tau_y &= \tau_{1y} + \tau_{2y} + \dots = 0 \\ \tau_z &= \tau_{1z} + \tau_{2z} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Dans ces équations l'axe autour duquel l'accélération angulaire et le couple doivent être zéro n'est pas précisé. En fait, il faut que l'accélération angulaire et le couple soient nuls autour de n'importe quel axe. Nous n'avons pas besoin d'établir la condition pour l'infinitude d'axes possibles⁽¹⁾. Pour prouver ceci on peut prouver le théorème suivant: "Soit τ_0 la somme des couples externes par rapport à l'axe O . La somme de couples externes τ_p par rapport à l'axe P , parallèle à l'axe O , est égale à la somme de τ_0 plus le couple, par rapport à l'axe P , de la force résultante appliquée en O ."

⁽¹⁾ On peut prouver qu'il suffit de trois axes mutuellement perpendiculaires.

Nous allons nous limiter à une seule direction de l'axe (parallèle à l'axe z) car la situation est identique pour les autres axes. Pour le moment regardons le couple dû à une seule force externe F_1 appliquée au point (x_1, y_1) (voir dessin). Le couple τ_o de cette force par rapport à l'axe O est:

$$\tau_o = F_{1y}x_1 - F_{1x}y_1$$

(le couple est positif quand on tourne à gauche et négatif quand on tourne à droite). Le couple de cette même force par rapport à l'axe P est:

$$\tau_p = F_{1y}(x_1 - x_p) - F_{1x}(y_1 - y_p)$$

$$\tau_p = F_{1y}x_1 - F_{1x}y_1 - F_{1y}x_p + F_{1x}y_p$$

Remarquez que les deux premiers termes sont le couple de la force F_1 par rapport à l'axe O , autrement dit τ_o . Les deux derniers termes sont le moment qu'aurait eu la force F_1 par rapport à l'axe O si elle avait été appliquée en P . La démonstration est donc faite pour une seule force externe.

Si nous avons plusieurs forces il faut faire la somme sur toutes les forces:

$$\tau_p = \sum_i F_{iy}x_i - \sum_i F_{ix}y_i - x_p \sum_i F_{iy} + y_p \sum_i F_{ix}$$

Les deux premiers termes sont le couple de toutes les forces externes par rapport à l'axe O . Les deux derniers sont le couple qu'aurait eu la somme des forces externes si cette somme des forces avait été appliquée au point P :

$$\tau_p = \tau_o - x_p F_y + y_p F_x$$

Si le corps est en équilibre de translation, la somme des forces externes est zéro et $\tau_p = \tau_o$. Donc, pour un corps en équilibre, si le couple par rapport à un certain axe est zéro, il est aussi zéro par rapport à n'importe quel autre axe parallèle au premier.

Nous avons en tout six conditions à satisfaire pour qu'un corps soit en équilibre: somme des forces externes et somme des couples externes égales à zéro pour chacun des trois axes.

10.2 Centre de gravité.

Le **centre de gravité** d'un objet est le point d'application de la résultante de l'ensemble des forces de gravité agissant sur toutes les particules d'un corps. Pour la coordonnée x , le centre de gravité est donnée par:

$$x_{cg} = \frac{\sum_i m_i g_i x_i}{\sum_i m_i g_i}$$

où g_i est l'accélération de gravité qui agit sur la particule i de masse m_i . Les formules pour les autres coordonnées sont similaires.

Si cette accélération de gravité est la même pour toutes les particules, on peut sortir le facteur g . Dans ce cas la formule devient:

$$x_{cg} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

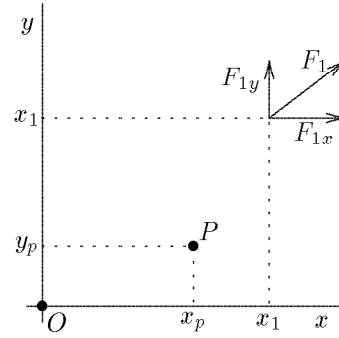


Figure 10.1 Les deux axes de référence O et P sont perpendiculaires au dessin.

Ce qui est la formule de la coordonnée du centre de masses (voir chapitre 6). Donc, dans le cas où la gravité peut être considérée constante dans tout le volume du corps, le centre de gravité coïncide avec le centre de masses.

Ceci est valable pour des objets petits (c'est quoi petit?) et encore, pas dans tous les cas. Il ne faut pas oublier que la force d'attraction gravitationnelle est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance qui sépare les deux masses. Pour un objet dont les dimensions ne sont pas négligeables par rapport à la distance à l'objet qui l'attire, les parties plus proches subiront une attraction plus forte que les parties éloignées. Dans ce cas, le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre de masses. Nous avons déjà donné un exemple dans lequel la dépendance de l'attraction gravitationnelle avec la distance donnait des effets remarquables. C'était dans l'explication de la précession des équinoxes en 9.4.

Un autre cas similaire se présente pour les satellites en orbite. Comme le satellite est en orbite, la force d'attraction de la terre est globalement et exactement compensée par la force centrifuge. Les phénomènes de deuxième ordre peuvent alors se manifester clairement. Imaginez un satellite de forme allongée en position verticale et tournant autour de la terre, de sorte que la partie basse reste toujours plus basse. Cette partie basse est plus attirée par la terre que la partie haute car elle est plus proche du centre de la terre. De plus, comme la vitesse angulaire du satellite autour de la terre est la même pour les deux parties du satellite, la force centrifuge $\omega^2 r$ sera plus grande pour la partie haute du satellite que pour la partie basse. Le résultat est que des forces de deuxième ordre (très petites comparées au poids du satellite) attirent le bas du satellite vers la terre et poussent le haut vers l'espace. Le satellite a donc tendance à se stabiliser dans cette position. Mais si on inverse le haut et le bas il se stabiliserait aussi dans la nouvelle position. Par contre la position "horizontale" est plutôt instable. Dans le jargon du métier cette situation de forces gravitationnelles de deuxième ordre s'appelle **microgravité**.

Si, au lieu de parler du haut et du bas du satellite, on calcule la position du centre de gravité, on trouvera celui-ci un peu plus bas que le centre de masses. Ceci est vrai pour n'importe quelle position du satellite mais plus flagrant si le satellite est de forme allongée et vertical. Le poids du satellite, appliqué au centre de gravité produit un couple par rapport à un axe horizontal passant par le centre de masses. Ce couple a tendance à faire tourner le satellite de sorte que le centre de gravité descende.

Si on suspend un objet autour d'un axe, il prendra sa position d'équilibre quand le couple des forces externes sera nul. Comme nous l'avons vu ce couple sera égal au couple créé par le poids de l'objet appliqué au centre de gravité. Pour que ce couple soit nul il faut que le centre de gravité se trouve à la verticale du pivot.

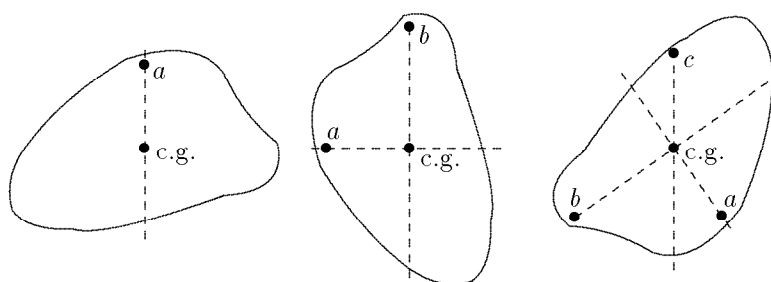


Figure 10.2 Méthode utilisée par les bricoleurs pour trouver, de façon approchée, le centre de gravité d'un objet plat. Elle figure ici pour respecter la tradition.

Si on suspend un objet plat à partir de plusieurs axes et qu'on laisse l'objet prendre sa position d'équilibre, le centre de gravité se trouvera toujours à la verticale de l'axe. L'intersection de ces verticales permet de trouver le centre de gravité. Cette méthode ne présente pas grand intérêt. Elle est peu précise et ne fonctionne que pour des objets plats. Il est rare que l'on ait à trouver le centre de gravité d'un objet de ce genre.

Exemple 10.1 Centre de gravité d'un objet. Pour trouver la position du centre de gravité d'une voiture on peut utiliser la méthode suivante. On met chaque roue de la voiture sur une balance avec la voiture horizontale et on relève les mesures. Puis on refait les mêmes mesures mais en soulevant le devant ou l'arrière de la voiture.

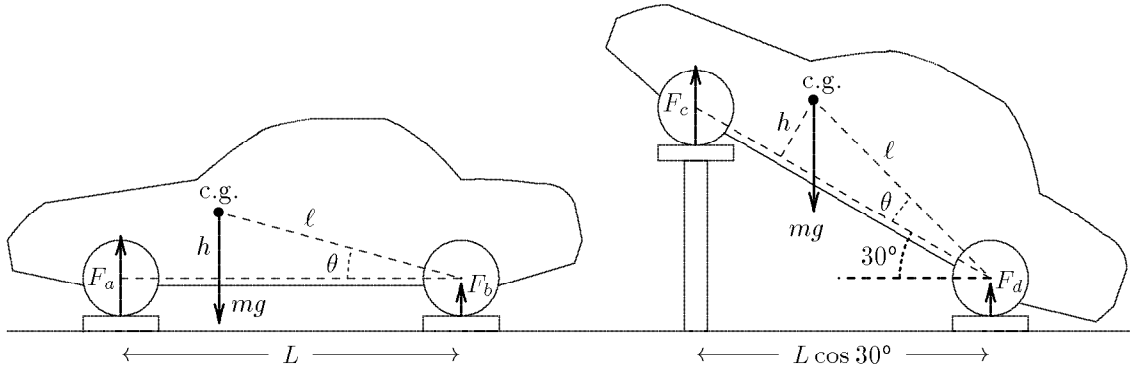


Figure 10.3 Pour trouver le centre de gravité d'une voiture on mesure la charge par essieu avec la voiture horizontale et inclinée.

Les données numériques sont les suivantes: Distance L entre essieux: 2,70 mètres. Charge sur les essieux:

	<i>avant</i>	<i>arrière</i>
<i>Voiture horizontale</i>	7363 N	2937 N
<i>Inclinée 30°</i>	6237 N	4063 N

Le poids de la voiture est, évidemment, la somme des charges sur les essieux, soit: $mg = 7363 + 2937 = 10300 \text{ N}$.

Comme la voiture est en équilibre, le couple autour de n'importe quel axe doit être zéro. Nous allons calculer le couple par rapport à l'essieu arrière (centre des roues arrière). Par rapport à cet axe la réaction du sol sur la roue arrière donne un couple zéro car son bras est nul. Les seuls deux couples qui restent sont: celui produit par le poids mg et celui de la réaction sur l'essieu avant. Il doivent s'annuler:

$$F_a L = mgl \cos \theta$$

où l est la distance entre l'essieu arrière et le centre de gravité et θ l'angle que fait cette distance avec l'horizontale. Ceci nous permet de calculer directement $l \cos \theta$ qui est la position horizontale du centre de gravité par rapport à l'essieu arrière. On obtient:

$$l \cos \theta = \frac{F_a L}{mg} = \frac{7363 \cdot 2,70}{10300} = 1,930 \text{ m}$$

Le centre de gravité se situe donc à la verticale d'un point situé à 1,930 m de l'essieu arrière et à $2,70 - 1,930 = 0,77 \text{ m}$ de l'essieu avant.

Pour déterminer la hauteur du centre de gravité il faut une donnée supplémentaire. On l'obtient en faisant la même mesure avec la voiture inclinée vers l'avant ou vers l'arrière. La raison pour laquelle cette nouvelle mesure peut déterminer la hauteur du centre de masses est que, en inclinant la voiture, les bras de levier du poids et de la réaction sur les essieux vont diminuer dans des rapport différents du fait que le centre de gravité ne se trouve pas à la hauteur des essieux. Si nous calculons à nouveau les couples autour de l'essieu arrière on obtient:

$$F_c L \cos 30^\circ = mgl \cos(30^\circ + \theta)$$

Pour la voiture horizontale, nous avons trouvé:

$$F_a L = mgl \cos \theta$$

En divisant les deux équations on obtient:

$$\frac{F_c}{F_a} \cos 30^\circ = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos \theta} = \frac{\cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta}{\cos \theta} = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \tan \theta$$

d'où on tire:

$$\tan \theta = \frac{1 - \frac{F_c}{F_a}}{\tan 30^\circ} = 0,2649$$

et $\theta = 14,838^\circ$. Ceci permet de calculer la hauteur h du centre de gravité par rapport aux essieux:

$$h = 1,930 \tan \theta = 0,5113 \text{ mètres}$$

Pour déterminer la position latérale du centre de gravité il faudrait refaire une autre mesure en inclinant la voiture à gauche ou à droite.

