Soient :
K le référentiel lié à un observateur, dit au repos ;
K' le référentiel lié au voyageur, dit en mouvement.

Le voyageur est en inertie à vitesse donné v selon K, l'observateur lui transmet une force F pour arrêter le mouvement de voyageur toujours selon son référentiel K. Le travail de la force F sur une distance que mesure le voyageur lui même est donc égale à sa variation d'énergie selon ses observations, d'où :

$$\Delta E' = F \cdot \Delta x'$$

Par suite avec les transformations de Lorentz et par substitution à $\Delta x'$ il vient :

$$\left|\begin{array}{l}
\Delta E' = \Delta x' \cdot F \\
\\
\Delta E' = (\Delta x - v\Delta t)\,\gamma \times \frac{\Delta p}{\Delta t} \\
\Delta E' = \left(\frac{\Delta E}{F} - v\Delta t\right)\gamma \times \frac{\Delta p}{\Delta t} \\
\Delta E' = \left(\frac{\Delta E \cdot \cancel{\Delta p}}{\cancel{F \cdot \Delta t}} - \frac{v\Delta t \cdot \Delta p}{\Delta t}\right)\gamma \\
\Delta E' = \left(\Delta E - \frac{\Delta t^2 \cdot F \cdot v}{\Delta t}\right) \times \gamma \\
\\
\Delta E' = (\Delta E - \Delta p \cdot v)\,\gamma \\
\end{array}\right|$$

D'où à un instant donné :

$$E' = (E - vp) \cdot \gamma \tag{1}$$

—

De plus

$$\left|\begin{array}{l}
\Delta p' = \Delta t' \cdot F \\
\Delta p' = \Delta t' \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} \\
\Delta p' = \frac{\Delta p}{\Delta t} \times \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x\right)\gamma \\
\Delta p' = \left(\Delta p - \frac{v\Delta x\Delta p}{c^2\Delta t}\right)\gamma \\
\Delta p' = \left(\Delta p - \frac{v\cancel{\Delta p}}{c^2\cancel{\Delta t}}\,\frac{\Delta E}{\cancel{F}}\right)\gamma \\
\Delta p' = \left(\Delta p - \frac{v\Delta E}{c^2}\right)\gamma
\end{array}\right|$$

Or la variation de la quantité de mouvement $\Delta p'$ est nulle car elle se mesure dans le référentiel de ce voyageur, pour lui au repos car en inertie. Donc :

$$\Delta p = \frac{v\Delta E}{c^2} \tag{2}$$

(ou à un instant donné $p = \frac{vE}{c^2}$)

—

D'après (1) et (2) :

$$E' = \left(E - \frac{v^2 E}{c^2}\right) \cdot \gamma$$

$$E' = E\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3}$$

—

Aussi, $p = mv = \frac{vE}{c^2}$ d'où

$$E = mc^2 \tag{4}$$

encore équivalent à dire que $E' = m'c^2$ en changeant de référentiel.

Pour finir :

$$E' = E\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Longleftrightarrow m'c^2 = mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$m' = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{5}$$