Exemple 10.2 Échelle contre un mur.

Une échelle de longueur $L = 2,33 \text{ m}$ et de masse $m = 8 \text{ kg}$ est appuyée sur un mur sans friction de sorte que le haut de l'échelle se trouve à 2 m de hauteur. Le point bas est appuyé à $1,2 \text{ m}$ du mur (voir figure 10.4). On admet que le centre de masses de l'échelle se trouve, dans cette position, à 60 cm du mur. On souhaite calculer les forces exercées sur l'échelle par le mur et par le sol. Comme l'échelle est en équilibre de translation, les forces verticales doivent s'annuler. Ici nous n'avons que le poids et la composante normale de la réaction du sol:

$$mg = F_N = 8 \cdot 9,81 = 78,48 \text{ N}$$

Pour que les forces horizontales s'annulent, il faut que la réaction du mur s'équilibre avec la force de friction exercée par le sol:

$$F_2 = F_f$$

Pour satisfaire l'équilibre de rotation nous allons calculer le couple autour du point d'appui au sol (cela met hors jeu F_N et F_f). Le couple produit par le poids doit se compenser avec celui produit par le mur:

$$mg \frac{L}{2} \cos \theta = F_2 L \sin \theta$$

Comme l'angle θ est connu, on déduit:

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{\tan \theta} = \frac{1}{2} \frac{8 \cdot 9,81}{2/1,2} = 23,54 \text{ N}$$

La force de friction F_f doit être égale à F_2 pour que l'échelle ne glisse pas. F_1 est égale à la somme (vectorielle) de F_N et F_f .

Le module de F_1 est:

$$F_1 = \sqrt{78,48^2 + 23,54^2} = 81,94 \text{ N}$$

Pour que l'échelle ne glisse pas il faut que le coefficient de friction statique soit égal ou supérieur à:

$$\mu_s = \frac{F_f}{F_N} = \frac{23,54}{78,48} = 0,30$$

(mais pour que je monte il faudrait que le coefficient de friction dynamique soit aussi plus grand que 0,30).

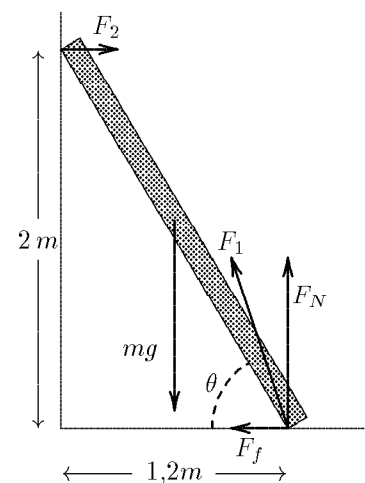


Figure 10.4 Échelle appuyée sur un mur sans friction.

Exemple 10.3 Mât de charge.

Une poutre de poids négligeable et de $4,47\text{ m}$ de longueur est tenue à un mur par un axe sur laquelle elle peut pivoter. Un hauban tient la poutre dans la position indiquée dans la figure. Un poids de 5000 N (environ une demi tonne dans le langage courant) est accroché à l'extrémité. Calculer les différentes forces sur la poutre.

Comme d'habitude, l'équilibre demande que les couples autour de n'importe quel axe soient nuls. On calcule le couple autour du pivot de la poutre. Le poids exerce un couple vers la droite. Ce couple est compensé par le couple créé par le hauban:

$$mgL = LT \sin \alpha + DT \cos \alpha$$

d'où:

$$T = \frac{mgL}{L \sin \alpha + D \cos \alpha} = \frac{5000 \cdot 4}{4 \sin 14^\circ + 2 \cos 14^\circ} \simeq 6877\text{ N}$$

L'équilibre de translation demande que les forces se compensent. Pour les forces horizontales nous n'avons que T_h et F_h :

$$T_h = T \cos \alpha = F_h$$

$$F_h = 6877 \cos 14^\circ \simeq 6673\text{ N}$$

Pour les forces verticales:

$$F_v = mg - T_v = 5000 - T \sin \alpha \simeq 3336\text{ N}$$

On peut vérifier les résultats en calculant le couple autour de l'extrémité de la poutre:

$$\tau = D F_h - L F_v = 2 \cdot 6673 - 4 \cdot 3336 \simeq 0$$

(aux erreurs d'arrondi près) ce qui est rassurant.

Si le poids P de la poutre n'avait pas été négligeable il aurait suffi de le rajouter dans les équations du couple:

$$mgL + P \frac{L}{2} = LT \sin \alpha + DT \cos \alpha$$

Le poids modifie aussi l'équation des forces verticales:

$$F_v = mg + P - T_v$$

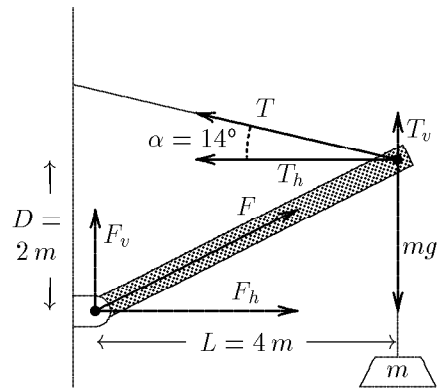


Figure 10.5 Mât de charge. La poutre peut pivoter autour de son support. La tension du câble maintient la poutre en place.

10.3 Stabilité.

On dit qu'un corps est en **équilibre instable** quand une toute petite rotation du corps crée un couple qui a tendance à augmenter la rotation (une petite rotation à droite crée un couple à droite). C'est l'exemple d'un crayon placé verticalement sur sa pointe. Si son centre de gravité est exactement au dessus de la pointe, aucun couple n'agit sur le crayon. Mais dès qu'une perturbation déplace le centre de gravité vers la droite, il se crée un couple qui a tendance à faire tourner le crayon vers la droite. Ce couple est d'autant plus grand que le crayon s'éloigne de la verticale: le crayon tombe.

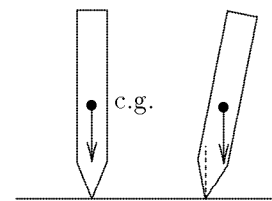


Figure 10.6 Équilibre instable. Une petite perturbation s'amplifie et entraîne la chute.

On dit qu'un corps est en **équilibre indifférent** quand une toute petite rotation du corps ne crée aucun couple. L'exemple type est celui d'une sphère sur un plan horizontal. Même si la sphère tourne, son centre de gravité reste au dessus du point d'appui et nul couple ne se crée. La sphère est toujours stable, même si une petite perturbation peut la faire tourner facilement (voir plus loin).

On dit qu'un corps est en **équilibre stable** quand une toute petite rotation du corps crée un couple qui tend à ramener le corps à sa position initiale. On pourrait penser que pour qu'un corps soit en équilibre stable il faut que la verticale qui passe par son centre de gravité passe à l'intérieur de la base d'appui du corps. Ceci est une condition suffisante mais elle n'est pas nécessaire. On peut trouver des exemples amusants de corps en équilibre stable dans lequel le point d'appui est un point.

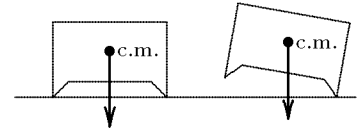


Figure 10.7 Équilibre stable. Une perturbation crée un couple qui a tendance à ramener le corps vers la position initiale.

Au lieu de réfléchir en termes de forces et couples, on peut réfléchir en termes d'énergie potentielle. Un corps est en **équilibre stable** si une petite variation de sa position augmente son énergie potentielle. De même, un corps est en **équilibre indifférent** si une petite variation de sa position ne modifie pas son énergie potentielle. Finalement, un corps est en **équilibre instable** si une petite variation de sa position diminue son énergie potentielle.

Cette définition de stabilité est beaucoup plus générale que celle basée sur les forces. Elle est même valable pour l'équilibre chimique⁽²⁾ ou électrique. Avec cette définition on voit que la situation d'équilibre d'une bille à l'intérieur d'un bol est au plus bas du bol, ou que la situation d'équilibre d'un condensateur est déchargé.

Mais tous les équilibres stables se sont pas égaux. On sent qu'il y a des équilibres stables qui sont "peu stables" et d'autres équilibres stables qui sont "très stables". Par exemple une pièce de monnaie ou une cassette vidéo sont plus stables à plat que sur un chant, alors que les deux positions sont des équilibres stables.

La mesure de cette "stabilité de l'équilibre stable" est le travail (ou l'énergie) qu'il faut fournir pour faire passer le corps de sa situation d'équilibre stable à sa situation d'équilibre instable.

Par exemple, dans la figure à droite, pour passer de l'équilibre stable à l'équilibre instable, il faut faire basculer le parallélépipède de la position à gauche jusqu'à sa position à droite pour que la verticale du centre de gravité soit sur l'arête de droite. Pour cela il faut faire monter le centre de gravité d'une hauteur Δh .

$$\Delta h = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + \ell^2} - \frac{1}{2} h$$

Ce qui fait une augmentation d'énergie potentielle de $mg\Delta h$. Dans cet exemple on voit que l'énergie à fournir diminue très vite quand ℓ devient petit devant h . Autrement dit, l'équilibre stable est très précaire quand la largeur est plus petite que la hauteur.

Toutes les tables carrées sont bancales. Pour qu'elles ne le soient pas il faudrait que l'extrémité des quatre pattes soit sur un plan et que le sol soit aussi un plan. Aucune des deux exigences ne rentre dans les capacités des menuisiers ou des maçons. Heureusement la souplesse des tables compense, en partie, les imperfections. On peut se demander pourquoi on persiste à faire des tables carrées alors que des tables tripodes ne sont jamais bancales, même sur un sol irrégulier. La raison est que, pour des dimensions de tables usuelles, l'équilibre d'une table tripode est beaucoup plus précaire que celui d'une table tétrapode (à quatre pattes).

Mais pour la même raison, l'équilibre d'une table à six pattes est meilleur que celui d'une à cinq pattes, lequel est meilleur que celui d'une à quatre pattes. La table la plus stable est une table ronde avec un nombre infini de pattes. Si l'on fait surtout des tables à quatre pattes c'est

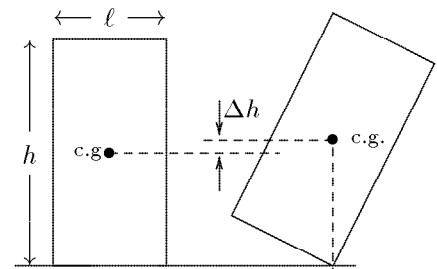


Figure 10.8 L'équilibre est stable jusqu'à la position de droite. L'énergie à fournir est proportionnelle à Δh .

⁽²⁾ Là où un physicien dirait "La situation d'équilibre de la tour Eiffel est: couchée", un chimiste rétorque "La situation d'équilibre de la tour Eiffel est: un tas de rouille".

que l'on gagne beaucoup en stabilité en passant de trois à quatre pattes, mais relativement peu en augmentant le nombre de pattes. La situation est la même pour les chaises.

Voici une curiosité. Les deux objets de droite sont appuyés sur un point. Celui de gauche est en équilibre stable alors que celui de droite est en équilibre instable. La raison est que les faces basses et hautes des deux objets sont sphériques mais avec des rayons de courbure différents. Le centre de courbure de l'objet de gauche se trouve au dessus du centre de gravité. Ceci fait que quand l'objet s'incline, le centre de gravité monte: il faut lui fournir de l'énergie. Pour l'objet de droite c'est l'inverse: le centre de courbure est plus bas que le centre de gravité. Quand l'objet s'incline le centre de gravité descend; ceci accélère l'inclinaison, et l'objet chute. Si le centre de courbure avait coïncidé avec le centre de gravité l'objet serait en équilibre indifférent: la hauteur du centre de gravité ne changerait pas avec l'inclinaison. En fait l'objet serait un morceau de sphère.

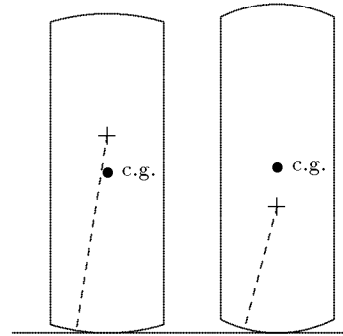


Figure 10.9 L'objet de gauche est en équilibre stable. Celui de droite est en équilibre instable.

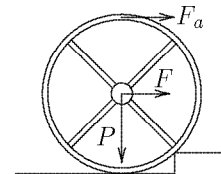
10.4 Exercices.

- 1 - Le centre de masses d'un objet de 5 m de longueur est situé à 2 m de l'extrémité lourde. Si deux personnes veulent le transporter et qu'une des deux se place à l'extrémité lourde, où doit se placer l'autre personne pour que les deux portent le même poids?
R.N.: à 4 m de l'extrémité lourde.

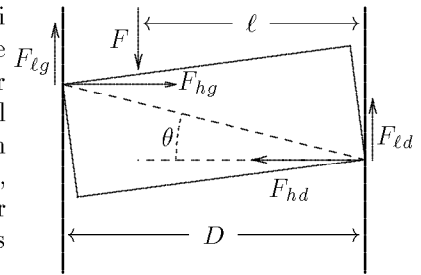
- 2 - Soit une caisse parallélépipédique de 80 cm de haut et 50 cm de large et de masse $m = 50\text{ kg}$. Le coefficient de friction entre la caisse et le sol est de $0,4$. Son centre de gravité se trouve au centre (mi-hauteur, mi-largeur). Calculez quelle est la force horizontale nécessaire pour faire glisser la caisse. Calculez la hauteur maximum à laquelle on peut appliquer la force pour que la caisse glisse sans basculer.
R.N.: $196,2\text{ N}$; $62,5\text{ cm}$.

- 3 - Une table de 2 m de long, 75 cm de hauteur et de masse $M = 50\text{ kg}$ est appuyée sur quatre pattes situées aux coins. Le centre de gravité de la table se situe au centre et 10 cm sous la surface de la table. Le coefficient de friction des pattes avec le sol est de $0,4$. On fait glisser la table en appliquant une force horizontale au niveau de la surface de la table. Calculez la force nécessaire pour faire glisser la table ainsi que les forces verticales et horizontales exercées par le sol sur les pattes avant et arrière de la table.
R.N.: $f_h = 0,4Mg$; $f_{1h} = 0,14Mg$; $f_{1v} = 0,35Mg$; $f_{2h} = 0,26Mg$; $f_{2v} = 0,65Mg$;

- 4 - Au Far West, pour désembourber un chariot de caravane, certains poussaient le corps du chariot, mais d'autres poussaient le haut des roues. Pour voir qui était plus efficace, calculez la force horizontale à exercer pour faire monter à une roue de poids $P = 2000\text{ N}$ et de diamètre $D = 1,5\text{ m}$ une marche de hauteur $h = 10\text{ cm}$. D'abord avec une force F exercée au niveau de l'axe, puis avec une force F_a exercée en haut de la roue. Pour ces forces, la direction horizontale n'est pas la plus efficace. Quelle est la meilleure direction?
R.N.: 1151 N ; $534,5\text{ N}$.



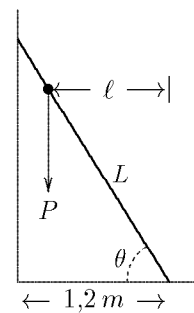
- 5 - Le tiroir qui grippe. Quand on pousse un tiroir, il arrive qu'il coince. Il appuie sur les côtés avec deux coins et si vous poussez plus fort il se coince d'avantage. Le tiroir de la figure glisse (ou coince) sur une ouverture de largeur D . On pousse avec une force F décentrée ou non. Il s'appuie sur les côtés et à cause du coefficient de friction μ , des forces horizontales F_{hg} , F_{hd} et longitudinales $F_{\ell g}$, $F_{\ell d}$ apparaissent. Commencez par supposer que le tiroir glisse. Démontrez (par des raisonnements, pas avec des formules) que les forces horizontales sont identiques au



signe près et que, en conséquence, les forces longitudinales le sont aussi. Déduisez la relation entre les forces longitudinales et les forces horizontales. Déduisez la valeur maximum que peut prendre le coefficient de friction pour que la glisse soit possible. Examinez le cas $D = 0,8 \text{ m}$, $\ell = 0,6 \text{ m}$, $\theta = 10^\circ$ et $\mu = 0,40$.

R.: Il grippe.

- 6 - Calculez jusqu'à quelle hauteur on peut monter dans l'échelle de l'exemple 10.3 du fascicule (page 10.5) avant que le pied de l'échelle ne glisse. Cette fois, l'ensemble du poids de l'échelle plus celui du futur accidenté n'est pas appliqué au milieu de l'échelle mais se déplace vers le mur à mesure que la victime monte. Calculez jusqu'à quelle distance peut se déplacer le centre de masses de l'ensemble avant que le pied de l'échelle ne glisse. La longueur de l'échelle est $L = 2,33 \text{ m}$. Le pied est à $1,2 \text{ m}$ du mur. Le coefficient de friction entre le pied de l'échelle et le sol est $\mu = 0,40$. On admet que le coefficient de friction avec le mur est zéro. Le poids de l'échelle est $m = 8 \text{ kg}$ et celui de la victime est $M = 70 \text{ kg}$. Calculez la hauteur des pieds de la victime quand l'accident commence.



R.N.: $0,823 \text{ m}$ du pied, soit $1,37 \text{ m}$ du sol.

11. GRAVITATION. MOUVEMENTS PLANÉTAIRES.

11.1 Un peu d'histoire.⁽¹⁾

On connaît Pythagore surtout par son théorème dont, ironie du sort, il ne fit, probablement pas, la démonstration. Au 6^{ème} siècle avant J.C. il fut le gourou d'une espèce de secte à Crotona (au sud de l'Italie). Il découvrit le rapport entre la longueur d'une corde et la note obtenue (pour une même tension de la corde). Ainsi, les cordes dont le rapport de longueur est une fraction simple donnent des sons "harmonieux". En extrapolant il lança l'affirmation que tout l'univers répondait à l'"harmonie des sphères". La sphère centrale était, évidemment, la terre. Autour d'elle, des sphères concentriques contenaient le soleil, la lune, les planètes et les étoiles. Tout tournait sur des sphères. Cette affirmation gratuite allait devenir un dogme accepté par tous (ou presque) y compris l'église, pendant plus de 20 siècles, comme une Vérité indiscutable.

La terre était donc le centre de l'univers. Les étoiles tournaient à vitesse angulaire constante (un tour par jour sidéral). Par contre la rotation des planètes était plus compliquée. Elles tournaient avec presque la même vitesse mais pas exactement. Parfois elles tournaient plus vite que les étoiles et parfois plus lentement. Elles ne pouvaient être fixes sur leur sphère. Pour concilier leur mouvement compliqué avec l'"harmonie des sphères" on imagina qu'elles tournaient sur un cercle dont le centre tournait, lui-même, sur un autre cercle centré sur la terre. La trajectoire des planètes était une *épicycloïde*. Ce modèle est le modèle géocentrique de Ptolémée⁽²⁾. Le modèle de Ptolémée était très compliqué et surtout ne pouvait pas expliquer les mesures de plus en plus précises faites notamment par l'astronome Tycho Brahé⁽³⁾. On essaya de le rafistoler en rajoutant des nouvelles épicycloïdes (un cercle qui tourne sur un cercle qui tourne sur un cercle, etc.) sans grand succès.

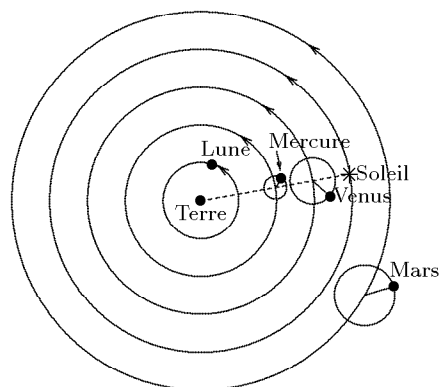


Figure 11.1 Modèle géocentrique de Ptolémée. Tous les objets célestes tournent une fois par jour autour de la terre. Pour tenir compte du déplacement des planètes par rapport aux étoiles, on fait tourner chaque planète autour d'un cercle dont le centre tourne une fois par jour autour de la terre.

Les observations astronomiques de Copernic⁽⁴⁾ étaient beaucoup moins précises que celles de Tycho Brahé, mais suffisamment pour le convaincre que des épicycloïdes supplémentaires ne suffisaient pas à compenser l'excentricité de l'orbite de Mars. Il trouva que le modèle héliocentrique (avec le soleil au centre) et les planètes lui tournant autour expliquait mieux les observations. Il écrivit un traité le décrivant mais, comme il était chanoine, il était bien placé pour savoir que l'héliocentrisme était une hérésie et qu'il aurait des problèmes avec l'inquisition s'il publiait son

⁽¹⁾ Je vous conseille le livre "Les somnambules" du grand journaliste, écrivain et aventurier d'origine hongroise Arthur Koestler.

⁽²⁾ Claude Ptolémée. Astronome grec du 2^{ème} siècle Apr. J.C. Né en Haute-Égypte. Auteur de l'Almageste et d'une Géographie qui a fait autorité pendant le Moyen Âge et la Renaissance.

⁽³⁾ Tycho Brahé. Astronome danois né à Knudstrup (1546-1601). Il fut le dernier grand astronome à faire des observations sans télescope.

⁽⁴⁾ Nicolas Copernic. Astronome polonais, né à Toruń (1473-1543). Sur son lit de mort publia son célèbre traité "De revolutionibus orbium caelestium" décrivant le système solaire héliocentrique avec la terre et les planètes tournant sur elles-mêmes et autour du soleil.

traité. Il finit par le publier sur son lit de mort et après avoir bien dit que l'héliocentrisme n'était qu'un artifice qui facilitait le calcul, et que la terre était bien, comme le soutenait l'église, le centre de l'univers.

Kepler⁽⁵⁾ avait été assistant de Tycho Brahé. Il analysa les données de Tycho Brahé (et notamment les anomalies de l'orbite de Mars) pendant vingt ans et finit par trouver des régularités dans les mouvements des planètes. Ces régularités sont connues comme les **Lois de Kepler du mouvement des planètes**:

- 1.- **Loi des orbites:** Toutes les planètes circulent dans des orbites elliptiques ayant le soleil dans un des foyers.
- 2.- **Loi des surfaces:** Une ligne joignant la planète au soleil balaye des surfaces égales dans des temps égaux.
- 3.- **Loi des périodes:** Le carré de la période orbitale d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube de la distance moyenne de la planète au soleil.

Les lois de Kepler appuyèrent la théorie de Copernic. Elles montraient la grande simplicité avec laquelle on peut décrire le mouvement des planètes. Mais ces lois décrivaient seulement les observations sans aucune interprétation théorique. Il faut attendre Newton pour avoir une interprétation théorique. Et le triomphe de la théorie d'attraction universelle de Newton est que les lois de Kepler se déduisent de la théorie.

11.2 Loi d'attraction universelle de Newton.

Deux particules de masses m_1 et m_2 situées à une distance r s'attirent avec une force F , colinéaire avec la droite qui joint les particules, de valeur:



$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (11.1)$$

Où G est la **constante de gravitation universelle** qui a la même valeur pour toutes les paires de particules.

Il est intéressant de noter que les forces agissant sur les deux particules forment une paire action-réaction. Les deux forces sont égales, de signe opposée et colinéaires.

La force d'attraction gravitationnelle est indépendante du vide ou des obstacles qui peuvent se trouver entre les particules. Elle se propage à des distances intergalactiques. La vitesse de propagation de l'attraction de gravité n'a pas encore été mesurée mais on suppose qu'elle se propage à la vitesse de la lumière (pour ne pas faire de la peine à M. Einstein).

Il ne faut pas confondre la constante universelle G avec l'accélération de gravité g .

L'équation 11.1 décrit la force entre particules. La force entre des objets étendus doit être calculée en décomposant chaque corps en particules et additionnant (vectoriellement) les forces entre paires de particules. On peut montrer que, dans le cas où les objets sont des sphères uniformes, on peut faire le calcul en considérant que toute la masse de chaque sphère se trouve dans le centre de masses de chaque sphère.

Mesurer la constante G est très délicat car il faut mesurer les forces entre deux objets dont on doit pouvoir changer la position. Les forces sont extrêmement faibles comparées au poids des

⁽⁵⁾ Johannes Kepler. Astronome allemand, né à Weil (dans le Wurtemberg) (1571-1630). Il énonça les lois connues comme "lois de Kepler" d'où Newton sut dégager la loi d'attraction universelle.

Pour calculer la force totale il faut faire la somme de tous les anneaux sur la coquille. Dans l'expression précédente les variables α , θ et ℓ sont dépendantes. Pour pouvoir intégrer, il faut transformer l'expression pour la mettre en fonction d'une seule variable. La plus commode est ℓ . Dans la figure on voit que:

$$\cos \alpha = \frac{L - r \cos \theta}{\ell} \quad (11.3)$$

Le théorème du cosinus (ou théorème de Pythagore généralisé) nous dit:

$$\ell^2 = r^2 + L^2 - 2rL \cos \theta \quad (11.4)$$

$$r \cos \theta = \frac{r^2 + L^2 - \ell^2}{2L} \quad (11.5)$$

En différenciant l'équation 11.5 nous obtenons:

$$\sin \theta d\theta = \frac{\ell}{rL} d\ell \quad (11.6)$$

En remplaçant l'équation 11.5 dans l'équation 11.3:

$$\cos \alpha = \frac{L - \frac{r^2 + L^2 - \ell^2}{2L}}{\ell} = \frac{L^2 - r^2 + \ell^2}{2L\ell}$$

puis on remplace cette valeur ainsi que l'équation 11.6 dans l'équation 11.2:

$$dF = G \frac{M_1 dM}{\ell^2} = G \frac{M_1 \rho \varepsilon 2\pi r^2 \frac{\ell}{rL} d\ell}{\ell^2} \frac{L^2 - r^2 + \ell^2}{2L\ell} = \frac{GM_1 \rho \varepsilon \pi r}{L^2} \left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1 \right) d\ell$$

Pour faire la somme sur tous les anneaux il faut que ℓ varie entre $L - r$ et $L + r$. Intégrons la partie variable:

$$\int_{L-r}^{L+r} \left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1 \right) d\ell = (L^2 - r^2) \left(\frac{1}{L-r} - \frac{1}{L+r} \right) + 2r = (L^2 - r^2) \left(\frac{L+r-L+r}{L^2 - r^2} \right) + 2r = 4r$$

Le force totale sera:

$$F = \frac{GM_1 \rho \varepsilon 4\pi r^2}{L^2}$$

Mais $4\pi r^2$ est la surface de la coquille, ε est son épaisseur et ρ sa densité. Le produit des trois est la masse m de la coquille:

$$F = \frac{GM_1 m}{L^2}$$

La force d'attraction entre la masse M_1 et la coquille est la même que si toute la masse de la coquille se trouvait concentrée au centre de la coquille.

On peut considérer une sphère comme formée par des coquilles concentriques. La force d'attraction entre la sphère et une masse ponctuelle est la somme des forces d'attraction de chaque coquille. Elle est donc la même que si toute la masse de la sphère se trouvait concentrée au centre de la sphère. On peut remarquer que ce résultat est valable même si les coquilles ont des densités différentes. Par exemple, les coquilles plus internes peuvent être plus denses que les externes (comme c'est le cas pour la terre). La seule condition à respecter est que chaque coquille sphérique ait une densité uniforme.

On obtient un résultat amusant quand on fait le même calcul quand la masse M_1 est située à l'intérieur de la coquille. Le calcul est le même sauf que les limites de l'intégrale changent: cette fois ℓ doit varier entre $r - L$ et $L + r$:

$$\int_{r-L}^{L+r} \left(\frac{L^2 - r^2}{\ell^2} + 1 \right) d\ell = (L^2 - r^2) \left(\frac{1}{r-L} - \frac{1}{L+r} \right) + 2L = (L^2 - r^2) \left(\frac{L+r-r+L}{r^2 - L^2} \right) + 2L = 0$$

Donc, les forces sur une masse à l'intérieur de la coquille s'annulent. Le résultat est valable aussi si la coquille est épaisse car on peut l'imaginer comme formée par une infinitude de coquilles minces.

La raison de ce résultat n'est pas une raison mathématique mais une raison physique. Les masses de la coquille qui se trouvent alignées avec la masse M_1 à l'intérieur exercent des forces inversement proportionnelles à leur distance à la masse M_1 . Mais pour un même *angle solide* la quantité de masse de la coquille augmente avec le carré de la distance. En conséquence l'augmentation de la distance est compensée par l'augmentation de masses et les forces de masses en opposition se compensent exactement. Ce résultat est valable pour toutes les forces qui diminuent avec le carré de la distance et, notamment, pour l'attraction électrostatique.

La force d'attraction qu'une masse sphérique de rayon R exerce sur une particule de masse située à une distance $r < R$ (*à l'intérieur*) de la sphère, est égale à celle qu'exerce la sphère de rayon r . Tout le reste de la sphère, la partie située entre r et R est une coquille épaisse dont les forces sur la particule à son intérieur s'annulent.

11.2.2 Masse de la terre et variations de g .

Après la mesure de la constante de gravitation universelle, les gens dirent que Cavendish était la première personne à avoir "pesé la terre". La raison est qu'une fois G connue on peut déduire immédiatement la masse de la terre. En effet, un objet de masse M placé sur la surface de la terre est attiré par la terre avec une force $F = Mg$. Mais cette force est égale à celle donnée par la loi de Newton:

$$Mg = G \frac{M_t M}{r^2}$$

où M_t est la masse de la terre et $r = 40\,000 \text{ km} / 2\pi$ est son rayon.

$$M_t = \frac{gr^2}{G} = \frac{9,81 (6,366 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

La valeur de l'accélération de gravité g n'est autre chose que:

$$g = \frac{GM_t}{r^2}$$

g varie avec la hauteur. Il diminue quand la hauteur augmente car r augmente. Il diminue aussi quand on est à l'intérieur de la terre (dans une galerie de mine, par exemple) car bien que r diminue, la masse de la sphère située à l'intérieur de r diminue encore plus vite.

g varie aussi avec la latitude, et ceci pour deux raisons. La première est que comme la terre est aplatie aux pôles, le rayon est plus grand à l'équateur qu'aux pôles⁽⁷⁾. Donc g est plus petite à l'équateur qu'aux pôles. La deuxième raison est que, comme la terre tourne, la force centrifuge est plus grande à l'équateur (rayon de rotation plus grand) qu'aux pôles, où elle est nulle. La valeur de g au niveau de la mer passe de 9,7803 à l'équateur, à 9,8322 aux pôles.

ATTENTION.

Il ne faut pas confondre l'accélération de gravité réelle qui dépend de l'endroit où on se trouve, avec l'accélération de gravité standard $9,80665 \text{ m/s}^2$ utilisée dans la définition de la force en Newtons. Un Newton vaut toujours $1 \text{ kg} \cdot 9,80665 \text{ m/s}^2$ mais le nombre de Newtons nécessaires pour soulever une masse d'un kilogramme dépend de l'endroit où l'on se trouve.

⁽⁷⁾ La différence entre le rayon à l'équateur et le rayon aux pôles est de 22 km.

11.3 Champ gravitationnel.

On peut voir l'attraction que deux masses exercent l'une sur l'autre comme une interaction entre paires de particules. Une autre façon de la voir est de dire qu'une masse modifie l'espace autour d'elle en créant un **champ gravitationnel**. Ce champ agit sur toute autre particule de masse en exerçant une force sur elle. Ce sont deux façons de voir une même réalité physique et le résultat est, évidemment, le même. Mais dans beaucoup de cas (autres que la gravitation) l'utilisation du concept de champ est presque indispensable pour traiter certains problèmes.

Imaginons la terre comme une masse isolée. Toute masse m autour de la terre subit une force d'attraction F :

$$F = \frac{GM_t}{r^2} m$$

cette force est dirigée vers le centre de la terre. Comme la force est dirigée alors que la masse m est un scalaire (=n'est pas un vecteur), c'est le champ gravitationnel qui est vectoriel (c'est le champ qui impose une direction). Si nous appelons \vec{r} le vecteur qui va du centre de la terre à la position de la masse m , on peut écrire:

$$\vec{F} = -\frac{GM_t}{r^3} \vec{r} m$$

Remarquez que l'exposant de r au dénominateur est passé à 3 pour que la dépendance avec r ne change pas. De plus il faut ajouter un signe négatif pour obtenir une force dirigée dans la direction opposée de celle du vecteur \vec{r} . Ceci nous permet d'écrire le champ gravitationnel de la terre comme:

$$\vec{\Gamma} = -\frac{GM_t}{r^3} \vec{r}$$

Les unités du champ $\vec{\Gamma}$ sont les mêmes que celles de l'accélération de gravité, c'est-à-dire celles d'une accélération: *mètres/seconde*².

Toute masse m plongée dans ce champ subira une force:

$$\vec{F} = \vec{\Gamma} m$$

Au niveau de la mer le champ $\vec{\Gamma}$ est un vecteur vertical, dirigé vers le bas et de valeur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

11.3.1 Énergie potentielle gravitationnelle.

Nous avons déjà calculé l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet situé près de la surface de la terre, là où l'accélération de gravité pouvait être considérée comme constante. Nous savons maintenant que l'accélération de gravité diminue avec la distance et nous allons refaire le calcul qui sera, cette fois, valable pour toutes les distances.

Lors du calcul précédent, nous avons pris comme zéro d'énergie potentielle, la hauteur zéro de l'objet (sans trop insister sur l'endroit où se trouvait cette hauteur zéro) et nous avons obtenu que l'énergie potentielle était $E_p = mgh$. En réalité nous ne pouvons calculer que des différences d'énergie potentielle d'un objet pour deux positions différentes. Fixer un zéro d'énergie à une position donnée est purement arbitraire mais très commode.

Dans le cas des forces attractives qui diminuent avec la distance, il est habituel de fixer le zéro d'énergie potentielle à l'infini. C'est-à-dire, à l'endroit où la force attractive est nulle. La conséquence de ce choix est que l'énergie potentielle gravitationnelle est toujours négative. En effet, l'énergie potentielle est l'énergie qu'un objet peut potentiellement *fournir*. Or un objet situé à l'infini fournit de l'énergie en se rapprochant et son énergie potentielle diminue (et donc devient de plus en plus négative). Il ne faut donc pas être troublé par des énergies potentielles négatives: ce n'est que le résultat du choix du niveau zéro.

Pour calculer l'énergie potentielle d'un objet à un endroit donné il faut calculer le travail à fournir pour le porter de cet endroit à l'endroit où son énergie est nulle, c'est-à-dire l'infini. Donc

pour un objet de masse m situé à une distance r d'une masse M , le travail à fournir pour le porter à l'infini est:

$$E_p = \int_r^\infty F dr = \int_r^\infty \frac{GMm}{r^2} dr = GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_r^\infty = -\frac{GMm}{r} \quad (11.7)$$

On peut se demander quel est le chemin utilisé pour porter la masse m à l'infini. En regardant le calcul on pourrait penser que le chemin utilisé est le rayon qui passait par la position initiale. En fait, le chemin n'a aucune importance. Le travail est égal au produit du déplacement par la composante de la force dans la direction du déplacement ou à l'inverse: le produit de la force par le déplacement dans la direction de la force. Dans notre cas, la force est radiale et donc les seuls déplacements qui impliquent du travail sont les déplacements radiaux. Le travail pour déplacer un objet entre deux points ne dépend pas du chemin. Les forces et les champs de forces de ce type, dans lequel le travail ne dépend pas du chemin, reçoivent le nom de **forces conservatives**. Le travail fait pour faire un chemin fermé (qui revient au point de départ) est nul: l'énergie potentielle s'est conservée et n'a pas été transformée en un autre type d'énergie (chaleur, par exemple).

On peut calculer la force exercée sur une masse à partir de l'énergie potentielle. En utilisant la même méthode que nous avons utilisée dans le chapitre 5, nous pouvons écrire que le travail fait sur un objet contre les forces de gravité est égal à l'augmentation d'énergie potentielle de l'objet:

$$F dr = dE_p = \frac{dE_p}{dr} dr$$

$$F = \frac{d}{dr} \left(\frac{GMm}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

Le signe négatif indique que la force a le signe opposé à l'augmentation de r .

Si on aime travailler avec des champs, on peut définir un champ d'*énergie potentielle gravitationnelle par masse unitaire* V :

$$V = \frac{-\frac{GMm}{r}}{m} = -\frac{GM}{r}$$

Ce champ est un champ scalaire: ce n'est pas un vecteur. À chaque point de l'espace correspond une valeur et non trois comme pour le cas des champs vectoriels. L'énergie potentielle d'un objet de masse m se calcule en multipliant la valeur du champ à l'endroit de l'objet par la masse de l'objet.

L'énergie potentielle d'un objet de masse m à la surface de la terre est égale à $-\frac{GM_t}{r_t}m$. Pour porter cet objet à l'infini il faut fournir à l'objet une énergie égale à celle que l'on vient de calculer (mais positive!). Si on lui fournit cette vitesse sous la forme d'énergie cinétique la vitesse à lui fournir sera:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{GM_t}{r_t}m$$

$$v_o = \sqrt{\frac{2GM_t}{r_t}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{6,366 \cdot 10^6}} = 11\,175,5 \text{ m/s}$$

soit 11 km/s . Si, de la terre, on lance un objet avec cette vitesse il arrivera à l'infini: c'est ce que l'on appelle **vitesse d'échappement**. Tout objet lancé avec une vitesse moindre finira par s'arrêter avant et retomber sur terre.

11.4 Mouvements planétaires.

Note: Dans la plupart des livres de physique du niveau de ce fascicule on ne fait pas la démonstration des lois de Kepler à partir des lois de Newton. Le calcul est, effectivement, un peu lourd. Je l'inclus quand même, mais je pense que je ne le ferai pas en cours. Vous pouvez quand-même lire rapidement ces paragraphes, jusqu'au 11.5 sans vous attarder dans les calculs, mais seulement dans les conclusions. Et reprendre en détail à partir du 11.5.

Les lois de Kepler nous disent que les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers. Le système de coordonnées cartésiennes que nous avons utilisé jusqu'ici n'est pas adapté pour décrire ce type de trajectoires. Il est plus facile d'utiliser des coordonnées polaires. Ainsi, nous allons faire une parenthèse pour en parler.

11.4.1 Coordonnées polaires.

Deux variables r et ϕ vont décrire la position d'un point. r est la distance entre l'origine des coordonnées et le point. ϕ est l'angle formé par r avec une direction fixe. La position d'un point est complètement déterminée par la paire (r, ϕ) de la même façon qu'elle l'était par la paire (x, y) dans les coordonnées cartésiennes. Nous choisissons deux vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_ϕ mutuellement perpendiculaires qui ont pour direction celle de l'augmentation de \vec{r} et sa perpendiculaire respectivement. Contrairement aux vecteurs unitaires utilisés en coordonnées cartésiennes qui gardaient toujours leur orientation ici, les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_ϕ changent en permanence de direction. De plus il faut une paire de vecteurs unitaires pour chaque objet décrit.

La dérivée d'un vecteur unitaire est perpendiculaire à celui-ci car un vecteur unitaire ne peut changer qu'en direction, pas en longueur. La variation de \vec{u}_r a la direction de \vec{u}_ϕ (voir dessin) et sa longueur est égale à $d\phi|\vec{u}_r| = d\phi$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\phi \frac{d\phi}{dt}$$

De même, la variation de \vec{u}_ϕ a la direction de $-\vec{u}_r$ et sa valeur est $d\phi$:

$$\frac{d\vec{u}_\phi}{dt} = -\vec{u}_r \frac{d\phi}{dt}$$

En dérivant l'expression $\vec{r} = r\vec{u}_r$, nous obtenons la vitesse:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\phi}{dt}\vec{u}_\phi \quad (11.8)$$

La vitesse est le résultat de l'addition de deux vecteurs perpendiculaires (parallèles aux deux vecteurs unitaires). Les trois vecteurs forment un triangle rectangle dont hypoténuse est la vitesse. En utilisant le théorème de Pythagore on peut calculer le carré de la vitesse dont nous aurons besoin plus tard:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad (11.9)$$

En dérivant l'expression vectorielle de la vitesse nous obtenons l'accélération:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\vec{u}_\phi + \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}\vec{u}_\phi + \frac{d\phi}{dt}r\frac{d\vec{u}_\phi}{dt} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\vec{u}_\phi\frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2}r\vec{u}_\phi + \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{dt}\vec{u}_\phi - \frac{d\phi}{dt}r\vec{u}_r\frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

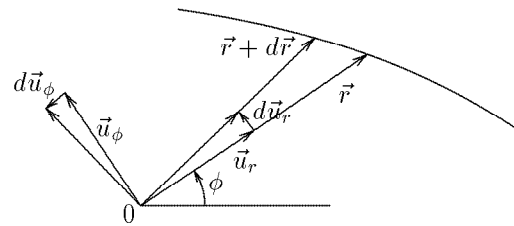


Figure 11.3 Coordonnées polaires. La position d'un point est déterminée par r et ϕ . Les variations de chaque vecteur unitaire sont parallèles à l'autre vecteur unitaire.

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_r + \left(r \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{d\phi}{dt} \frac{dr}{dt} \right) \vec{u}_\phi$$

Donc:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2$$

$$a_\phi = r \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{d\phi}{dt} \frac{dr}{dt}$$

11.4.2 Loi des surfaces.

Étudions le mouvement d'un corps de masse m qui subit une force dirigée vers l'origine des coordonnées (comme c'est le cas pour une planète qui est attirée par le soleil).

La seconde loi du mouvement de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ s'exprime, en coordonnées polaires, comme:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Si nous faisons le produit vectoriel de chaque coté par le vecteur \vec{r} nous obtenons:

$$\vec{r} \times \vec{F} = m \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0$$

égal à zéro car le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul, et la force est colinéaire avec le rayon. Comme la masse n'est pas nulle nous pouvons diviser par m :

$$\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0$$

L'intégrale de cette équation est:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{c}$$

Où \vec{c} est un vecteur constant. En effet, si l'on dérive⁽⁸⁾ cette expression on obtient la précédente:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0$$

car le tout premier terme est nul car c'est le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles.

L'expression:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{c} \quad (11.10)$$

a une signification géométrique simple. Dans le dessin de droite de la figure 11.4 nous avons représenté deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} . La surface du triangle en traits pleins est:

$$S = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} a b \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

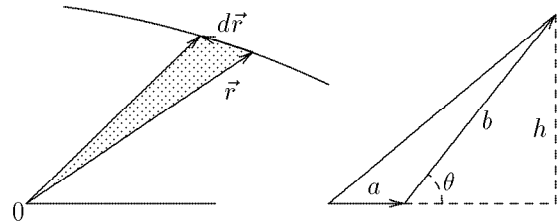


Figure 11.4 La surface grisée est égale à la moitié du module du produit vectoriel $\vec{r} \times d\vec{r}$.

Donc le module du produit vectoriel $\vec{r} \times d\vec{r}$ est égal au double de la surface grisée dans le dessin de gauche de la figure 11.4. Cette surface est la surface balayée par le rayon quand la masse avance de $d\vec{r}$. Si nous divisons cette surface par le temps dt mis pour la balayer nous obtenons:

$$\left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = 2c \quad (11.11)$$

⁽⁸⁾ On rappelle qu'un produit vectoriel de vecteurs se dérive de la même façon qu'un produit de scalaires mais que l'on doit respecter l'ordre des facteurs.

où c est la “vitesse surfacique” (berk!) qui est constante. Ceci est la deuxième loi de Kepler et est une conséquence de la force d’attraction centrale. Remarquez que nous n’avons pas eu besoin de la dépendance de la force avec la distance. Même un pendule “conique” (une ficelle avec un poids) dont la force est à peu près linéaire suit la loi des surfaces de Kepler.

Le vecteur $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ est le moment cinétique (ou moment angulaire) de la masse en orbite autour de 0. Corollaire: dans un mouvement à force centrale le moment cinétique d’une particule par rapport au centre de forces reste constant.

11.4.3 Trajectoire des planètes.

Pour calculer la trajectoire d’une planète (ou une masse qui orbite autour d’une masse fixe) nous allons utiliser la loi des surfaces et la conservation de l’énergie. Pour l’énergie nous savons que la somme de l’énergie cinétique plus l’énergie potentielle est constante. L’énergie cinétique est $\frac{1}{2}mv^2$ et l’énergie potentielle est (équation 11.7):

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

où M est la masse fixe (soleil, par exemple), m est la masse de l’objet qui bouge, et r est la distance. Nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

où v_0 et r_0 sont des valeurs de v et r à un endroit déterminé.

Pour avoir la position de l’objet en fonction du temps il faudrait résoudre ce système d’équations différentielles. Nous allons calculer la forme de la trajectoire (r en fonction de ϕ). Pour cela il faut éliminer le temps des deux équations. Or, le temps n’apparaît que dans les dérivées. Nous pourrions l’éliminer grâce à cette astuce:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi}$$

On peut obtenir la valeur de $\frac{d\phi}{dt}$ à partir de la loi des surfaces (équations 11.10 et 11.11):

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{c}$$

Dans cette équation nous pouvons remplacer la vitesse $\frac{d\vec{r}}{dt}$ par sa valeur dans l’équation 11.8:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_\phi \right) = \frac{dr}{dt} \vec{r} \times \vec{u}_r + r \frac{d\phi}{dt} \vec{r} \times \vec{u}_\phi = 2\vec{c}$$

Le produit vectoriel $\vec{r} \times \vec{u}_r$ est nul car les deux vecteurs sont parallèles. Par contre le produit vectoriel $\vec{r} \times \vec{u}_\phi$ n’est pas nul et son module est r car les deux vecteurs sont perpendiculaires et le module de \vec{u}_ϕ est 1. En prenant le module des deux côtés de la dernière égalité:

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = 2c$$

d’où:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2c}{r^2}$$

et

$$\frac{d}{dt} = \frac{2c}{r^2} \frac{d}{d\phi}$$

Nous pouvons maintenant revenir à la conservation de l'énergie et remplacer v^2 par son expression donnée par l'équation 11.9:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - 2\frac{GM}{r} = v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}$$

On remplace $\frac{dr}{dt}$ par $\frac{2c}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$ et $\frac{d\phi}{dt}$ par $\frac{2c}{r^2}$

$$\left(\frac{2c}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 \left(\frac{2c}{r^2}\right)^2 - 2\frac{GM}{r} = v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}$$

$$\frac{4c^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{4c^2}{r^2} - 2\frac{GM}{r} = v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}$$

On peut sortir $d\phi$:

$$d\phi = \frac{2c \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0} + \frac{2GM}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}}$$

On fait le changement de variable $q = \frac{1}{r}$, (ce qui donne $dq = -\frac{dr}{r^2}$):

$$d\phi = -\frac{2c dq}{\sqrt{v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0} + 2GMq - 4c^2q^2}}$$

Ce qui donne:

$$\phi + C = -\int \frac{2c dq}{\sqrt{v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0} + 2GMq - 4c^2q^2}}$$

On trouve la primitive de cette intégrale dans les tables:

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{a + 2bx - hx^2}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \arccos\left(\frac{b - hx}{\sqrt{b^2 + ah}}\right)$$

on identifie:

$$a = v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0} \quad b = GM \quad h = 4c^2$$

$$\phi + C = 2c \frac{1}{2c} \arccos\left(\frac{GM - 4c^2q}{\sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}\right)}}\right)$$

$$GM - \frac{4c^2}{r} = \sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}\right)} \cos(\phi + C)$$

$$r = \frac{\frac{4c^2}{GM}}{1 - \frac{1}{GM} \sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}\right)} \cos(\phi + C)}$$

Cette équation est de la forme:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\phi + C_1)}$$

qui est connue car c'est l'équation d'une courbe **conique** (ellipse, parabole ou hyperbole) en coordonnées polaires. Pour $\epsilon = 0$ on a le cas particulier d'un cercle (=une ellipse non aplatie) car r est constante. Si $|\epsilon| < 1$ on a une ellipse. Pour $|\epsilon| = 1$ une parabole, et une hyperbole si $|\epsilon| > 1$.

Dans le cas d'une ellipse le dénominateur reste toujours positif et r oscille entre deux valeurs positives. La condition pour une ellipse est:

$$\frac{1}{GM} \sqrt{G^2M^2 + 4c^2\left(v_0^2 - 2\frac{GM}{r_0}\right)} < 1$$

$$G^2 M^2 + 4c^2 \left(v_0^2 - 2 \frac{GM}{r_0} \right) < G^2 M^2$$

$$v_0^2 - 2 \frac{GM}{r_0} < 0$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM}{r_0} < 0$$

Mais ceci est l'énergie totale de l'objet. Donc, quand l'énergie totale est négative la trajectoire est une ellipse.

Si $|\epsilon| = 1$ on obtient

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM}{r_0} = 0$$

la trajectoire est une parabole et l'objet peut arriver à l'infini (dans un temps infini) puisqu'il a tout juste l'énergie nécessaire. Dans l'expression de r le dénominateur devient nul pour la valeur de ϕ qui rend le cosinus égal à 1.

Si $|\epsilon| > 1$ on obtient

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM}{r_0} > 0$$

L'énergie totale est positive. La trajectoire est une hyperbole. L'objet peut arriver à l'infini avec une vitesse non nulle. Dans l'expression de r le dénominateur devient nul pour deux valeurs de l'angle pour lesquels $\cos(\phi + C_1) = -1/\epsilon$.

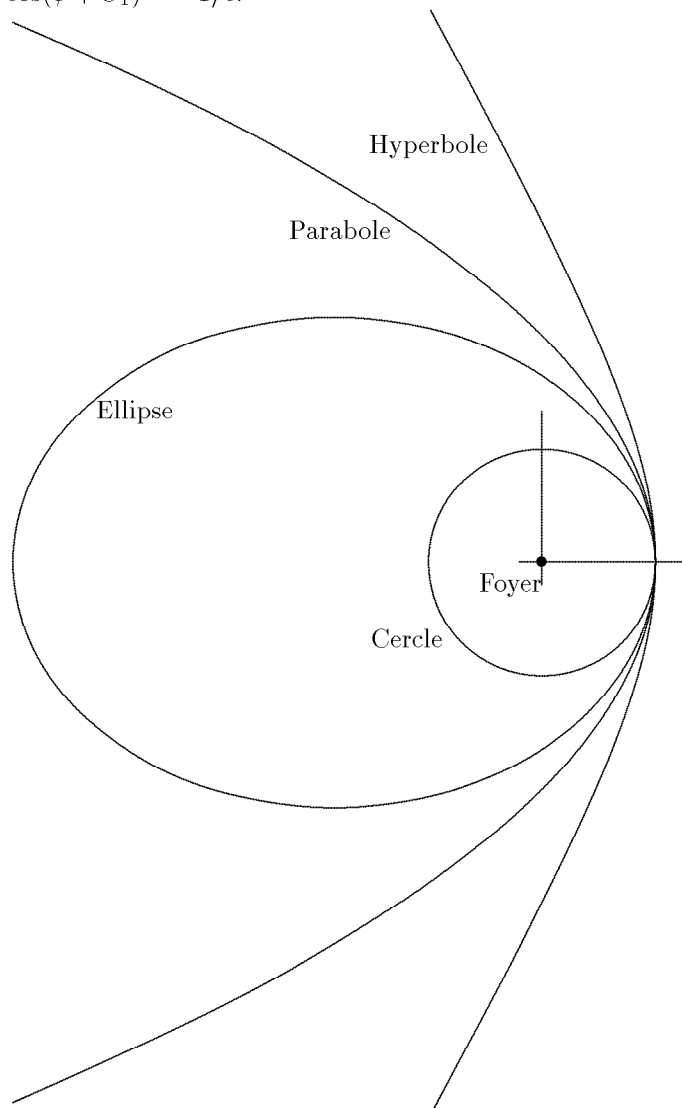


Figure 11.5 Quelques coniques avec un même foyer. Les asymptotes de la parabole sont horizontales. Celles de l'hyperbole forment un angle de 120° avec l'axe horizontal.

Dans le système solaire, l'orbite des planètes est elliptique. C'est le cas aussi pour des comètes récurrentes (qui reviennent périodiquement). Par contre les objets externes au système solaire qui nous visitent une seule fois ont une énergie positive et quand ils s'éloignent c'est pour toujours.

11.4.4 Période des planètes.

Dans le cas des trajectoires elliptiques on peut calculer la période de révolution. Pour ceci il suffit de diviser la surface de l'ellipse par la "vitesse surfacique" c .

La surface d'une ellipse est égale à $S = \pi ab$, où a est le demi-axe majeur et b le demi-axe mineur (ceci correspond à un cercle de rayon a aplati d'un rapport b/a dans une direction). Il faut relier a et b aux valeurs p et ϵ de la formule en coordonnées polaires. On peut vérifier que:

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}$$

$$1 - \epsilon^2 = \frac{p}{a} = \frac{4c^2}{GMa} \quad (11.12)$$

Comme c est la "vitesse surfacique", la surface de la trajectoire sera égale à c multipliée par la période T de la planète:

$$cT = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{2\pi a^2 c}{\sqrt{GMa}}$$

En divisant par c :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

Ceci est la troisième loi de Kepler (loi des périodes): *Le carré de la période orbitale d'une planète autour du soleil est proportionnelle au cube de la distance moyenne de la planète au soleil.*

11.4.5 Énergie totale d'une planète.

Si, dans l'équation 11.12, nous remplaçons ϵ par sa valeur:

$$\frac{4c^2}{GMa} = 1 - \epsilon^2 = 1 - \frac{1}{G^2 M^2} \left(G^2 M^2 + 4c^2 \left(v_0^2 - 2 \frac{GM}{r_0} \right) \right)$$

$$\frac{4c^2}{GMa} = - \frac{4c^2}{G^2 M^2} \left(v_0^2 - 2 \frac{GM}{r_0} \right)$$

$$v_0^2 - 2 \frac{GM}{r_0} = - \frac{GM}{a}$$

On multiplie par $\frac{1}{2}m$ pour obtenir l'énergie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$$

Le terme de gauche est l'énergie de la planète. Le terme de droite est bien négatif car toutes les variables sont positives. Ce qui est intéressant dans ce résultat est que l'énergie ne dépend que de l'axe majeur de l'ellipse et non du mineur. Toutes les ellipses (y compris le cercle) qui ont le même axe majeur correspondent à une même énergie. Mais ces ellipses qui ont le même axe majeur ne sont pas tangentes. Elles ont toutes le même foyer dont la position dans l'ellipse dépend de l'aplatissement. Les centres de ces ellipses ne coïncident pas.

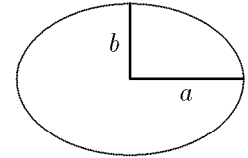


Figure 11.6 Demi-axe majeur a et demi-axe mineur b d'une ellipse.

11.5 Trajectoires circulaires.

Le cas particulier des orbites avec excentricité ϵ égale à zéro est particulièrement simple et peut être calculé directement sans passer par les calculs des paragraphes précédents.

Une masse M est située au centre de la trajectoire circulaire de rayon r d'une particule de masse m . La force F d'attraction est dirigée vers le centre et est toujours perpendiculaire à la trajectoire de la particule. Elle ne change pas le module de la vitesse tangentielle V_T de la particule. L'énergie de la particule reste donc constante.

La force F est la force centripète qui détermine la trajectoire. Nous avons vu (paragraphe 4.2) que:

$$F = m \frac{V_T^2}{r}$$

Mais la force F est aussi la force d'attraction gravitationnelle:

$$F = G \frac{M m}{r^2}$$

donc:

$$m \frac{V_T^2}{r} = G \frac{M m}{r^2}$$

On déduit la vitesse tangentielle:

$$V_T = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

et la période orbitale T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Calculons la vitesse et la période d'un satellite terrestre situé dans une orbite à 300 km de hauteur. On peut chercher les valeurs de G et de la masse de la terre M dans une table (ou dans ce fascicule). Mais on peut les retrouver en sachant que, au niveau de la mer, le poids p d'une masse m est $p = mg$ et que ce même poids est égal à l'attraction gravitationnelle de la terre:

$$p = G \frac{M m}{r_0^2}$$

Où r_0 est le rayon de la terre, dont le périmètre est de 40 000 km (définition du mètre). On déduit:

$$GM = gr_0^2 = 9,81 \left(\frac{4 \cdot 10^7}{2\pi} \right)^2 = 3,976 \cdot 10^{14} m^3 s^{-2}$$

Le rayon de l'orbite du satellite sera $r = r_0 + 3 \cdot 10^5 = 6,666 \cdot 10^6 m$ et sa vitesse tangentielle sera:

$$V_T = \sqrt{\frac{3,976 \cdot 10^{14}}{6,666 \cdot 10^6}} = 7723 m/s$$

La période de l'orbite est:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{(6,666 \cdot 10^6)^3}{3,976 \cdot 10^{14}}} = 5423 s \simeq 90 \text{ minutes}$$

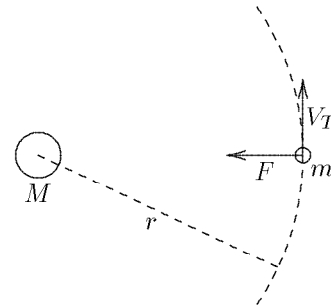


Figure 11.7 Un objet de masse m décrit une orbite circulaire autour de la masse M . La vitesse tangentielle reste constante.

11.6 Mouvement de deux corps soumis à l'attraction de gravité.

Dans les paragraphes précédents nous avons considéré que la masse M située au centre de coordonnées était immobile. Ceci est une supposition qui est valable pour des mouvements des planètes autour du soleil. La masse des planètes est tellement petite devant celle du soleil que l'on peut considérer ce dernier comme fixe. Mais pour d'autres cas, comme celui de la terre et de la lune la supposition de l'immobilité de la terre n'est plus raisonnable. Nous savons que dans le système terre-lune aussi bien la lune que la terre tournent autour du centre de masses du système et que la distance entre le centre de la terre et le centre de masses du système est proche du rayon de la terre.

Malgré cela, les calculs (lourds!) des paragraphes précédents restent valables avec une petite modification que nous allons déduire.

Examinons les forces entre deux masses m_a et m_b comparables. Les deux masses sont à des distances a et b de leur centre de masses.

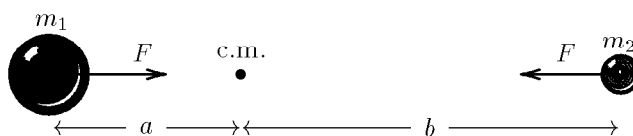


Figure 11.8 Les deux masses tournent autour du centre de masses du système.

La force entre les deux masses est:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{(a + b)^2}$$

Mais la définition du centre de masses nous dit que:

$$m_1 a = m_2 b$$

d'où

$$a = \frac{m_2}{m_1} b$$

En remplaçant a dans l'expression de la force:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)^2 b^2}$$

$$F = G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_2}{b^2}$$

C'est-à-dire, la force que subit la masse m_2 est la même que s'il y avait une masse $\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$ fixe située au centre de masses.

Il est évident que la situation est symétrique et que la masse m_1 voit une masse fixe $\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ située au centre de masses.

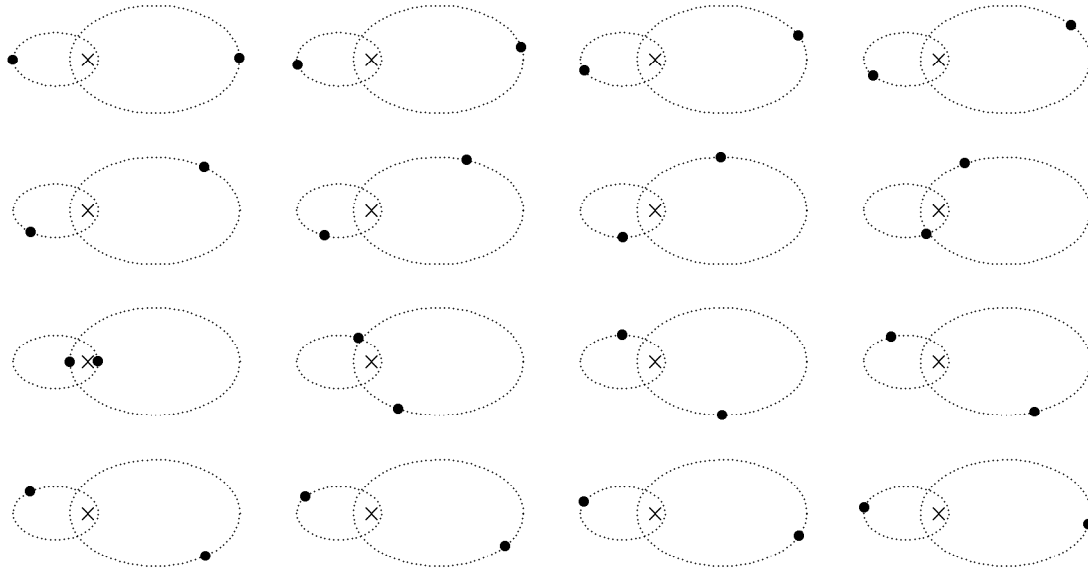


Figure 11.9 Positions successives prises par deux objets mutuellement attirés par leurs forces de gravitation. La masse de l'objet dans l'orbite de gauche est deux fois plus grande que celle de droite. Les dessins se lisent de gauche à droite puis de haut en bas. L'intervalle entre chaque dessin est d'un seizième de période. Remarquez comme les objets vont plus vite quand ils sont proches du centre de masses (représenté par un X). Dans cet exemple les orbites sont elliptiques, mais elles auraient pu, aussi bien, être des cercles.

11.7 Mouvement de N corps soumis à l'attraction de gravité.

Ce problème est connu comme le “problème de n corps” ou “n-body problem”. Il a fait l'objet de beaucoup de livres qui ne traitaient que de ce problème. Tout cela pour rien: on ne sait pas le résoudre analytiquement, sauf pour quelques cas particuliers. On sait écrire les équations différentielles correspondantes à $F = ma$ pour chacun des corps. Mais on ne sait pas intégrer analytiquement le système d'équations différentielles obtenu. On sait, évidemment, les intégrer numériquement comme le montre la précision avec laquelle on calcule la trajectoire des sondes spatiales ou la trajectoire des comètes. Mais la précision avec laquelle on calcule une trajectoire est limitée par la précision des calculateurs utilisés. Si on écrit un code qui permet de calculer avec plus de chiffres significatifs le calcul est plus lent. À mesure que la puissance de calcul des ordinateurs (je ne parle pas des PC!) augmente, on peut prédire avec plus de précision l'orbite des objets. Dernièrement ce problème a touché le grand public quand on a parlé de prédire les possibles collisions futures des astéroïdes avec la terre.

Malgré la limitation due au calcul numérique, on peut encore faire des merveilles dans les calculs, comme celles des astronomes Jean Le Verrier et John C. Adams qui, en 1846 (sans PCs ni calculettes), observant les anomalies de l'orbite de la planète Uranus, prédirent séparément l'existence d'une planète inconnue et calculèrent l'endroit du ciel vers lequel il fallait pointer les télescopes. On l'appela Neptune.

Quand on a une masse fixe (ou très grande) autour de laquelle orbite un corps, l'énergie de celui-ci reste constante. Quand il s'agit de deux corps, la situation est la même. Par contre quand il y a plus de deux corps, le jeu des forces et des orbites fait que de l'énergie passe d'un corps à l'autre. Un transfert d'énergie implique un changement d'orbite suivi d'un transfert d'énergie différent... et ainsi de suite.

Quand la masse centrale est fixe ou très grande par rapport aux planètes ou satellites, les transferts d'énergie se passent à travers les forces entre planètes. Par contre, si la masse centrale est plus petite, elle exécute une orbite complexe autour du centre de masses. Dans cette orbite complexe on trouve les périodes de toutes les planètes. Donc, chaque planète voit un “soleil” qui bouge tout le temps et qui peut, en moyenne, aussi bien lui fournir de l'énergie que lui en prendre. Certains planètes tombent vers des orbites de plus en plus proches du centre tandis que d'autres décrivent des orbites de plus en plus éloignées. Dans notre système solaire le soleil est assez massif et les grandes planètes assez éloignées de sorte que les orbites n'évoluent pas beaucoup. La preuve est que nous sommes encore là.

On trouve des phénomènes très surprenants dans des systèmes à n corps. Citons, sans en parler, les points Lagrangiens et les orbites réciproques. Deux autres phénomènes sont la capture et le “slingshot”. Dans la capture, un corps extérieur au système solaire (avec énergie totale positive) passe à l’extérieur et devant une planète. Le fait de passer devant fait accélérer la planète et freiner l’objet extérieur. La planète prend une orbite plus énergétique, mais l’objet peut se retrouver avec une énergie négative et rester lié (en orbite) au système solaire. On pense que la planète Pluton a été capturée de cette manière.

Le phénomène inverse est le “slingshot” (effet de fronde). Cet effet fut découvert vers 1974 en faisant des simulations à l’ordinateur sur le mouvement de trois corps. Un objet (peu massif par rapport à la planète) la rattrape à l’intérieur et la dépasse. L’objet gagne de l’énergie au dépens de celle de la planète. On utilise cette méthode pour accélérer des sondes spatiales et leur donner des vitesses très difficiles à atteindre à partir des fusées de lancement. La sonde “Rosetta” utilisera trois passages près de la terre et un près de Mars pour atteindre la vitesse nécessaire pour atteindre l’orbite de la comète Churyumov-Gerasimenko⁽⁹⁾.

11.8 Le système solaire.

Il serait très esthétique que le système solaire soit formé par des planètes qui tournent autour du soleil sur des trajectoires circulaires contenues dans un même plan. Il n’en est rien! Les planètes tournent sur des trajectoires décentrées et non coplanaires. Mais les orbites ne sont pas très excentriques ni très éloignées du plan de l’écliptique. En regardant les données du système solaire on a l’impression que c’est un travail fait avec peu de soins ou peu d’habileté.

SYSTÈME SOLAIRE							
	Diamètre / 10^6 m	Masse / 10^{24} kg	Période de révolution autour du Soleil (jours)	Rayon moyen de l'orbite / 10^9 m	Excentricité	Inclinaison de l'orbite par rapport à l'écliptique (degrés)	Inclinaison de son axe par rapport au plan de son orbite (degrés)
Soleil	1392	1986816	26-37	-	-	-	-
Mercur	4,88	0,3302	87,97	57,9	0,206	7	0,1
Venus	12,1	4,869	224,7	108	0,0068	3,39	177,3
Terre	12,73	5,97	365,25	150	0,0167	0	23,45
Mars	6,79	0,6419	686,98	227,9	0,0934	1,85	25,19
Jupiter	143	1898,6	4332,6	778	0,04839	1,305	3,12
Saturne	120,5	558,46	10759,22	1429	0,05415	2,484	26,73
Uranus	51,1	86,83	30685	2869,8	0,04718	0,77	97,86
Neptune	49,53	102,43	60189	4496,6	0,00859	1,77	29,56
Pluton	2,274	0,0125	90465	5910,6	0,2488	17,14	122,46
Lune	3,476	0,07349	27,322	0,384 (terre)	0,0549	5,145	6,68

Figure 11.10 Quelques données du système solaire. Pluton n’est probablement pas une planète comme les autres mais un objet de la ceinture de Kuiper capturé par les perturbations provoquées par les planètes géantes Jupiter et Saturne.

Les trois colonnes de droite donnent une idée de l’écart des planètes par rapport au système idéal d’orbites circulaires et “à plat”. On peut voir à l’œil nu l’excentricité des orbites de Mercure et Mars (figure 11.11).

⁽⁹⁾ Consultez le site <http://www.esa.int/export/SPECIALS/Rosetta>

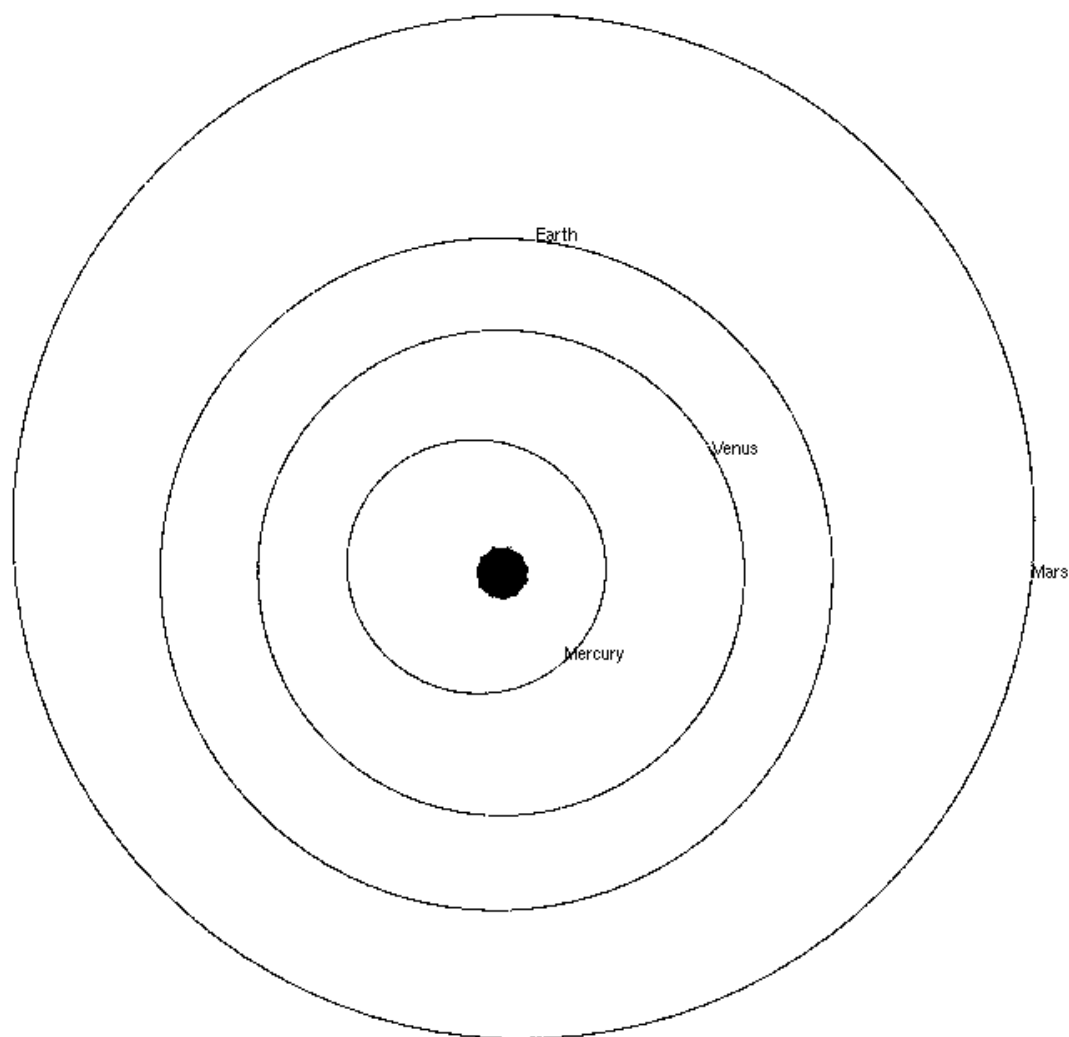


Figure 11.11 Orbites des 4 premières planètes le 14-03-2004 obtenues avec le logiciel libre Celestia⁽¹⁰⁾. Dans la transformation en noir et blanc les dessins des planètes ont été perdus. Elles se situaient près de leurs noms. Le soleil n'est pas à l'échelle. À l'échelle du dessin l'orbite de Neptune se situerait à 1,35 m.

Le plan qui contient l'orbite de la terre s'appelle **écliptique**. L'intersection de ce plan imaginaire avec le ciel donne une ligne qui est la trajectoire du soleil dans le ciel. L'axe de rotation de la terre n'est pas perpendiculaire à l'écliptique mais incliné de $23,45^\circ$. La prolongation de l'axe de rotation de la terre vers le nord touche le ciel dans un point proche de l'étoile polaire. Mais comme la terre suit un mouvement de précession (voir chapitre 9) l'actuelle étoile polaire ne sera plus polaire dans quelques centaines d'années et il faudra attendre 27000 ans pour qu'elle le redevienne.

L'orbite de la lune n'est pas réessie non plus. Elle ne tourne ni dans le plan de l'écliptique ni dans le plan qui contient l'équateur terrestre. Son orbite fait un angle de $5,1^\circ$ avec le plan de l'équateur.

Pour les autres planètes la situation est similaire et, bien sûr, leur orbite n'est pas contenue dans l'écliptique. Quand on regarde la trajectoire des planètes dans le ciel (donc, par rapport aux étoiles) elles se déplacent près de l'écliptique passant au gré des mois ou des années d'un côté à l'autre de celle-ci. Leur mouvement apparent fait que parfois elles avancent et parfois elles reculent par rapport aux étoiles fixes.

⁽¹⁰⁾ <http://www.shatters.net/celestia>.

Un autre concept utile est celui de **jour solaire** et **jour sidéral**. Le **jour solaire** est simplement le temps entre deux passages du soleil par le méridien qui contient le **zénith**⁽¹¹⁾. Évidemment un jour solaire dure 24 heures. Par contre un **jour sidéral** est le temps entre deux passages d'une même étoile par le zénith. Le jour sidéral dure un peu moins que le jour solaire parce que la terre tourne autour du soleil (voir la figure 11.12):

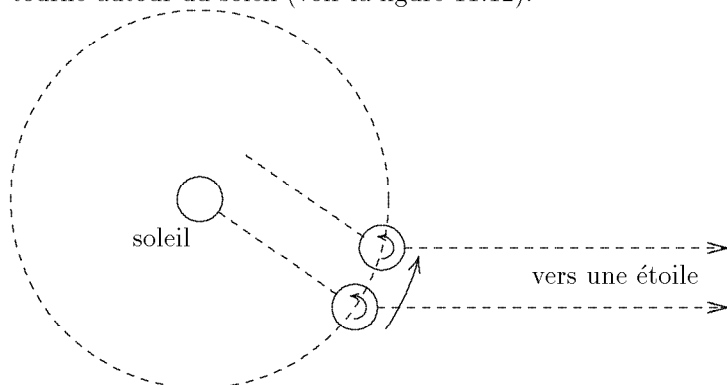


Figure 11.12 Le soleil et la terre vus de l'étoile polaire. Quand une étoile passe une deuxième fois au zénith d'un observateur côté nuit, le soleil n'a pas atteint le zénith de l'observateur côté jour. Il faut attendre un peu plus: $1/365^{\text{ème}}$ de jour. L'angle entre les deux position successives de la terre est exagéré.

Quand la terre a fait un tour complet sur elle-même par rapport à un repère fixe (les étoiles), un observateur qui avait le soleil au zénith au début du tour n'aura pas encore le soleil au zénith car la terre a tournée sur son orbite de $2\pi/365$ radians: il lui faudra attendre $1/365^{\text{ème}}$ de jour supplémentaire. La durée du jour sidéral est de $8,616409 \cdot 10^4$ secondes, alors que celle d'un jour solaire est de $24 \cdot 60 \cdot 60 = 8,64 \cdot 10^4$ secondes. Le jour sidéral est donc 236 secondes plus court que le jour solaire. Vu de la terre, le soleil se décale dans le ciel, par rapport aux étoiles du fond, d'environ 1 degré vers l'est par jour (le diamètre apparent du soleil est d'environ 0,5 degrés).

11.9 Exercices.

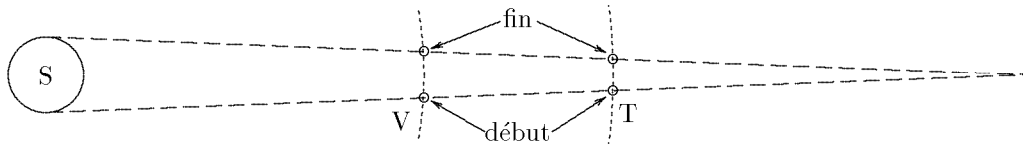
- 1 - Quand la planète Jupiter se trouve à une distance de $628 \cdot 10^9 m$ de la terre, son diamètre apparent est de $47''$ (secondes d'arc). Une seconde d'arc est égale à $1/60^{\text{ème}}$ de minute d'arc, laquelle est égale à $1/60^{\text{ème}}$ de degré. Le rayon apparent de l'orbite de son satellite *Europa* est de $3,67'$ (minutes d'arc). Calculez le diamètre de Jupiter et le rayon de l'orbite de *Europa*. La période orbitale de *Europa* est de $3,55 \text{ jours}$. Calculez la masse de Jupiter
R.N.: Valeurs vraies: $143 \cdot 10^6 m$; $671100 km$; $1,898 \cdot 10^{27} kg$.
- 2 - Calculez le rapport entre les forces d'attraction exercées sur un objet situé sur la surface de la Terre, par celle-ci, par la lune et par le soleil.
R.N.: $\frac{F_L}{F_T} \simeq 3,4 \cdot 10^{-6}$; $\frac{F_S}{F_L} \simeq 177$.
- 3 - Soient deux sphères de rayon R et densité ρ . Les sphères sont juste en contact et tournent autour de leur centre de masses. Calculez la vitesse angulaire ω pour laquelle la force centrifuge est égale à la force d'attraction gravitationnelle entre les deux sphères. Montrez que cette vitesse ne dépend pas de la masse mais seulement de la densité. Calculez la période pour une densité égale à celle de l'eau.
R.N.: $3,8 \text{ heures}$.
- 4 - Il est prévu que, en mai 2014, la sonde Rosetta se place en orbite autour de la comète Churyumov-Gerasimenko. Le diamètre de la comète est de $4 km$ et sa densité est proche de

⁽¹¹⁾ Le zénith est le point du ciel situé au dessus de l'observateur. On dit qu'un astre culmine quand il passe par méridien céleste qui passe par le zénith. Le point opposé au zénith (le zénith des antipodes) est le nadir.

celle de l'eau. Calculez la période orbitale pour le rayon de l'orbite prévu de 25 km ainsi que la vitesse orbitale (tangentielle) de la sonde. En novembre 2014, un "atterrisseur" de 100 kg de masse se détachera de la sonde pour se poser sur la surface de la comète. Calculez l'accélération de gravité à la surface de la comète et le poids de l'atterrisseur. Il est prévu que l'atterrisseur s'accroche à la comète en lui enfonçant un harpon.

R.N.: 6 jours ; $0,3 \text{ m/s}$; $g = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$; $0,056 \text{ N}$.

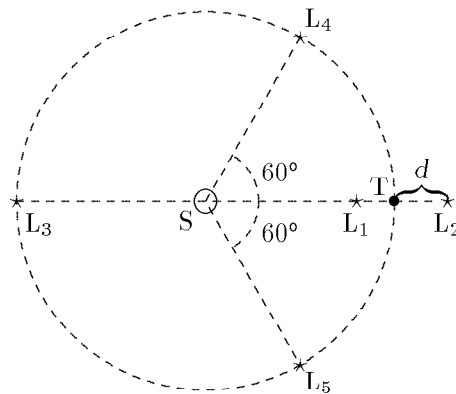
- 5 - Le 8 juin 2004 nous avons pu observer le transit de Venus devant le soleil. Comme l'orbite de Venus n'est pas située dans le même plan que celui qui contient celle de la terre (l'écliptique), ce phénomène n'arrive que si, au moment où Venus coupe l'écliptique, la terre se trouve alignée avec le soleil et Venus. Ceci arrive très rarement. Calculez quelle serait la durée maximale du transit si l'orbite de Venus était coplanaire avec celle de la terre.



La ligne pointillée du bas correspond au début du transit, quand Venus et la terre sont alignées avec le bord est du soleil. Dans celle du haut, Venus et la terre sont alignées avec le bord ouest du soleil, et c'est la fin du transit. Le point d'intersection des deux lignes pointillées est inconnu (mais calculable). Comme la durée du transit est très petite devant la période des planètes, vous pouvez approcher ces bouts d'orbite par des droites et vous servir du théorème de Thalès.

R.N.: $\simeq 8 \text{ heures}$.

- 6 - Soit un objet situé sur la droite qui passe par le soleil et par la terre et est situé au delà de la terre, à une distance d de celle-ci. Calculez cette distance de sorte que l'attraction du soleil plus l'attraction de la terre, fassent que la période de l'objet soit la même que celle de la terre. Le point de l'espace que vous déterminerez ainsi est le **point lagrangien L_2** . On trouve deux autres points sur la même droite qui ont la même propriété: la période d'un objet de masse négligeable placé à cet endroit est la même que celle de la terre. Le point L_1 est situé entre le soleil et la terre et le point L_3 est situé sur l'orbite de la terre, de l'autre côté du soleil.



On trouve encore deux autres points L_4 et L_5 sur l'orbite de la terre mais à 60° devant et derrière celle-ci.

Vous obtiendrez une équation de $3^{\text{ème}}$ degré qu'il faudra résoudre par des approximations successives.

R.N.: Pour L_2 $d = 1,365 \cdot 10^9 \text{ m}$.

BIBLIOGRAPHIE.

- R. RESNICK AND D. HALLIDAY. Physics part 1. Wiley . *C'est le livre dont je me suis le plus largement inspiré pour ces notes. J'ai notamment suivi l'ordre de présentation des différents sujets. Existe en édition française. Édité par DeBoeck Université.*
- F. W. SEARS, M. W. ZEMANSKY. "College Physics", "Mechanics, Heat, and Sound" Addison-Wesley. *J'ai trouvé plusieurs idées et exemples dans ce livre. Malheureusement je crois qu'il est épuisé et qu'il n'existe pas en édition française.*
- R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON ET M. SANDS. The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley. *Mon texte préféré de physique générale. Je ne suis pas sûr que ce livre soit le meilleur livre pour apprendre la physique. Par contre, quand on croit qu'on a presque tout compris, on trouve chez Feynman des nouvelles choses à comprendre et des vieilles à mieux comprendre. Existe en édition française sous la forme de 5 tomes portant le titre de LE COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN. Édité par Dunod.*
- C. KITTEL, W. KNIGHT ET M. RUDERMAN. Berkeley. Cours de physique Volume 1. Mécanique. Édité par Armand Colin.
- PHYSICAL SCIENCE STUDY COMMITTEE. Berkeley. La physique. Dunod.
- M. ALONSO ET E. FINN. Physique Générale 1. Mécanique et thermodynamique. Dunod.

Indice Alphabétique.

- μ_a 4-2
- μ_s 4-2
- Accélération angulaire 2-5, 8-6
- Accélération de gravité 1-6
- Accélération linéaire 1-2
- Accélération linéaire instantanée 1-2
- Accélération linéaire moyenne 1-2
- Barycentre 6-3
- Centre de gravité 6-1, 10-2
- Centre de masses 6-1
- Centrifuge (force) 4-4
- Centripète (force) 4-4
- Champ gravitationnel 11-6
- Chute libre 1-6
- Coefficient de friction dynamique 4-2
- Coefficient de friction statique 4-2
- Coefficient de restitution 7-2
- Coin 5-10
- Collisions 7-1
- Collisions élastiques 7-2
- Collisions inélastiques 7-2
- Coniques (courbes) 11-11, 11-12
- Constante de gravitation universelle 11-3
- Coordonnées polaires 11-8
- Couple d'une force 8-2
- Deuxième loi de Newton 3-4
- Écliptique 11-18
- Énergie 5-4
- Énergie cinétique 5-4
- Énergie cinétique de rotation 8-4
- Énergie potentielle élastique 5-6
- Énergie potentielle gravitationnelle 11-6
- Énergie potentielle gravitationnelle 5-5
- Énergie potentielle mécanique 5-5
- Équation horaire 1-2
- Équilibre des corps 10-1
- Équilibre indifférent 10-7
- Équilibre instable 10-6
- Équilibre stable 10-7
- Équinoxes 9-8
- Espace parcouru 1-1
- Éther 3-9
- Force 3-3
- Force centrifuge 4-4, 4-5
- Force centripète 4-4
- Force gravitationnelle 11-3
- Friction 4-1
- Friction dynamique 4-1
- Friction sèche 4-1
- Friction statique 4-1
- Friction visqueuse 4-1
- Fusée 6-9
- g 1-6
- Gravitation 11-1
- Gravitation (constante de) 11-2, 11-3
- Gyroscope 9-5
- Impulsion 6-7
- Joules 5-1
- Jour sidéral 11-19
- Kepler (lois de) 11-2
- Leverier 5-9
- Loi d'action et réaction 3-5
- Loi d'attraction universelle 11-2
- Loi de conservation de l'énergie 5-4
- Loi des surfaces 11-9
- Lois de Kepler 11-2
- Lois de Newton 3-4
- Masse 3-2
- Microgravité 10-3
- Moment angulaire 9-1
- Moment cinétique 9-1
- Moment d'inertie 8-4, 8-7
- Moment d'une force 8-2
- Moment linéaire 6-4
- Mouvement accéléré dans un plan 2-2
- Mouvement circulaire non uniforme 2-7
- Mouvement circulaire uniforme 2-4, 2-5
- Mouvement dans un plan 2-1
- Mouvement rectiligne 1-1
- Mouvement uniformément accéléré 1-3, 1-4
- Mouvements Planétaires 11-1
- Mouvements planétaires 11-8
- Nadir 11-19
- Newton (unité) 3-2, 3-3
- Palan 5-11
- Paramètre de choc 7-4
- Pendule balistique 6-8
- Précession 9-5, 9-6
- Première loi de Newton 3-4
- Produit scalaire 5-1
- Produit vectoriel 8-3
- Projectile 2-2
- Puissance 5-3
- Quantité de mouvement 6-4
- Recul 6-8
- Référentiel inertiel 3-9
- Référentiel newtonien 3-9
- Rotation 8-1
- Stabilité 10-6
- Système inertiel 3-9
- Système solaire 11-17
- Théorème de Pythagore généralisé 8-6
- Théorème du cosinus 8-6
- Toupie 9-7
- Trajectoire des planètes 11-10, 11-14
- Travail 5-1
- Troisième loi de Newton 3-5
- Vélo 9-8
- Vis sans fin 5-11
- Vitesse angulaire 2-4
- Vitesse d'échappement 11-7
- Vitesse instantanée 1-1
- Vitesse moyenne 1-1
- Vitesse relative 2-7
- Vitesse tangentielle 2-4
- Watt 5-3
- Zénith 11-19